Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок јун 2
7.7.2020.

1. а) [2] Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ мере на простору $(X, \mathfrak{M})$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n > 0$. Доказати да је тада са

$$\lambda(E) = c_1\lambda_1(E) + c_2\lambda_2(E) + \cdots + c_n\lambda_n(E)$$

дефинисана мера на $(X, \mathfrak{M})$.

б) [8] На Лебеговој σ-алгебри $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{R}$, дефинишимо функцију $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ са

$$\mu(E) = 2m\left(E \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) + e\delta_{\{0\}}(E) + \pi\delta_{\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}}(E),$$

при чему је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$, док су $\delta_{\{0\}}$ и $\delta_{\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}}$ Диракове мере у одговарајућим тачкама. Доказати да је μ мера и израчунати $\mu(\mathbb{Q}), \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ и $\mu(K)$, где је K Канторов скуп.

в) [12] Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} |\operatorname{arctg} x|, \ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \\ \operatorname{sgn} x, \ x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right] \setminus K \\ \sin \frac{1}{x^2+1}, \ x \in K \\ e^x, \ x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Борел мерљива и израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\mu$.

г) [3] Доказати да је са

$$\mathfrak{N} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ највише пребројив или } A^{\complement} \text{ највише пребројив}\}$$

дефинисана једна σ-алгебра на $\mathbb{R}$.

д) [5] Да ли је функција f $\mathfrak{N}$-мерљива?

ђ) * [5] Описати све $\mathfrak{N}$-мерљиве функције $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.

2. [16] Комплетност мере - дефиниција. Дати пример комплетне и некомплетне мере и објаснити.

3. а) [13] Теорема о доминантној конвергенцији (формулација и доказ).

б) [13] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{x^2}}{1+n^3(x-1)^2} \, dx$.

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = ne^{-n|x|}$.

а) [5] Испитати за које $p \in [1, +\infty)$, $f_n \in L^p(\mu)$ када $n \to \infty$;

б) [5] Испитати конвергенцију низа f_n μ скоро свуда;

в) [5] Испитати конвергенцију низа f_n у L^1;

г) [5] Испитати конвергенцију низа f_n по мери μ;

д) [8] Да ли из L^1 конвергенције следи конвергенција по мери? Да ли из конвергенције по мери следи конвергенција у L^1-норми? Уколико је тврдња тачна, доказати је, уколико није, дати контрапример.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.