Први колоквијум, Математика I

Зора Голубовић

12.12.2019. године

1. задатак

Нека су $a_1, \dots a_n$, $b_1, \dots b_n$ произвољни реални бројеви.

Ако је $a_1^2 > \sum_{i=2}^{n} a_i^2$ или $b_1^2 > \sum_{i=2}^{n} b_i^2$, доказати да важи Ацелова неједнакост

$$(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i)^2 \geq (a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2) \cdot (b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2).$$

Решење.

Посматрајмо функцију

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (a_i x - b_i)^2.$$

Како је

$$f\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\sum_{i=2}^{n} \left(a_i \frac{b_1}{a_1} - b_i\right)^2 \leq 0,$$

$$a_1^2 > a_2^2 + \cdots + a_n^2, \text{ (по претпоставци)}$$

следи

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Стога, $f(x)$ има бар један реалан корен и $D \geq 0$, што је и требало доказати.

2. задатак

Наћи $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{6}{\sqrt{1+2x^2}-1}}$

Решење.

Пређимо најпре на запис у експоненцијалном облику:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{6}{\sqrt{1+2x^2}-1}} = e^{\frac{6 \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\sqrt{1+2x^2}-1}}.$$

Како је

$$\sqrt{1+2x^2} - 1 = x^2 + o(x^2) \text{ бесконачно мала другог реда за } x \to 0,$$

а важи и

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \text{ за } x \to 0,$$

то је тражени лимес једнак $\frac{1}{e}$.

3. задатак

Нека је $a_0 \in (0, \pi)$ и $a_{n+1} = \sin a_n$ за $n \geq 0$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n$.

Решење.

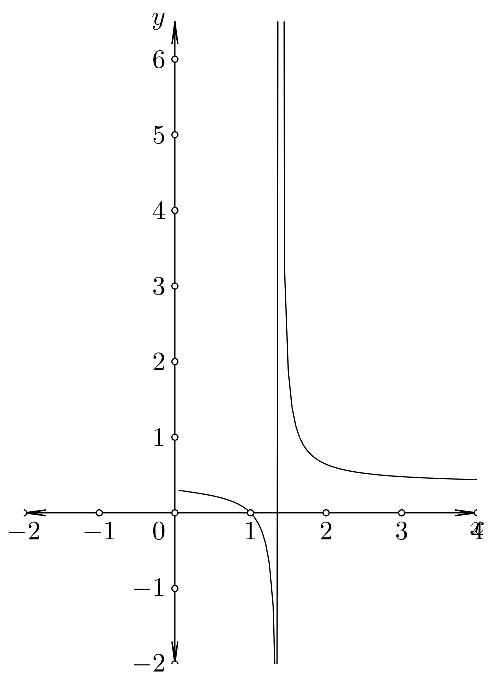
Лако се показује да посматрани низ конвергира нули кад $n \to \infty$.
Применом Чезаро-Штолцове леме на низове $a_n = x_n^2$ i $b_n = n$, добија се да је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right),\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) &= \lim_{n\varnothing\infty} \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n},\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) &= \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n^2 - \frac{1}{2}(1-\cos 2x_n)}{\frac{x_n^2}{2}(1-\cos 2x_n)},\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) &= \lim_{x_n\to 0} \frac{2x_n^2 - [\frac{(2x_n)^2}{2!} - \frac{(2x_n)^4}{4!} + \dots]}{x_n^2[\frac{(2x_n^2)}{2!} - \frac{(2x_n)^4}{4!} + \dots]},\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) &= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

одакле је полазни лимес једнак $\sqrt{3}$.

4. задатак

Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{\ln x}{3\ln(x)-1}$.



Решење.

∇ 5. задатак

:

а) Да ли постоји функција $f\colon [0,1] \xrightarrow{\text{на}} (0,1)$?

Да ли постоји функција $f\colon [0,1] \xrightarrow[1-1]{\text{на}} (0,1)$?

б) Да ли постоји непрекидна функција $f\colon [0,1] \xrightarrow{\text{на}} (0,1)$?

Да ли постоји непрекидна функција $f\colon [0,1] \xrightarrow[1-1]{\text{на}} (0,1)$?

в) Да ли постоји непрекидна функција $f\colon (0,1) \xrightarrow{\text{на}} [0,1]$?

Да ли постоји непрекидна функција $f\colon (0,1) \xrightarrow[1-1]{\text{на}} [0,1]$?