Динамички системи за почетнике

Зора Голубовић

Новембар 29, 2019.

Садржај

1 Увод

У математичком смислу, динамички систем је дефинисан почетним стањем и законом промјене стања у времену. Притом, закон промјене стања може бити детерминисаног и случајног карактера.

2 Динамички системи

Динамички простор се састоји из фазног простора и правила које одређује како фазни простор еволуира у времену. Изучаваћемо случај дискретног времена, односно разматраћемо итерате пресликавања $T : X \to X$.

Дефиниција Нека је $x \in X$.

Низ $(T^j x)_{j \geq 0}$ је параметризована орбита пресликавања T кроз тачку x.

Скуп $\mathscr{O}^+(x) = \bigcup\limits_{j \geq 0} \{T^j(x)\}$ је непараметризована орбита пресликавања T кроз тачку x или трајекторија тачке x.

Рећи ћемо да је тачка $x \in X$ периодичка с периодом $N > 0$ ако је $T^N x = x$. Приметимо да период није дефинисан само за минимално такво T. Тачке које имају период једнак 1 називаћемо фиксним.

3 Мала Фермаова теорема

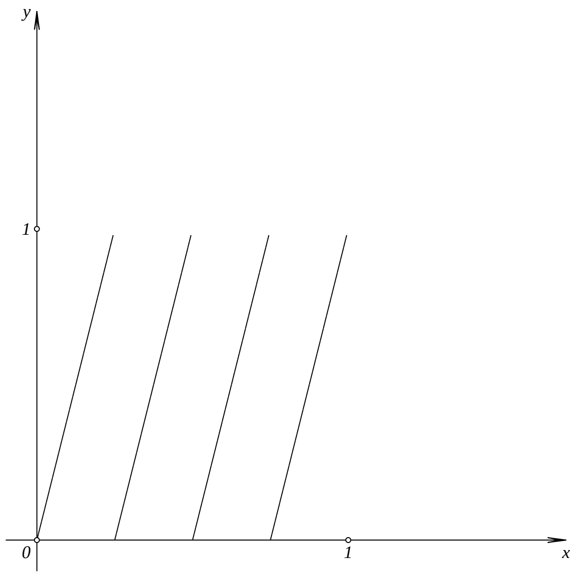
Пример 1 *Нека је* $T_n : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$T_n(x) = \begin{cases} nx, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{1}$$

(видети слику 1 за $n = 4$*).*

Лема 1 *Нека је* $n \geq 1$*. Пресликавање* T_n *има* n *фиксних тачака у* $[0, 1]$*.*

Доказ Очигледно, n је пресјека са правом $y = x$. За оне који не воле геометријске, визуелне доказе, дајемо и један алгебарски. Једначина фиксне тачке је $T_n(x) = x$, одакле је $-t + nx = x$, за неко $t \in \mathbb{Z}$, односно $x = \frac{t}{n-1}$ за $t \in \{0, 1, \ldots n - 1\}$.



Слика 1:

Лема 2 *Нека су* $a, b \in \mathbb{N}$. *Тада, за свако* $x \in [0, 1]$ $T_a(T_b(x)) = T_{ab}(x)$.

Доказ Геометријски, ово је јасно, али дајемо и алгебарски доказ. Важи $T_b(x) = bx+m$ за неко $m \in \mathbb{Z}$, одакле је $T_a(T_b(x)) = \{a(bx+m)\} = \{abx + am\} = \{abx\} = T_{ab}(x)$.

Подсетимо се формулације Мале Фермаове теореме.

Теорема 1 *Нека је* p *прост и* a *цио број. Тада,* $a^p \equiv_p a$.

Доказ Посматрајмо p-периодичке тачке пресликавања T_a као фиксне тачке пресликавања T_{a^p}. То пресликавање има a^p фиксних тачака, од чега су њих a фиксне тачке пресликавања T_a. Преосталих $a^p - a$ тачака има минимални период п при T_a, односно њих $a^p - a$ има минимални период p. Одавде следи тврђење теореме.

4 О ирационалности броја $\sqrt{2}$

Пример 2 *Број* $\sqrt{2}$ *је ирационалан.*

Доказ Пресликавање $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задато са $T(x) = (\sqrt{2}-1)x$ има орбиту $\mathscr{O}(x_0) = \{(\sqrt{2}-1)^n x_0 : n \in \{0\} \cup \mathbb{N} :\}$. Орбита очигледно конвергира нули јер је $0 < \sqrt{2}-1 < 1$. Претпоставимо да је $\sqrt{2}$ рационалан и једнак $\frac{p}{q}$, за $p, \in \mathbb{N}$. Како је

$$(\sqrt{2})^n q = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, n \equiv_2 0, \\ 2^{\frac{n-1}{2}}, n \equiv_2 1, \end{cases} \tag{2}$$

то је $(\sqrt{2})^n q$ природан број. Применом биномне теореме, имамо

$$0 < (\sqrt{2}-1)^n q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (-1)^{n-k} q \in \mathbb{Z},$$

одакле слиједи $\mathscr{O}(q) \subset \mathbb{N}$, што је контрадикторно конвергенцији ка 0.

5 Задатак са логистичким низом

Следећи проблем се тиче логистичке једначине, која је успјешан модел многих феномена у генетици и математичкој биологији. У свом најједноставнијем облику, она је формула за апроксимацију еволуције животнињске популације у времену.

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ је број животиња након } n\text{-те године.}$$

Лако се провери да низ (a_n) конвергира нули:

Пример 3

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Низ (a_n) је ограничен одозго са 1:

$$a_{n+1} = 1 - (1 - a_n)^2 \leq 1.$$

Индукцијом се, штавише, проверава да $0 < a_n < 1$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође,

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2 < a_n,$$

па је низ опадајући. Како монотон и ограничен низ конвергира, то је низ (a_n) конвергентан. Пролазећи лимесом кроз дефинишућу једнакост, закључујемо да је $a = a - a^2$, одакле слиједи $a = 0$.

Пример 4 *Нека је дат низ* (a_n) *који задовољава* $a_1 \in (0,1)$ *и* $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$ *за све* $n \geq 1$. *Показати да је* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Нека је $c_n = \frac{1}{a_n}$. Израчунаћемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{na_n}$. Имамо,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n a_n(1-a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-a_n} = 1.$$

На основу Штолц-Чезарове леме је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = 1$, одакле слиједи тражено.

Литература

[1] K. Iga, A Dynamical Systems Proof of Fermat's Little theorem, $https://www.maa.org/sites/default/files/A/_Dynamical/_Systems10029.pdf$

[2] N. C. Ferrero, Yet Another Proof of Irrationality of $\sqrt{2}$, American Mathematical Monthly, volume 116, number 1, january 2009. 116- Mathematical Association of America (2009)

[3] T-L T. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axes