Математика III, I колоквијум

асистент: Зора Голубовић

27.11.2019. године

1. Наћи област дефинисаности реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^n \cdot \frac{(\sin x)^{3n}}{n^2}$.

Р. Применом Кошијевог n-кореног критеријума на степени ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^n \cdot \frac{t^n}{n^2}$$

добијен сменом $t = (\sin x)^3$, налазимо

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{1}{n^2}} = \frac{8}{3\sqrt{3}},$$

будући да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Дакле, интервал конвергенције се добија из низа неједнакости

$$\begin{aligned} |t| &< R, \\ |t| &< \frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ |\sin x|^3 &< \frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ |\sin x| &< \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

односно, посматрањем тригонометријског јединичног круга, имамо да је интервал конвергенције је

$$\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{3} + m\pi < x < \frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Притом, треба испитати понашање у граничним тачкама интервала

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{N}.$$

Провером се утврђује да се у свим случајевима добијају конвергентни редови ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), па је област конвергенције

$$\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{3} + m\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{N}\}.$$

2. Доказати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^n}{10n-1}$$

на сегменту $[0,1]$.

Р. Ред је равномерно конвергентан на $[0,1]$ ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}(\forall n \geqslant n_0)(\forall x \in [0,1])|R_n(x)| < \varepsilon$$

Посматрани ред је знакопроменљиви, по Лајбницовом тесту.
Наиме,
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{10n-1} = 0$ за $x \in [0,1]$,
б) $\frac{x^n}{10n-1} > \frac{x^{n+1}}{10n+9}$, јер је $\frac{1}{10n-1} > \frac{x}{(10n-1)+10}$ за $x \in [0,1]$.
Остатак знакопроменљивог реда се може оценити неједнакошћу

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|,$$

тј.

$$|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{10n+9} < \frac{1}{10n+9} < \varepsilon,$$

почев од $N \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon} - 0,9$.

3. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

Р. Упутство: Упоредо са редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ посматрати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ и применити Ојлерову формулу.

4. а) Развити у Фуријеов ред функцију f чији је период 2π и која је за $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ дата са $f(x) = x^2$.

б) Користећи развој из а), израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

Р. Део под а) је урађен на вежбама. Прва сума се лако решава и једнака је $\frac{\pi^2}{12}$ (посматрати развој у Фуријеов ред), а за другу је потребно нпр. посматрати интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = C$.

5. Наћи интегралну Фуријеову репрезентацију функције

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Р. Погледати дефиницију Фуријеовог интеграла (урађено на вежбама), чијом применом се добија $a(\lambda) = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}$, $b(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$.