РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 23.11.2019.

Група 1

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$.
2. (5 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.
3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$.
4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+3x+6}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}} = e^1 = e \neq 0$$

па ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\\ &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$ је $\mathcal{D}_y = [0,+\infty)$, а њен први извод је

$$y' = (x^2 e^{\sqrt{x}})' = 2xe^{\sqrt{x}} + x^2 e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}x\left(4+\sqrt{x}\right).$$

Имамо да је $y' = 0$ за $x = 0$, па је то потенцијални екстремум. Како је експоненцијална функција увек позитивна и $4+\sqrt{x}$ је увек позитивно, знак првог извода зависи само од знака x, али домен дате функције је $[0,+\infty)$, па имамо да је $y' > 0$ за $x > 0$. Дакле, закључујемо да y расте на $(0,+\infty)$ и $x = 0$ је локални минимум.
4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, па је $x = 0$ потенцијална вертикална асимптота.
<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to -0-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x^2 e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-2}} \\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^{-1}} \\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}}{-2x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} \\
&= +\infty,
\end{aligned}
$$

па права $x = 0$ јесте вертикална асимптота функције y.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to \pm\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+3x+6}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 6}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\frac{15}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{15}{4}} + 1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{15}\int \frac{1}{(\frac{2x+3}{\sqrt{15}})^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x+3}{\sqrt{15}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{15}\mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{15}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right) + c.
\end{aligned}
$$

Група 2

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n \ln 2}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{x}$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = (x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$.

5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+5x+7}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{2^{-2n}}{n\ln 2}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{-2n}}{n\ln 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-2}}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{\ln 2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} < 1,$$

па дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}} &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - x^2\sin x}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\sin x} \\
&\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\sin x}{\cos x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{x}$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њен први извод је

$$y' = \left(\frac{e^{\sqrt{2x}}}{x}\right)' = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x}}e^{\sqrt{2x}}x - e^{\sqrt{2x}}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2x}}\sqrt{x} - e^{\sqrt{2x}}}{x^2} = \frac{e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}x^2}$$

Имамо да је $y' = 0$ за $x = 2$, па је то потенцијални екстремум. Како је експоненцијална функција увек позитивна, као и $x^2\sqrt{2}$, знак првог извода зависи само од знака $\sqrt{x} - \sqrt{2}$, па је $y' > 0$ за $x > 2$ и $y' < 0$ за $0 < x < 2$. Дакле, функција расте на $(2, +\infty)$, опада на $(0, 2)$ и достиже локални минимум у $x = 2$.

4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, па је $x = 1$ потенцијална вертикална асимптота.

<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to -1-} (x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to -1-} \frac{\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{\frac{1}{x-1}} \overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \dots = 0,$$

$$\lim_{x\to -1+}(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\ldots=0,$$

па права $x=0$ није вертикална асимптота функције y.
<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\pm\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^2+5x+7}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7}\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int\frac{1}{(\frac{2x+5}{\sqrt{3}})^2+1}\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t=\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}t+c\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)+c.
\end{aligned}$$

Група 3

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2} \cdot \sin x$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right)$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+7x+14} \mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[2n]{n+2}} = 3 > 1,$$

па дати ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2} \cdot \sin x &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)\sin x}{x^2} \\ &\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + (x+3)\cos x}{2x} \\ &= \infty\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right)$ је $\mathcal{D}_y = (1, +\infty)$ Трансформишимо најпре функцију на следећи начин (ово није неопходно али олакшава даљи рачун):

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right) = \ln(x-1) - \ln e^x = \ln(x-1) - x.$$

Први извод функције y је

$$y' = (\ln(x-1) - x)' = \frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2-x}{x-1},$$

а како је због домена израз $x-1$ увек позитиван, знак првог извода зависи само од $2-x$ и то је $y' = 0$ за $x = 2$, $y' > 0$ за $x \in (1,2)$ и $y' < 0$ за $x \in (2, +\infty)$, па закључујемо да y расте на $(1,2)$, опада на $2, +\infty$ и достиже локални максимум у тачки $x = 2$.

4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$, па је $x = 0$ потенцијална вертикална асимптота.

<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x} = +\infty,$$

па права $x = 0$ јесте вертикална асимптота функције y.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x} = -\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln \sqrt{x}}{x} = 0,$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln \sqrt{x} - 0 \cdot x \right) = -\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + 7x + 14} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 14} \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\frac{7}{4}\left(\frac{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}} + 1 \right)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{7} \int \frac{1}{(\frac{2x+7}{\sqrt{7}})^2 + 1} \mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x+7}{\sqrt{7}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{7}} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{7}}{2} \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \mathrm{arctg} \left(\frac{2x + 7}{\sqrt{7}} \right) + c.
\end{aligned}$$