Решења за Анализу 1 у року септембар2

1.

2. а) $2\sqrt{n(n+1)}-2n-1 = 2n(1+n^{-1})^{1/2}-2n-1 = 2n(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+O(\frac{1}{n^3}))-2n-1 = -\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{n^2})$.
Видимо да је овај низ негативан почев од неког члана. Дакле, ред је ред са негативним члановима.
$\frac{2\sqrt{n(n+1)}-2n-1}{(n+\frac{1}{n})^\alpha \cos\frac{1}{n}} \sim \frac{2\sqrt{n(n+1)}-2n-1}{(n+\frac{1}{n})^\alpha} = (-\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{n^2}))n^{-\alpha}(1+\frac{1}{n^2})^{-\alpha} = (-\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{n^2}))n^{-\alpha}(1-\frac{\alpha}{n^2}+O(\frac{1}{n^4})) = -\frac{1}{4n^{\alpha+1}}+O(\frac{1}{n^{\alpha+2}}), \quad n\to+\infty$.
Када је $\alpha \le 0$ први члан доминира и ред дивергира. Када је $\alpha > 0$ ред конвергира.

   б) $(e-(1+\frac{1}{n})^n)\sin n = (e-e^{n\log(1+\frac{1}{n})})\sin n = (e-e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3}))})\sin n = e(1-e^{-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})})\sin n = e(1-(1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})))\sin n = \frac{e\sin n}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$.
Први члан чини условно конвергентан ред, други чини апсолутно конвергентан ред, па је дати ред условно конвергентан.

3. а) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^1 = \pi/2$.
$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_1^0 \frac{-dt/2}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}|_0^1 = 1$.

   б) $I_n = \int_0^1 x^{n-1}d(-\sqrt{1-x^2}) = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}|_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx = (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$.
Одавде следи тражена једнакост.

   в) Доказује се индукцијом. $n=0$ следи из а), а индуктивни корак следи из б).

   г) Из чињенице да је $x^{n+1} \le x^n$ за $0 \le x \le 1$ следи $I_{n+1} \le I_n$, па је низ опадајући. Низ је ограничен одоздо нулом, па је конвергентан. Ако са a означимо лимес овог низа, из в) следи да је $a^2 = 0$, тј. $a = 0$.

   д) Како је I_n опадајућуи низ, следи $nI_{2n}I_{2n+1} \le nI_{2n}^2 \le nI_{2n-2}I_{2n-1}$. Применом в) добијамо $\frac{n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \le (\sqrt{n}I_{2n})^2 \le \frac{n}{2n-1}\frac{\pi}{2}$, одакле кореновањем па преласком на лимес следи тврђење.

   ђ) Из конвексности експоненцијалне функције следи неједнакост $e^x \ge 1+x$ за све $x \in \mathbb{R}$. Сада имамо $e^{-x^2} \ge 1-x^2$, одакле степеновањем на n и интеграљењем следи прва неједнакост, а и имамо и $e^{x^2} \ge 1+x^2$, одакле степеновањем на $-n$ и интеграљењем следи друга неједнакост.

   е) Увођењем смене $x = \cos t$ следи $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n t dt$.
У неједнакостима из ђ уведемо смене $x = \sin t$, $x = t/\sqrt{n}$, $x = \tan t$ редом у интеграле и добијамо $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t dt \le \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \le \int \cos^{2n-2} t dt$, што су управо тражене неједнакости.
Сада имамо $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}I_{2n+2} \le \sqrt{n}I_{2n+1} \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{n-1}I_{2n-2}$, одакле преласком на лимес на основу д) следи $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. а) Једначина је еквивалентна једначини $f(x) = f'(x)\sin x\cos x$. Увођењем смене $t = \operatorname{ctg} x$ једначина се своди на $f(\operatorname{arcctg} t) = f'(\operatorname{arcctg} t)\frac{t}{1+t^2}$.
Нека је сада $g(t) := f(\operatorname{arcctg} t)$ за $t \in [\operatorname{ctg} 2, \operatorname{ctg} 1]$. Ово је дифернцијална функција и $g(\operatorname{ctg} 1) = 0$.
Једначина је сада еквивалентна $g(t) = -g'(t)t$, односно $(g(t)t)' = 0$.
Претпоставимо да извод функције $g(t)t$ нигде није нула. На основу Дарбуове теореме, $(g(t)t)'$ је онда свуда позитиван или свуда негативан. Можемо претпоставити да је свуда позитиван (други случај је аналоган). Сада је функција $g(t)t$ строго растућа, па је специјално $g(\operatorname{ctg} 2)\operatorname{ctg} 2 < g(\operatorname{ctg} 1)\operatorname{ctg} 1 = 0$, као и $g((\operatorname{ctg} 1)/2)(\operatorname{ctg} 1)/2 < g(\operatorname{ctg} 1)\operatorname{ctg} 1 = 0$. Из прве неједнакости следи $g(\operatorname{ctg} 2) > 0$, а из друге $g((\operatorname{ctg} 1)/2) < 0$. Из непрекидности онда следи да постоји $\xi \in [\operatorname{ctg} 2, (\operatorname{ctg} 1)/2]$ такав да је $g(\xi) = 0$. Функција $g(t)t$ је сада нула на крајевима интервала $[\xi, \operatorname{ctg} 1]$, па на основу Ролове теореме следи да постоји $\eta \in [\xi, \operatorname{ctg} 1]$ такво да $\frac{d(g(t)t)}{dt}(\eta) = 0$, што је контрадикција.

б) Функција $g(t)t$ треба да има само једну тачку у којој је извод нула, па можемо покушти да за њу одаберемо квадратну функцију. Узимајући у обзир да треба и да се анулира у $\operatorname{ctg} 1$, природно се намеће полином $t(t-\operatorname{ctg} 1)$, односно $g(t) := t - \operatorname{ctg} 1$. Онда имамо $f(x) = g(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 1$, што јесте тражено решење.

5. Посматрајмо функцију $g(x) := x \int_a^x f(t)dt e^{-\int_a^x f(t)dt}$ за $x \in [a,b]$. Она је C^1 и анулира се на крајевима интервала, па по Роловој теореми следи да постоји $c \in (a,b)$ такво да је $g'(c) = 0$. Непосредним рачуном добијамо

$$\int_a^c f(t)dt\, e^{-\int_a^c f(t)dt} + cf(c)e^{-\int_a^c f(t)dt} + c\int_a^c f(t)dt\, e^{-\int_a^c f(t)dt}(-f(c)) = 0.$$

Множењем са $e^{\int_a^c f(t)dt}$ добијамо тражену једнакост.