1. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ функција дата са:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Испитати непрекидност и диференцијабилност функције. Да ли функција може да се додефинише у тачки $(0,0)$ тако да постане непрекидна у $(0,0)$?

Решење. Функција је непрекидна на домену као композиција непрекидних функција. Парцијални изводи функције су

$$f'_x = \frac{y^2-x^2}{x^4+2x^2y^2+x^2+y^4}, \quad f'_y = -\frac{2xy}{x^4+2x^2y^2+x^2+y^4}$$

Како су парцијални изводи непрекидни на домену као композиција непрекидних функција, то је функција непрекидна на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}$.
Нека је $a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ и $b_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Приметимо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$ као и да је $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{\pi}{2}$, па по Хајнеовој карактеризацији непрекидности добијамо да функција не може непрекидно да се додефинише у 0.

2. Израчунати површински интеграл

$$\iint_S (x-z^2)dydz + (y+x^2)dzdx - (z+y^2)dxdy$$

где је S спољна страна површи $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2-z^2$.

Решење. Како је $\frac{\partial}{\partial x}(x-z^2) = 1$, $\frac{\partial}{\partial y}(y+x^2) = 1$, $\frac{\partial}{\partial z}(-z-y^2) = -1$, применом теореме Гауса-Острогадског добијамо да је тражени интеграл једнак $\iiint_D dxdydz$, где је D унутрашњост области коју ограничава површ S. Увођењем сферних координата добијамо да је површ S описана једначином $\rho^2 = \cos 2\theta$. Како је $\rho^2 \geq 0$, то мора бити и $\cos 2\theta \geq 0$, односно $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, па је област D описана као:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\theta},$$

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta = \{\text{смена: } \sin t = \sqrt{2}\sin\theta\} = \frac{4\pi}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

3. Израчунати вредност интеграла $\int_E zdxdydz$, где је E део пресека цилиндара $x^2+y^2 \leq a^2$ и $y^2+z^2 \leq a^2$ који се налази у првом октанту.

Решење. Ако уведемо цилиндричне координате добијамо да је $\rho^2 \leq a^2$ и $(\rho\cos\theta)^2 + z^2 \leq a^2$, па је област E описана са:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\theta}} z\rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - \rho^2\sin^2\theta)\rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{8}\sin^2\theta d\theta = \frac{3a^4\pi}{8}.$$

4. Наћи сва решења диференцијалне једначине $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Решење. Одговарајући карактеристични полином једначине је $t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 4 = (t^2+1)(t-2)^2$, чије су нуле $2, i$ и $-i$ (2 има вишеструкост 2). Како 1 није нула карактеристичног полинома, партикуларно решење нехомогене једначине тражимо у облику ce^x, одакле директном заменом добијамо $c = \frac{1}{2}$. Дакле опште решење је дато са $y(x) = \frac{1}{2}e^x + c_1 e^{2x} + c^2 x e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$ где су $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.