ТМИ

Зора Голубовић

27. мај 2019.

1. Нека је X Хилбертов простор и $M \subset X$ произвољан векторски потпростор од X. Доказати да је $M^{\perp}$ Хилбертов простор.
Треба проверити својства линеарности и затворености. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ произвољни. Како је $\langle \alpha x + \beta y, \sigma \rangle = \alpha \langle x, \sigma \rangle + \beta \langle y, \sigma \rangle$, то лако следи да је $M^{\perp}$ линеаран. Нека је сада x_n низ у $M^{\perp}$ који конвергира x. Треба проверити да ли $x \in M^{\perp}$. На основу Кошијеве неједнакости је $\langle x_n - x, y \rangle \leq \|x_n - x\| \|y\|$, одакле следи тражено.
2. Нека је X Хилбертов и $\{x_i\}$ ортогоналан скуп вектора. Доказати да је $\| \sum_{i=0}^{n} x_i \|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2$.
Доказ индукцијом по n. Како је $\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$, то је и $\langle \sum_{i=1}^{n+1} x_i, \sum_{i=1}^{n+1} x_i \rangle = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 + \langle x_1 + \cdots + x_n, x_{n+1} \rangle + \langle x_{n+1}, x_1 + \ldots x_n \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$.
3. Ако је $Re\langle x, y \rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$, доказати да је $x = y$.
Применом идентитета $\langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Re\langle x, y \rangle$, лако следи тражено.
4. Доказати да је у Хилбертовом простору X једнакост $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ испуњена акко $g = \lambda f$ за неко $\lambda > 0$.
Применом идентитета $\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle$, уз напомену да је једнакост у Кошијевој неједнакости испуњена за линеарно-зависне векторе.
5. Наћи углове троугла у $L^2(-1,1)$ чија су темена $f = 0$, $g = 1$, $h = t$.
Углове одређујемо као у еуклидској геометрији, $\cos \angle f = \frac{\langle g-f, h-f \rangle}{\|g-f\| \|h-f\|} = \frac{\int_{-1}^{1} 1 \cdot t dt}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dt} \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} = 0$, аналогно за преостале углове. Добија се као решење троугао са угловима $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$. 6. $X^{\perp} \cap Y^{\perp} = (X+Y)^{\perp}$. Доказати.
Видети $https://math.stackexchange.com/questions/1455539/complement-of-sum-equals-intersection-of-complements$
7. Израчунати $d(e_1, L)$ за $e_1 = (1, 0, \ldots 0)$, где је $L = \left\{ x \in l^2 \mid x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}, \sum_{j=1}^{n} \xi_j = 0 \right\}$.

Означимо са $y = (1, 1, \dots 1, 0, \dots 0)$. Тада је $L = \{y\}^{\perp}$ и $L^{\perp} = Lin\{y\}$. Према теореми о ортопројекцији, $e_1 = f + g$ за $f \in L$, $g \in L^{\perp}$. Скаларним множењем једнакости са y добија се $\alpha = \frac{1}{n}$ и $d(e_1, L) = \|e_1 - f\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
8. Задатак 400. из збирке (аутор Д. Кечкић), стр. 156.