

ТМИ

Зора Голубовић

27. мај 2019.

1. Нека је X Хилбертов простор и $M \subset X$ произвољан векторски потпростор од X . Доказати да је M^\perp Хилбертов простор.

Треба проверити својства линеарности и затворености. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ произвољни. Како је $\langle \alpha x + \beta y, \sigma \rangle = \alpha \langle x, \sigma \rangle + \beta \langle y, \sigma \rangle$, то лако следи да је M^\perp линеаран. Нека је сада x_n низ у M^\perp који конвергира x . Треба проверити да ли $x \in M^\perp$. На основу Кошијеве неједнакости је $\langle x_n - x, y \rangle \leq \|x_n - x\| \|y\|$, одакле следи тражено.

2. Нека је X Хилбертов и $\{x_i\}$ ортогоналан скуп вектора. Доказати да је $\|\sum_{i=0}^n x_i\|^2 = \sum_{i=0}^n \|x_i\|^2$.

Доказ индукцијом по n . Како је $\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$, то је и $\langle \sum_{i=1}^{n+1} x_i, \sum_{i=1}^{n+1} x_i \rangle = \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 + \langle x_1 + \dots + x_n, x_{n+1} \rangle + \langle x_{n+1}, x_1 + \dots + x_n \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$.

3. Ако је $Re\langle x, y \rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$, доказати да је $x = y$.

Применом идентитета $\langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Re\langle x, y \rangle$, лако следи тражено.

4. Доказати да је у Хилбертовом простору X једнакост $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ испуњена акко $g = \lambda f$ за неко $\lambda > 0$.

Применом идентитета $\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle$, уз напомену да је једнакост у Кошијевој неједнакости испуњена за линеарно-зависне векторе.

5. Наћи углове троугла у $L^2(-1, 1)$ чија су темена $0, 1, t$.

Применом $\cos \angle f, g = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|}$.

6. $X^\perp \cap Y^\perp = (X + Y)^\perp$. Доказати.

Видети <https://math.stackexchange.com/questions/1455539/complement-of-sum-equals-intersection-of-complements>

7. Израчунати $d(e_1, L)$ за $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, где је $L = \left\{ x \in l^2 \mid x = (\xi_j)_{j=1}^\infty, \sum_{j=1}^n \xi_j = 0 \right\}$.

Видети <https://math.stackexchange.com/questions/415854/finding-distance-in-hilbert-space>

8. Задатак 400. из збирке (аутор Д. Кечкић), стр. 156.