Неразјашњени задаци са рокова - вежбе 30.05.2019.

Задатак 1 Остало нам је да видимо шта је са равномерном конвергенцијом реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+(-1)^{n+1}e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \sin nx$$

на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Испоставиће се да овај ред не конвергира равномерно, тако да све укупно Фуријеов ред из оригиналног задатка неће равномерно конвергирати (део са косинусима смо видели да равномерно конвергира по Вајерштрасу, а збир једног реда који равномерно конвергира и једног који не сигурно не може да равномерно конвергира). Ово ћемо доказати применом Кошијевог критеријума. Ако са $S_n(x)$ означимо $n-$ту парцијалну суму реда и са $f_n(x)$ његов општи члан, посматрајмо

$$\left| S_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) - S_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| f_{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) \right|.$$

Пошто су сви $\sin\frac{n+1}{n}, \sin\frac{n+2}{n}, \ldots, \sin\frac{2n}{n}$ позитивни и важи још $\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-\pi}}{\pi} \geqslant \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} = c > 0$, онда можемо за довољно велико n да оцењујемо

$$\begin{aligned}
\left| S_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) - S_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| &\geqslant c \cdot \left(\frac{(n+1)\sin\frac{n+1}{n}}{(n+1)^2+1} + \frac{(n+2)\sin\frac{n+2}{n}}{(n+2)^2+1} + \ldots + \frac{(2n)\sin\frac{2n}{n}}{(2n)^2+1} \right) \\
&\geqslant c \cdot \sin 1 \cdot \left(\frac{(n+1)}{(n+1)^2+1} + \frac{(n+2)}{(n+2)^2+1} + \ldots + \frac{(2n)}{(2n)^2+1} \right) \\
&\geqslant \frac{c \cdot \sin 1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) \\
&\geqslant \frac{c \cdot \sin 1}{2} \cdot \left(n \cdot \frac{1}{2n} \right) \geqslant \frac{c \cdot \sin 1}{4}.
\end{aligned}$$

Одавде по Кошијевом критеријуму следи да ред не конвергира равномерно.

Задатак 2 [Претходно решење које сам окачио је садржало грешку. Хвала колеги Филипу Ковачевићу што је уочио грешку.] Остало је да видимо зашто важи да ако низ полинома P_n задовољава $P_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$, онда f мора бити полином. Нека је $\varepsilon > 0$ дато и изаберимо n_0 тако да почевши од њега важи $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ за све $x \in \mathbb{R}$. Тада је за $n, m > n_0$ испуњено $|P_n(x) - P_m(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |P_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. Међутим, ово значи да је разлика $P_n(x) - P_m(x)$ полином који је ограничен на $\mathbb{R}$, па следи да он мора бити константан. Дакле, можемо писати $P_n(x) = P_m(x) + c_{mn}$. Пуштајући лимес по n (обичан, тачка по тачка лимес), имамо да је $f(x) = P_m(x) + c_m$, одакле следи тврђење из задатка.