ТМИ- други колоквијум (Р смер)

28. 5. 2019.

1. а) Неједнакост Минковског.

б) Показати да је $L^p(X,\mu)$, $p \geq 1$, затворен векторски простор.

в) Ако је f_n Кошијев низ у $L^p(X,\mu)$ да ли онда он конвергира по мери μ?

г) Нека низ $f_n \in L^p(X,\mu)$ конвергира равномерно и нека је $\mu(X) < \infty$. Показати да f_n конвергира у норми L^p. Да ли исто важи ако је $\mu(X) = \infty$?

д) Нека низ $f_n \in L^p(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ конвергира у L^p норми ка функцији $f \in L^p(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$. Да ли f_n конвергира и у L^∞ норми ка f?

ђ) Доказати комплетност простора $L^\infty(X,\mu)$.

2. Израчунати $\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{n^2} \frac{\sin\frac{x}{n}}{x(x^2+1+\frac{1}{n^2})(n!)^{\frac{1}{n}}} dx$.

3. а) Доказати $\int_0^1 x^a \log(b-x)dx = \frac{\log b}{a+1} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{nb^n(1+a+n)}$, $a > 0, b \geq 1$.

б) Израчунати $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(5+2n)}$.

1. б) Затвореност: нека низ $f_n \in L^p(X,\mu)$ конвергира у L^p-норми ка функцији f. Треба показати $f \in L^p(X,\mu)$. То следи из неједнакости: $||f||_p \leq ||f_n - f||_p + ||f_n||_p < \infty$.

в) Пошто је $L^p(X,\mu)$ комплетан, онда је низ f_n конвергентан у L^p норми. Дакле, постоји $f \in L^p(X,\mu)$ тако да је $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно и нека је $A_n = \{x \in X | |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Следи $\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{A_n} |f_n - f|^p d\mu \geq \epsilon^p \mu(A_n)$. Пуштањем лимеса кад $n \to \infty$ добијамо $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

г) Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Тада за довољно велико n важи $\sup|f_n - f| < \frac{\epsilon}{\mu(X)}$. Дакле, $\int_X |f_n - f|^p d\mu \leq \sup|f_n - f|^p \mu(X) < \epsilon$. Услов $\mu(X) < \infty$ је битан. Низ $f_n = \frac{\chi_{[0,n]}}{n^{\frac{1}{p}}}$ равномерно конвергира ка нула функцији, али $\int_0^\infty |f_n(x) - 0|^p dx = 1$.

д) Не мора. Поређати функције $\chi_{[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}$ у низ f_n.

2. Показати прво $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$. Дакле овај низ је ограничен неком константом $M > 0$. Пошто је $|\sin t| \leq t$, $t \geq 0$ следи

$$\left|\chi_{[0,n^2]} n^2 \frac{\sin\frac{x}{n}}{x(x^2+1+\frac{1}{n})(n!)^{\frac{1}{n}}}\right| = \frac{|\sin\frac{x}{n}|}{\frac{x}{n}} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{1+x^2+\frac{1}{n}} \leq \frac{M}{1+x^2}.$$

Функција $g(x) = \frac{M}{1+x^2}$ је интеграбилна на интервалу $[0,\infty)$ дакле можемо применити ТДК. Лимес и интеграл комутирају следи

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n^2\chi_{[0,n^2]}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x(x^2+1+\frac{1}{n})(n!)^{\frac{1}{n}}}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} n^2\frac{\sin\frac{x}{n}}{x(x^2+1+\frac{1}{n})(n!)^{\frac{1}{n}}}dx = \int_0^\infty \frac{e}{1+x^2}dx = \frac{e\pi}{2}.$$

3. а)

$$\int_0^1 x^a\log(b-x)dx = \int_0^1 x^a(\log b+\log(1-\frac{x}{b}))dx = \log b\int_0^1 x^a dx + \int_0^1 x^a\log(1-\frac{x}{b})dx$$

$$= \frac{\log b}{a+1} + \int_0^1 x^a\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{b^n}\frac{1}{n}dx = \frac{\log b}{a+1} - \int_0^1\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+a}}{b^n}\frac{1}{n}dx.$$

Пошто $g_n = \frac{x^{n+a}}{b^n}\frac{1}{n} \geq 0$ следи да је низ $f_n = g_1+\cdots+g_n$ растући низ, па можемо применити ТМК. Дакле лимес и сума комутирају па је израз једнак:

$$= \frac{\log b}{a+1} - \sum_{n=1}^\infty\int_0^1 \frac{x^{n+a}}{b^n}\frac{1}{n}dx = \frac{\log b}{a+1} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{b^n n}\int_0^1 x^{n+a}dx = \frac{\log b}{a+1} - \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{b^n n}\frac{1}{n+a+1}.$$

б) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(5+2n)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(\frac{5}{2}+n)}$. Искористити а) за $a=\frac{3}{2}$ и $b=1$. Дакле

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(5+2n)} = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\log(1-x)dx.$$

Решити прво неодређени интеграл $\int x^{\frac{3}{2}}\log(1-x)dx$ парцијалном интеграцијом $u = \log(1-x)$, $v = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Следи

$$\int x^{\frac{3}{2}}\log(1-x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\log(1-x) + \frac{2}{5}\int\frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1-x)}dx.$$

Сада уводимо смену $\sqrt{x}=t$ и следи

$$\int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1-x)}dx = 2\int\frac{t^6}{1-t^2}dt.$$

Даље је

$$\int\frac{t^6\pm 1}{1-t^2}dt = -\int\frac{1-t^6}{1-t^2}dt + \int\frac{1}{1-t^2}dt = -\int(1+t^2+t^4)dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}.$$

Коначан резултат је

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(5+2n)} = -\frac{2}{5}\log 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{25}$$