ТМИ- први колоквијум (Р смер)

22. 4. 2019.

1. а) Дефиниција мерљиве функције $f : X \to \mathbb{R}$.

б) Нека је f непрекидна функција и $X \subset \mathbb{R}$. Да ли је f Борел мерљива? Да ли је f Лебег мерљива? Да ли је f $\mathfrak{M}$-мерљива, где је $\mathfrak{M}$ произвољна σ-алгебра над $\mathbb{R}$?

в) Да ли постоји функција која је $\mathfrak{M}$-мерљива, за сваку σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{R}$?

2. а) Формулисати теорему о монотоној конвергенцији.

б) Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \operatorname{arctg}(n + \log_{2019} x)dx$.

3. Комплетирање мере. Пример.

4. а) Да ли постоје два дисјунктна Лебег немерљива скупа чија је унија интервал $[0, 1]$?

б) Да ли постоји пребројива унија дисјунктних Лебег немерљивих скупова чија је унија интервал $[0, 1]$?

в) Да ли је Виталијев скуп пребројив?

1. а) Нека је $\mathfrak{M}$ σ-алгебра над X. Тада је f $\mathfrak{M}$-мерљива ако за сваку константу $c \in \mathbb{R}$ важи

$$\{x \in X | f(x) > c\} \in \mathfrak{M}.$$

б) Пошто је f непрекидна онда је $\{x \in X|f(x) > c\}$ отворен скуп, па је Борелов скуп. Борелова σ-алгебра је садржана у Лебеговој, па је дати скуп и Лебегов. Дакле, f је и Борел мерљива и Лебег мерљива. Не мора свака непрекидна функција бити $\mathfrak{M}$-мерљива. На пример, $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ и $f(x) = x$. Ова функција јесте непрекидна али није мерљива зато што $\{x \in \mathbb{R}|f(x) > c\} = (c, +\infty) \notin \mathfrak{M}$.

в) Константна функција f је мерљива у односу на сваку σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{R}$. Наиме, $\{x \in X|f(x) > c\}$ је или празан скуп или цео скуп $\mathbb{R}$, а свака σ-алгебра над $\mathbb{R}$ садржи празан скуп и цео скуп $\mathbb{R}$.

2. б) За свако $n \in \mathbb{N}$, подинтегрална функција $f_n(x) = \operatorname{arctg}(n - \log_{2019} x)$ је (Лебег) мерљива, зато што је непрекидна (1. б)). Даље, функција $f_n + \frac{\pi}{2}$ је мерљива и ненегативна, за свако $n \in \mathbb{N}$. Пошто је $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ ($arctg$ је растућа функција) онда је и $f_{n+1}(x) + \frac{\pi}{2} > f_n(x) + \frac{\pi}{2}$ па можемо применити ТМК на низ $f_n + \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (\operatorname{arctg}(n - \log_{2019} x) + \frac{\pi}{2})dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg}(n - \log_{2019} x) + \frac{\pi}{2})dx = \pi \int_0^1 dx = \pi.$$

Дакле,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \operatorname{arctg}(n-\log_{2019}x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

3. Ако је $(X,\mathfrak{M},\mu)$ простор са мером онда дефинишемо

$$\overline{\mathfrak{M}}=\{E\subset\mathfrak{M}|\exists\, A,B\subset\mathfrak{M},\ \ A\subset E\subset B,\ \ \mu(B\backslash A)=0\},$$

$$\overline{\mu}:\overline{\mathfrak{M}}\to\mathbb{R},\ \ \ \overline{\mu}(E)=\mu(A).$$

Тада је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра и $\overline{\mu}$ добро дефинисана, комплетна мера.

4. а) Да. $[0,1]=V\cup V^c$, где је $V\subset[0,1]$ произвољан Виталијев скуп.

б) Да. Поделимо интервал $[0,1]$ на класе еквиваленције као у конструкцији Виталијевог скупа. Свака класа $[x]$ има пребројиво много чланова. Поређамо их у низ. Из сваке класе узмемо првог члана и формирамо Виталијев скуп V_1. И тако за свако $n\in\mathbb{N}$: из сваке класе узмемо n-тог члана и формирамо Виталијев скуп V_n. Тада је $[0,1]=\cup_{n=1}^{\infty}V_n$.
2. начин: $[0,1]=(\{0\}\cup[\frac{1}{2},1])\cup\cup_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$. Нека су $V_n\subset I_n$ Виталијеви скупови (конструисани избором представника из сваке класе еквиваленције на I_n). Скупови V_n нису мерљиви, а пошто I_n јесу мерљиви онда ни скупови $I_n\backslash V_n$ нису мерљиви (да је $I_n\backslash V_n$ мерљив, онда је $V_n=I_n\backslash(I_n\backslash V_n)$ мерљив). Тада је $[0,1]=\cup_{n=1}^{\infty}(V_n\cup(I_n\backslash V_n))$.

в) Не. Сваки пребројив скуп је Лебег мерљив (као пребројива унија тачака, а тачке су Лебег мерљиви скупови).
2. начин: Када би био пребројив, онда би на основу б) и интервал $[0,1]$ био пребројив (као пребројива унија пребројивих скупова V_n).