Домаћи задатак

Математика IV

21. март 2019.

1. Лапласовом трансформацијом решити Кошијев проблем:
$y''' + y' = e^t$, $y(0) = y'(0) = y''(0)$.

2. Решити систем интегралних једначина:
$$\varphi_1 = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt - \int_0^x \varphi_2(t)dt,$$
$$\varphi_2 = 4x - \int_0^x \varphi_1(t)dt + 4\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt.$$

3. Решити интегродиференцијалну једначину:
$$\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-t)\varphi'(t)dt - \int_0^x \varphi(t)dt = x,\ \varphi(0) = -1.$$

4. Израчунати $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt$, $x \geq 0$.

5. Израчунати $I(p) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{x+1}$.

6. Израчунати $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos(2n\pi x)dx$.

7. Уз образложење поступка показати да функција $f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\cos x dx$ задовољава диференцијалну једначину $\alpha f'(\alpha) = (1-2\alpha^2)f(\alpha)$.

8. Израчунати $\int_0^1 x^y \ln^a(x)dx$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

9. Испитати равномерну конвергенцију параметарских интеграла:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$, $0 < \beta_0 \leq \beta < \infty$, $\alpha = const > 0$,

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Доказати да функција $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{1+y^2}$ задовољава диференцијалну једначину $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.