Geometrija 3, zadaci po kojima se drže vežbe

Krive

1. Skicirati i parametrizovati sledeće krive:
prava, krive drugog reda, lančanica, traktrisa, cikloide (epicikloide i hipocikloide), Arhimedova i logaritamska spirala, kružni i konusni heliks, Vivijanijeva kriva.

2. Ispitati regularnost i ekvivalentnost sledećih krivih:

(a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\pi, \pi)$, $\quad \beta(u) = (\cos u^3, \sin u^3)$, $u \in (-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi})$;

(b) $\alpha(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad \beta(u) = (u^4, u^2)$, $u \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha(t) = (\cos t + \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}), \sin t)$, $t \in (0, \pi)$, $\quad \beta(u) = (u - \operatorname{th} u, \frac{1}{\operatorname{ch} u})$, $u \in \mathbb{R}$.

3. Dokazati da je ugao između vektora položaja i tangente logaritamske spirale $\rho = ca^{\theta}$ $(a > 0,\ c > 0)$ konstantan.

4. Dokazati da je dužina odsečka tangentne linije astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, određenog koordinatnim osama konstantna.

5. Data je regularna ravanska kriva α i tačke P i Q van nje. Neka je M_0 tačka krive u kojoj zbir rastojanja $PM + QM$, $M \in \alpha$, dostiže minimum. Dokazati da je simetrala ugla $\measuredangle PM_0Q$ normalna na tangentu krive α u tački M_0.

6. Izračunati dužinu sledećih krivih:

(a) $y = \ln \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{3})$;

(b) $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $t \in (0, 2)$;

(c) $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$, $t \in (0, 2\pi)$;

(d) $\rho = a(1 + \cos\theta)$; (kardioida)

(e) $\rho = a\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$. (Arhimedova spirala)

7. Odrediti prirodnu parametrizaciju krivih:

(a) kruga $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$;

(b) kružnog heliksa $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;

(c) lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $a > 0$;

(d) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$;

(e) parabole $y = x^2$.

8. (a) Odrediti Freneov reper, krivinu i torziju kružnog heliksa $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$.

(b) Odrediti Freneov reper i označenu krivinu lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $a > 0$, a zatim jednačinu oskulatornog kruga u tački $(0, a)$.

9. (a) Dokazati da postoji jedinstveno vektorsko polje $X(t)$ (Darbuovo vektorsko polje) duž krive $\alpha = \alpha(t)$ parametrizovane proizvoljnim parametrom, za koje važi: $T' = X \times T$, $N' = X \times N$, $B' = X \times B$.

(b) Odrediti Darbuov vektor kružnog heliksa.

10. Dokazati da za prirodno parametrizovanu krivu važi:

(a) $[B', B'', B'''] = \tau^5 (\frac{\kappa}{\tau})'$, $\kappa, \tau \neq 0$;

(b) $[T', T'', T'''] = \kappa^5 (\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

11. Odrediti krivu na fiksiranom rastojanju d od kružnog heliksa duž njegovih:

(a) tangentnih linija; (b) normalnih linija; (c) binormalnih linija.

12. (a) Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Ako je $\kappa(s) \equiv 0$, tada je α deo prave. Dokazati.

(b) Ako sve tangentne linije regularne parametrizovane krive sadrže fiksnu tačku, tada slika te krive pripada nekoj pravoj. Dokazati.

13. Neka je $\alpha(t)$, $t \in I$, regularna kriva. Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}^3$ tako da je $(\alpha(t) - a) \perp T(t)$ za svako $t \in I$. Dokazati da je $\alpha(t)$ sferna kriva.

14. Sferna kriva konstantne krivine je deo kruga. Dokazati.

15. Neka je α prirodno parametrizovana kriva koja pripada sferi $x^2+y^2+z^2=R^2$.

(a) Izraziti vektor položaja tačaka krive α u Freneovoj bazi krive α.

(b) Dokazati da za krivinu i torziju krive α važi $\tau^2(R^2-\frac{1}{\kappa^2})=(\frac{\kappa'}{\kappa^2})^2$.

16. Neka je $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $0\in I$, $\kappa\neq 0$, prirodno parametrizovana kriva. Dokazati da je $[X-\alpha(0),\alpha'(0),\alpha''(0)]\equiv 0$, $X=(x,y,z)$, jednačina oskulatorne ravni u tački $\alpha(0)$.

17. Dokazati da je kriva $\alpha(t)=(\frac{1+t}{1-t},\frac{1}{1-t^2},\frac{1}{1+t})$, $t\in(-1,1)$ ravanska i odrediti ravan u kojoj leži.

18. Dokazati da se sve oskulatorne ravni neke regularne krive sa krivinom različitom od nule seku u jednoj tački akko je ta kriva ravanska.

19. Neka je $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ regularna kriva parametrizovana dužinom luka s, krivine $\kappa\neq 0$ i $0\in I$.

(a) Dokazati da za sve tačke s u dovoljno maloj okolini tačke $0\in I$ važi

$$\alpha(s)=\left(s-\frac{\kappa_0^2}{6}s^3+o(s^3)\right)T(0)+\left(\frac{\kappa_0}{2}s^2+\frac{\kappa_0'}{6}s^3+o(s^3)\right)N(0)+\left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3+o(s^3)\right)B(0),$$

gde je $\alpha(0)=(0,0,0)$, $\kappa_0=\kappa(0)$, $\kappa_0'=\kappa'(0)$, $\tau_0=\tau(0)$.

(b) Analizirati lokalni izgled krive pomoću projekcija na oskulatornu, normalnu i rektifikacionu ravan.

20. Neka je ravanska kriva α zadana polarnom parametrizacijom $\rho=\rho(\theta)$.

(a) Dokazati da je dužina krive α na segmentu $[a,b]$ data formulom $L(\alpha)=\int\limits_a^b\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}d\theta$.

(b) Dokazati da je označena krivina krive α data sa $\kappa_z(\theta)=\frac{2(\rho')^2-\rho\rho''+\rho^2}{((\rho')^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Odrediti krivinu Arhimedove spirale $\rho=a\theta$, $a>0$.

21. Odrediti parametrizaciju ravanske krive (do na direktnu izometrijsku transformaciju ravni) čija je data označena krivina u zavisnosti od prirodnog parametra s i dokazati da je u pitanju naznačena kriva:

(a) $\kappa_z(s)=\frac{1}{as+b}$ $(a\neq 0)$ - logaritamska spirala;

(b) $\kappa_z(s)=\frac{1}{1+s^2}$ - lančanica;

22. Data je kriva $\alpha(t)=(\sqrt{2}\cos t+\sin t+1,-\sqrt{2}\sin t+2,-\sqrt{2}\cos t+\sin t+3)$. Izračunati krivinu i torziju date krive, a zatim detaljno opisati krivu.

23. Uopštena zavojna linija (heliks) je prostorna kriva čiji tangentni vektor zaklapa konstantan ugao $\theta\in(0,\pi)$, $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, sa fiksiranim nenula vektorom $v\in\mathbb{E}^3$. Uopšteni heliks leži na cilindru čije su izvodnice određene pravcem v i tačkama krive. Dokazati da je kriva uopštena zavojna linija akko važi jedan od uslova:

(a) normale su normalne na v;

(b) binormale grade konstantan ugao sa v;

(c) $\frac{\kappa}{\tau}=\text{const}$.

24. Data je kriva $\gamma(t)=(at,bt^2,ct^3)$, $a,b,c\neq 0$.

(a) Dokazati da je γ uopšteni heliks akko je $3ac=\pm 2b^2$.

(b) Ako je $3ac=2b^2$, odrediti fiksiran vektor v i ugao θ između vektora v i tangente krive γ u proizvoljnoj tački.

25. Evoluta regularne prirodno parametrizovane krive $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ je kriva $\beta: I\to\mathbb{R}^2$ definisana u tačkama gde je $\kappa(s)\neq 0$, data sa $\beta(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, a njena involuta je kriva $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ data sa $\gamma(s)=\alpha(s)+(c-s)T(s)$, $c\in I$.

(a) Ispitati regularnost i odrediti označenu krivinu, krivinu i Freneov reper krivih β i γ preko odgovarajućih veličina krive α.

(b) Dokazati da je evoluta krive α geometrijsko mesto centara oskulatornih krugova krive α, a involuta krive α geometrijsko mesto tačaka koje opisuje fiksirana tačka prave koja se "kotrlja" po krivoj α.

(c) Dokazati da je involuta od evolute date krive ponovo polazna kriva.

(d) Odrediti evolutu elipse i traktrise.

(e) Odrediti involutu kruga i cikloide.

Površi

1. Neka je $\alpha(u)$ regularna kriva i $\beta(u) \neq \overrightarrow{0}$ vektorsko polje duž krive α. Elementarna površ definisana parametrizacijom $f(u,v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ naziva se linijska površ.

(a) Odrediti pod kojim uslovima je površ f regularna.

(b) Primeri pravolinijskih površi: ravan, helikoid, Mebijusova traka, jednograni hiperboloid, hiperbolički paraboloid, cilindrične površi, konusne površi.

2. Neka je $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a < t < b$, regularna $1-1$ kriva klase C^k i $f > 0$.

(a) Dokazati da je površ $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$ dobijena rotacijom krive α oko $z-$ose.

(b) Dokazati da je r regularna elementarna površ.

(c) Odrediti koordinatne krive (linije) površi r i ugao koje one zaklapaju.

(d) Odrediti odgovarajuću parametrizaciju ako kriva α rotira oko $x-$ose, odnosno $y-$ose.

(e) Primeri rotacionih površi: sfera, katenoid, torus, kružni elipsoid, kružni jednograni hiperboloid, kružni dvograni hiperboloid, kružni paraboloid, pseudosfera, kružni cilindar, kružni konus.

3. Dokazati da je skup rešenja jednačine $f(x,y,z) = x^5 + x^3 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ regularna površ i odrediti njenu tangentnu ravan u proizvoljnoj tački (x_0, y_0, z_0) površi.

4. Dokazati da zapremina tetraedra koji se dobija u preseku koordinatnih osa i tangentne ravni površi $xyz = a^3$ ne zavisi od izbora tačke površi u kojoj se razmatra tangentna ravan.

5. Data je parametrizacija Mebijusove trake $r(u,v) = \left((1 + u\sin\frac{v}{2})\cos v, (1 + u\sin\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2}\right)$, $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$. Izračunati normalno vektorsko polje $n(0,v)$ duž centralne kružnice $u = 0$ Mebijusove trake, a zatim dokazati da je $\lim\limits_{v\to-\pi} r(0,v) = \lim\limits_{v\to\pi} r(0,v)$ i $\lim\limits_{v\to-\pi} n(0,v) = -\lim\limits_{v\to\pi} n(0,v)$.

6. Dat je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Odrediti koeficijente prve fundamentalne forme, vektore brzine koordinatnih linija i ugao između njih ukoliko je konus lokalno parametrizovan kao:

(a) grafik funkcije;

(b) rotaciona površ.

7. Dat je jednograni hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Parametrizovati ovu površ kao rotacionu i odrediti koeficijente prve fundamentalne forme.

(b) Dokazati da na jednogranom hiperboloidu postoje dve familije mimoilaznih pravih tako da svaka tačka hiperboloida pripada tačno jednoj pravoj iz svake familije.

(c) Reparametrizovati hiperboloid kao linijsku površ.

8. Neka je $\mathcal{U} = \{(\theta,\varphi) | \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \varphi \in (0, 2\pi)\}$ i $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ parametrizacija dela sfere $\mathbb{S}^2$.

(a) Dokazati da su krive na sferi koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima date jednačinom $\alpha(\theta) = f(\theta, \pm \operatorname{tg}\alpha \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + C)$, $C \in \mathbb{R}$. Ove krive nazivaju se loksodrome.

(b) Izračunati dužinu loksodrome koja se dobija za $C = 0$.

(c) Izračunati površinu dela jedinične sfere između dva meridijana i dve paralele.

9. Dat je kružni parabolid $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$. Odrediti ugao između krivih $\alpha(u) = r(u, u+1)$ i $\beta(u) = r(u, 3-u)$ na paraboloidu.

10. Izračunati površinu torusa koji se dobija rotacijom kruga $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ $(a > b)$ oko $z-$ose.

11. Dokazati da na konusu $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$, dve familije krivih $\alpha(v) = f(Ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}v}, v)$ i $\beta(v) = f(Ce^{-\frac{1}{\sqrt{2}}v}, v)$, $C = \text{const} > 0$, polove uglove između koordinatnih linija.

12. (a) Dokazati da su lokalne koordinate na sferi dobijene iz stereografske projekcije konformne.

(b) Pokazati da su loksodrome na sferi slike odgovarajućih logaritamskih spirala iz karte pri stereografskoj projekciji.

13. Odrediti parametrizaciju loksodroma na katenoidu $r(u,v) = (\operatorname{ch} u\cos v, \operatorname{ch} u\sin v, u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, koje zaklapaju konstantan ugao α sa meridijanima.

14. Neka je druga fundamentalna forma površi identički jednaka nuli. Dokazati da je površ deo ravni.

15. Odrediti Gausovo preslikavanje i sliku sledećih površi na jediničnoj sferi:

(a) sfere poluprečnika R; (b) cilindra poluprečnika R; (c) katenoida.

16. Neka je $\mathcal{D}_r = \{(x, y, x^2 + y^2) | x^2 + y^2 < r^2\}$ deo paraboloida $z = x^2 + y^2$, $\mathcal{P}(r)$ površina površi $\mathcal{D}_r$, a $\mathcal{G}(r)$ površina njene slike na sferi $\mathbb{S}^2$ pri Gausovom preslikavanju. Dokazati da je $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathcal{G}(r)}{\mathcal{P}(r)}$ jednak Gausovoj krivini paraboloida u tački $(0, 0, 0)$.

17. Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu jednogranog hiperboloida $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

18. Neka je $\alpha = \alpha(s)$, $s \in I$, prirodno parametrizovana kriva čija je krivina $\kappa \neq 0$ i torzija $\tau \neq 0$. Definišimo linijsku površ parametrizacijom $r(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$, $s \in I$, $v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pri čemu je $B = B(s)$ binormalni vektor krive α.

(a) Ispitati regularnost date površi.

(b) Izračunati geodezijsku i normalnu krivinu koordinatnih linija date površi.

(c) Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu date površi.

19. Odrediti geodezijsku i normalnu krivinu koordinatnih linija:

(a) cilindra $x^2 + y^2 = 9$;

(b) helikoida $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$.

20. (a) Izračunati normalnu krivinu proizvoljne sferne krive koja leži na sferi poluprečnika R.

(b) Dokazati da za krivinu κ prirodno parametrizovane krive α na jediničnoj sferi poluprečnika R važi nejednakost $\kappa \geqslant \dfrac{1}{R}$.

21. Dokazati da su koordinatne linije površi za koju važi $f \neq 0$ asimptotske linije akko je $e = 0 = g$.

22. (a) Dokazati da se tangentna ravan površi duž asimptotske linije na površi poklapa sa oskulatornom ravni krive.

(b) Dokazati da se tangentna ravan površi duž geodezijske linije na površi poklapa sa rektifikacionom ravni krive.

23. Neka je $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ prirodno parametrizovana kriva na površi $r = r(u, v)$. Posmatrajući $n(s) = n(u(s), v(s))$ duž krive α, vektorska polja $[T, S, n]$ čine ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ duž krive γ (tzv. Darbuova baza). Geodezijska torzija krive γ je $\tau_g = \mathrm{II}(T, S)$. Dokazati formule analogne Frene-Sereovim formulama:

(a) $T' = \kappa_n n + \kappa_g S$;

(b) $S' = -\kappa_g T + \tau_g n$;

(c) $n' = -\kappa_n T - \tau_g S$.

24. Odrediti geodezijske linije kružnog cilindra.

25. Ako je $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ prirodno parametrizovana geodezijska linija na površi $f = f(u, v)$ za koju važi $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$, dokazati da je $\sqrt{G} \cos\theta = C = \mathrm{const}$ pri čemu je θ ugao između geodezijske linije i v-parametarske krive $u = \mathrm{const}$.

26. Neka je $f = f(u, v)$ regularna površ na kojoj su u i v-parametarske krive ortogonalne i koeficijenti prve osnovne forme zavise samo od parametra u. Tada se geodezijske linije uvek mogu naći integracijom, tj. tada važi:

(a) u-parametarske krive ($v = \mathrm{const}$) su geodezijske linije;

(b) v-parametarske krive ($u = \mathrm{const} = u_0$) su geodezijske linije akko je $G_u(u_0) = 0$;

(c) kriva oblika $\alpha(u) = r(u, v(u))$ je geodezijska linija akko je $v = \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}} du$, $C = \mathrm{const}$.

27. Dokazati da je kriva $\alpha(t) = (t \cos \ln \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, t \sin \ln \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \ln \frac{t}{\sqrt{t^2+1}})$, $t \in \mathbb{R}$, geodezijska linija na helikoidu $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$.

28. (a) Svaki meridijan rotacione površi je geodezijska linija. Dokazati.

(b) Paralela rotacione površi je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele. Dokazati.

29. (a) Dokazati da su koordinatne linije površi bez umbiličkih tačaka glavne linije (linije krivine) akko je $F = f = 0$.

(b) Dokazati da su meridijani i paralele rotacionih površi glavne linije.

30. Odrediti glavne pravce, asimptotske pravce, glavne linije (linije krivine) i asimptotske linije Eneperove površi $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

31. Parametrizovati sledeće površi tako da važi $F = f = 0$:

(a) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, $a > 0$;

(b) sedlo $z = xy$.

32. Odrediti eliptičke, paraboličke, hiperboličke, planarne tačke na torusu.

33. (a) Odrediti broj asimptotskih pravaca površi u zavisnosti od tipa tačke površi (eliptička, hiperbolička, parabolička, planarna).

(b) Dokazati da su asimptotski pravci u hiperboličkim tačkama površi simetrični u odnosu na glavne pravce.

34. Odrediti parametrizaciju krivih u normalnom sečenju hiperboličkog paraboloida $z = x^2 - y^2$ u tački $(0, 0, 0)$ i pravcu tangentng vektora w i izračunati njenu krivinu, a zatim proveriti da li se dobijena krivina poklapa sa rezultatom koji se dobija koristeći Ojlerovu ili Menijeovu teoremu, ukoliko vektor w:

(a) polovi jedan od uglova između glavnih pravaca;

(b) zaklapa ugao $\frac{\pi}{6}$ sa nekim glavnim pravcem.

35. Opisati skup tačaka tangentne ravni na rastojanju $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$ od fiksirane tačke regularne površi u kojoj se posmatra tangentna ravan, gde je κ_n normalna krivina duž odgovarajućeg pravca.

36. Dokazati da ne postoji elementarna površ za koju važi:

(a) $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$;

(b) $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$, $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$.

37. (a) Odrediti formule normalne i centralne projekcije (iz koordinatnog početka) cilindra $x^2+y^2 = 1$ na sferu $x^2+y^2+z^2 = 1$.

(b) Dokazati da normalna projekcija nije izometrija, ali čuva površine.

38. Dokazati da među sledećim površima nikoje dve nisu lokalno izometrične (kako god da su parametrizovane): sfera, cilindar, helikoid, paraboloid.

39. Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Tangentna površ krive α je linijska površ data parametrizacijom $f(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$, $s \in I$, $v > 0$.

(a) Dokazati da je površ f lokalno izometrična delu ravni.

(b) Odrediti eksplicitne formule ove izometrije ukoliko je kriva kružni heliks $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

40. (a) Dokazati da su helikoid $r(u, v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, au)$, $(u, v) \in \mathbb{R}\times(0, 2\pi)$, i katenoid $f(z, w) = (z \cos w, z \sin w, aw)$, $(z, w) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, $a > 0$, lokalno izometrične površi.

(b) Reparametrizovati dati helikoid tako da parametrizacija bude konformna, a zatim odrediti jednačine krivih na helikoidu koje polove uglove između koordinatnih linija.

41. (a) Dokazati da je cindrična površ $r(u, v) = (u, f(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, izometrična (delu) ravni.

(b) Odrediti eksplicitne formule izometrije između cilindrične površi $r(u, v) = (u - \sin u, 1 - \cos u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$, i dela ravni.

42. (a) Dokazati da je konus $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ lokalno izometričan ravni.

(b) Odrediti geodezijske linije na datom konusu.

(c) Izračunati rastojanje između tačaka $A(0, 1, \sqrt{3})$ i $B(0, -1, \sqrt{3})$ na datom konusu.

Primeri zadataka za kolokvijum i ispit

1. Data je kriva parametrizacijom $\alpha(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Dokazati da je data kriva epicikloida koja se dobija kao trag fiksirane tačke kruga poluprečnika 1 koji se kotrlja po krugu poluprečnika 2 koji je fiksiran i ima centar u koordinatnom početku (t je ugao između $x-$ose i vektora položaja centra manjeg kruga).

(b) Ispitati regularnost date krive i skicirati je.

(c) Dokazati da kriva zadovoljava sledeće jednačine u polarnim i Dekartovim koordinatama: $(\frac{\rho}{2})^{\frac{2}{3}} = (\sin\frac{\theta}{2})^{\frac{2}{3}} + (\cos\frac{\theta}{2})^{\frac{2}{3}}$, $\quad (x^2+y^2-4)^3 = 108y^2$.

(d) Dokazati da je kriva α zatvorena i izračunati njenu dužinu.

(e) Odrediti funkciju dužine luka, označenu i neoznačenu krivinu (κ_z i κ) date krive za $t \in (0,\pi)$, uzimajući za početnu tačku $(0,4)$.

(f) Odrediti ugao φ koji tangenta krive zaklapa sa $x-$osom i proveriti da li važi $\kappa_z = \frac{d\varphi}{ds}$, $s-$prirodni parametar.

(g) Odrediti parametrizaciju evolute date krive i skicirati je. Koja je kriva u pitanju?

2. Neka je α prostorna kriva koja predstavlja skup rešenja jednačine u cilindričnim koordinatama $z = \rho = e^{2\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Odrediti parametrizaciju krive α, dokazati da kriva pripada konusu $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i skicirati je. Koja kriva je projekcija krive α na $xy-$ravan?

(b) Odrediti prirodnu parametrizaciju krive uzimajući za početnu tačku vrh konusa (obrazložiti zašto je to moguće).

(c) Odrediti Freneov reper, krivinu i torziju krive.

(d) Napisati Frene-Sereove formule u tački $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$.

(e) Odrediti jednačine oskulatorne, rektifikacione i normalne ravni krive u tački $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$.

(f) Dokazati da je data kriva uopšteni heliks, odrediti fiksirani pravac v i uglove koje vektori Freneove baze zaklapaju sa vektorom v.

(g) Odrediti vektore Darbuove baze i geodezijsku i normalnu krivinu date krive na konusu $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Dat je parabolički cilindar svojom jednačinom u Dekartovim koordinatama $x = y^2$.

(a) Odrediti neku parametrizaciju date površi, ispitati njenu regularnost i skicirati je.

(b) Odrediti Gausovo preslikavanje i sliku na jediničnoj sferi date površi.

(c) Dokazati da je data površ lokalno izometrična ravni i odrediti eksplicitne formule izometrije.

(d) Odrediti sve geodezijske linije na datoj površi i izračunati najkraće rastojanje između tačaka $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$ (po površi).

(e) Odrediti glavne krivine i glavne pravce date površi, kao i Gausovu i srednju krivinu. Koji je tip tačaka na površi?

(f) Odrediti krivu u normalnom sečenju date površi u tački $(0,0,0)$ i u pravcu vektora w tangentne ravni koji polovi jedan od uglova između glavnih pravaca, kao i njenu krivinu.

(g) Proveriti da li se dobijena krivina poklapa sa rezultatom koji se dobija koristeći Ojlerovu ili Menijeovu teoremu.

4. Data je elementarna površ $r(u,v) = (\operatorname{ch} u(\cos v + \sin v), \operatorname{ch} u(\sin v - \cos v), \sqrt{2}u)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$.

(a) Dokazati da je data površ katenoid, dobijen kao slika standardnog katenoida kompozicijom homotetije sa centrom u koordinatnom početku i rotacije oko $z-$ose.

(b) Odrediti Gausovo preslikavanje i sliku na jediničnoj sferi date površi.

(c) Odrediti jednačinu loksodroma na datoj površi koje zaklapaju ugao $\frac{\pi}{3}$ sa meridijanima.

(d) Odrediti geodezijsku i normalnu krivinu koordinatnih linija date površi. Koje su među njima geodezijske?

(e) Odrediti glavne krivine, Gausovu i srednju krivinu u tački $(\sqrt{2},0,0)$.

(f) Odrediti glavne i asimptotske pravce tangentne ravni u tački $(\sqrt{2},0,0)$, kao i normalnu krivinu površi duž pravaca tangentne ravni koji zaklapaju orijentisani ugao $\frac{\pi}{3}$ sa glavnim pravcima.

(g) Odrediti glavne i asimptotske linije na datoj površi. Koje od njih sadrže tačku $(\sqrt{2},0,0)$?

(h) Odrediti konstante a i b tako da je data površ lokalno izometrična helikoidu $f(u,v) = (au\cos v, au\sin v, bv)$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.