Испит

Математика IIIб

23. јануар 2019.

1. а) Доказати да је ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ конвергентан за $x \geq 0$, а дивергентан за $x < 0$.
б) Доказати да је функција $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ непрекидна на $[0, \infty)$, а диференцијабилна на $(0, \infty)$.
в) Одредити интервал конвергенције и сумирати степени ред $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n^2-1)}$.
2. Развити функцију

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

у косинусни ред и наћи суму реда $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$.
3. Методом варијације констаната решити следећи систем:

$$y' = y + z - x^2 + x - 2,$$
$$z' = -2y + 4z + 2x^2 - 4x - 7.$$

4. Одредити Гринову функцију граничног проблема $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.
5. Решити Кошијев проблем квазилинеарне ПДЈ: $x\frac{\partial u}{\partial x} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (y+u)\frac{\partial u}{\partial z} = y + z$, $y + z + u = 2$, $x = 1$.