

# МАТЕМАТИКА З Ц

## Други колоквијум

18. јануар 2019.

### Задатак 1. [25 поена]

Решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} x' + x - y = 1 + \sin t \\ y' - x' + y = t - \sin t \end{cases}$$

са почетним условима  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  по непознатим функцијама  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Задатак 2. [25 поена]

Решити интегро - диференцијалну једначину

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) - \int_0^x (x-t)y''(t) dt - 2 \int_0^x \sin(x-t)y'(t) dt = \cos x$$

са почетним условима  $y(0) = y'(0) = 0$ .

### Задатак 3. [25 поена]

Решити диференцијалну једначину

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Да ли постоји интегрална крива решења ове диференцијалне једначине која је неограђена у некој околини тачке  $x = 0$ ?

### Задатак 4. [25 поена]

(а) Доказати да за свако  $x \in \mathbb{R}$  важи неједнакост

$$e^x \geq 1 + x.$$

Када у овој неједнакости важи једнакост?

(б) Решити диференцијалну једначину

$$e^{y'} \cdot (1 + y + y^2) = \frac{3}{4} \cdot (1 + y').$$

**Напомена.** Време за израду задатака износи 180 минута. Максимални број поена је 100. Решења задатака детаљно образложити. За тврђења која буду употребљавана током израде колоквијума написати, уз прецизно позивање на њих у деловима када буду употребљавана, како гласе.