

Задаци, Математика III

Зора Голубовић

Октобар, 2018

- Доказати да низ $f_n(x) = nx^n(1-x)$ у свакој тачки сегмента $[0, 1]$ конвергира ка 0. Да ли је та конвергенција равномерна? Доказати да је низ равномерно конвергентан на сегменту $[0, a]$, где је $0 < a < 1$.
- Одредити област апсолутне и условне конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$.
- Испитати равномерну конвергенцију редова на указаним скуповима:
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$, $0 \leq x < \infty$,
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $-1 \leq x \leq 1$.
- Израчунати $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx} \right) dx$.
- Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} (n x e^{-nx} - (n-1) x e^{-(n-1)x})$ неравномерно конвергентан на $[0, 1]$, али да је сума тог реда непрекидна функција на $[0, 1]$.
- Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0, 1]$, а да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.
- Одредити област конвергенције степених редова:
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n^n}$,
 - $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.
- Доказати да је функција $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ решење диференцијалне једначине $xy'' + y' + xy = 0$.
- Доказати да је функција $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.
- Израчунати суму $s(x)$ степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$, затим користећи

добијени резултат одредити суму бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$.

11. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π , одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

12. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:

1. у Фуријеов синусни ред,

2. у Фуријеов косинусни ред,

3. Наћи Фуријеов ред функције $x \rightarrow x^2$, $0 < x < 2$ интегралњем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

13. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.

14. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$