Задаци, Математика III

Зора Голубовић

Октобар, 2018

1 час, Нумерички редови

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n.

$S_k = \sum\limits_{i=0}^{k}$ је парцијална сума реда. Кажемо да ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума.

Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1. Нека је $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_{n+1} = cos a_n$, $n \geq 0$. Да ли ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Општи члан реда не тежи нули кад $n \to \infty$, па ред дивергира.

2. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Кошијевим критеријумом се показује.

3. Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира.

Сума реда је $\frac{1}{1-q}$.

(Кошијев став) Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

4. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha \geq 1$.

Посматрани ред је еквиконвергентан геометријском реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^n$.

5. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

$\frac{5}{7}$.

(Даламберов тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
Конвергира по Даламберу.
7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.
Конвергира по Даламберу.
8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.
Дивергира по Даламберу.
(Кошијев тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.
9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.
Конвергира по Кошију.
10. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.
Конвергира по Кошију.
11. Кошијевим критеријумом доказати конвергенцију или дивергенцију редова:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.
Конвергира, дивергира.
(Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geq 1$ и $a_n = f(n)$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.
12. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$.
Конвергира по Кошијевом интегралном критеријуму.
13. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\alpha}}$.
Конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$ (Кошијев интегрални критеријум).

2 час, Нумерички редови

(Раабеов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$. За $l > 1$ ред конвергира, а за $l < 1$ ред дивергира.
(Гаусов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} =$

$\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$. За $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ред конвергира, а за $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu < 1$ ред дивергира.

1. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1} e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1} e^{(n+p)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, конвергира по Раабеу за $p > \frac{3}{2}$.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{p}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{q+1} = (1-\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n}))(1+\frac{q+1}{n}+o(\frac{1}{n})) = 1+\frac{q+1-p}{n}+o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q > p$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}]^p \frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+\frac{p}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q + \frac{p}{2} > 1$.

4. Испитати конвергенцију хипергеометријског реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$, где су $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$.

За $\gamma > \alpha + \beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma \leq \alpha + \beta$ (Гаус).

(Лајбницов тест) Ако је $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда алтернативни ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$.

Конвергира по Лајбницу.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+k^2}$.

Конвергира по Лајбницу.

(Абелов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и низ b_n је монотоно ограничен.

(Дирихлеов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотоно тежи нули почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је ограничен.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Конвергира као сума таквих редова (Лајбниц и Дирихле).

8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Конвергира (Лајбниц и Абел).

9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$.

Конвергира (Дирихле).
Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
10. Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, $a_n \geq 0$, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$.
Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1.
11. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ конвергира.
Применом аритметичко-геометријске неједнакости.

3 час, Нумерички редови

1. Израчунати суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.
$\frac{1}{2c(c+1)}$.
2. Одредити парцијалну суму, суму и остатак реда $\sum\limits_{n=a}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$.
$S_n = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{n+1}$, $s = \frac{\pi}{4}$ $r_n = \arctan \frac{1}{n+1}$.
3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$.
Конвергира по Кошијевом критеријуму.
4. Доказати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
5. Испитати конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{!(n+1)}{(2n)!}$.
Коши, Даламбер, Раабе и поредбени тест.
6. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.
7. Наћи вредности следећих бесконачних производа: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$, $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.
$\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.
8. Установљавајући конвергенцију одговарајућег реда, доказати да је: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$.
Даламбер и Коши.
9. Испитати за које је вредности параметра α ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ апсолутно конвергентан, а за које је условно конвергентан.

За $\alpha \in (0,1]$ ред условно конвергира, а за $\alpha > 1$ ред конвергира апсолутно.
10. Испитати апсолутну конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \arctan\frac{\sin n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Оба апсолутно конвергирају.

4 час, Функционални низови и редови

1. Одредити област конвергенције функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n 2^{nx}$.
Ред је конвергентан за свако $x > 0$.
2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$.
Ред је апсолутно конвергентан ако је $0 \leq y \leq 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$. Ако је $x = -1$ и $0 \leq y \leq 1$, ред је условно конвергентан.
3. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима:
$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ на $[-1,1]$ и $f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на $[0,\infty)$.
Оба низа су равномерно конвергентна на датим скуповима.
4. Доказати да је низ функција $f_n(x) = \frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}$ равномерно конвергентан ка функцији $f(x) = 1$ на сегменту $[0,1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?
Низ није равномерно конвергентан функцији f на $\mathbb{R}$.
Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A акко $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n,p \in \mathbb{N})(n > n_0 \implies |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon)$.
5. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$ на скуповима $(0,\infty)$ и (δ,∞), $\delta > 0$.
Неравномерно конвергентан, равномерно конвергентан.
6. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на скупу E, где је
1. $f_n(x) = e^{-n^2x^2}\sin nx$, $E = \mathbb{R}$,
2. $f_n(x) = \arctan\frac{x^3}{n\sqrt{n}}$, $E = [0,\infty)$.
(Вајерштрасов критеријум) Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да
1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leq c_n$,

2. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

8. Доказати да је сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.
Вајерштрасовим критеријумом.

9. Користећи Вајерштрасов критеријум доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n^2 x \cos n\pi x}{n\sqrt{n}}$ конвергентан на $\mathbb{R}$ и да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2(n+1)}\right)$ конвергентан на $[0,2]$.

10. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x}{x+n^3} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$ на скуповима $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,\infty)$.
Равномерно конвергира на E_1 и неравномерно на E_2.

5 час, Функционални низови и редови

(Дирихлеов критеријум) Нека:

1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq K$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

1. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ на $\mathbb{R}$.
Дирихлеовим критеријумом.
(Абелов критеријум) Нека:

1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leq K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

2. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}(1+$

$\frac{x}{n})^n$ на $[0,1]$.
Абеловим критеријумом.
3. Наћи $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$.
Резутат: $\frac{\ln 2}{2}$.
4. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2 + \frac{1}{n})^n$.
Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи $\int\limits_a^b (\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b a_n(x)dx$.
5. Одредити суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затим користећи добијени резултат наћи суму бројног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.
Тражене суме су $\arctan x$ и $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.
Ако је свака од функција $a_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a,b]$.
6. Наћи суме редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.
$-\ln(1-x)$, $x + (1-x)\ln(1-x)$.
7. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0,1]$, а да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

6 час, Степени редови

Степени ред се унутар свог радијуса конвергенције може диференцирати и интегрисати члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни ред.
1. Одредити полупречник конвергенције R степеног реда

1. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,
2. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n} z^n$,
3. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} 5^n z^n$.

1. $R = 1$,
2. $R = \sqrt{2}$,
3. $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

2. Одредити област конвергенције степених редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.
$[0, 2)$, $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Испитати обичну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha} x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Написати разлагање функције $f(x) = \sin^3 x$ у степени ред по степенима x, а затим одредити област у којој важи добијени развој.
$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-9^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$.

5. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$.

6. Разложити у степени ред по степенима x функцију $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.
$f(x) = -\frac{1}{4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n + 1 + (-1)^{n+1}) x^n$.

7. Представити интеграл $\int\limits_0^1 x^{-x} dx$ у облику реда.
$\int\limits_0^1 x^{-x} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

8. Разложити Лапласов интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$ у степени ред по степенима $b > 0$, користећи чињеницу да је $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

7 час, Степени редови

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у

облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.
Нека је $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0,y_0,y_0'). Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y''=f(x,y,y')$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.
Тачка x_0 је регуларна тачка ДЈ ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка ДЈ ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0.
Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x-x_0|<R$, тада је свако решење ДЈ јединствена аналитичка функција у овој области.
1. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y'=x^2+e^y$, $y(0)=0$.
$y(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\dots$.
2. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y''-xy=0$ које се може приказати у облику степеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
$y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(2\cdot3)(5\cdot6)\cdots((3n-1)\cdot3n)}$.
3. Решити ДЈ $y''-x^2y=0$.
$y(x)=a_0+a_1x+a_0\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k}}{4\cdot3\cdot8\cdot7\cdots4k(4k-1)}+a_1\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{5\cdot4\cdot9\cdot8\cdots(4k+1)4k}$, $a_0,a_1\in\mathbb{R}$.
4. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику једначине $y''-xy'-2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
$y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}x^{2k+1}=xe^{\frac{x^2}{2}}$.
5. У области $|x|<1$ одредити опште решење ДЈ $(1-x^2)y''-6xy'-4y=0$.
$y(x)=a_0\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k}+\frac{a_1}{3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2k+3)x^{2k+1}$.
6. Представити степеним редом опште решење нехомогене ДЈ $y''+x^2y=1+x+x^2$.
$y(x)=a_0+a_1x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1-a_0}{12}x^4-\frac{a_1}{20}x^5-\frac{1}{60}x^{+}\dots$, $a_0,a_1\in\mathbb{R}$.
Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларном тачком ако су функције $(x-x_0)p_1(x)$ и $(x-x_0)^2p_2(x)$ аналитичке функције у тој тачки.
8. Испитати регуларност тачке $x=0$ за $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$.
$x=0$ је регуларно-сингуларна тачка.

8 час, Функционални низови и редови

Нека ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

$S = 3e^2$.

2. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

$S = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$.

3. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ решење диференцијалне једначине $xy'' + y' + xy = 0$.

4. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.

5. Дат је функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a

1. функционални ред конвергира,
2. сума реда представља непрекидну функцију,
3. ред може да се диференцира члан по члан.

1. $a > 1$,
2. $a > 1$,
3. $a > 2$.

6. Израчунати $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx$.

$e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}$.

7. Дат је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^\alpha}{n(n+1)(n+2)} x^n$.

1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.
2. За $x = 1$, $\alpha = 1$ сумирати ред.

1. За $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1, 1]$, док је за $x = -1$ и $2 \le \alpha < 3$ ред условно конвергентан.
2. Тражена сума је 2.

9 час, Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [-l,l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l,l]$. Нека је $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ интеграбилна функција на $[-l,l]$. Бројеви $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f.

1. Нека је $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \dots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin\xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0,l]$.

2. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $[-\pi,\pi]$ одређена формулом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

$a_n = 0$, $n \ge 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$, $n \ge 1$.

3. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0,2l)$

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \le x < l, \\ 0, & l \le x < 2l. \end{cases}$$

$a_0 = A$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1)$, $n \ge 1$.

4. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi,\pi)$.
$a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$, $b_n = 0$, $n \ge 1$.

5. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi,\pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост.
$a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n n-1}{n^2-1}$, $n \ge 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$, $n \ge 2$.

6. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:
1. по синусима,
2. по косинусима,
3. на интервалу $(0,2\pi)$.

Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

1. $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = (-1)^n\frac{4}{n^2}$, $b_n = 0$, $n \ge 1$,

2. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$, $n \geq 1$,
3. $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$, $n \geq 1$.

10 час, Фуријеови редови

Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l, l]$.
Фуријеов ред Риман-интеграбилне функције на сегменту $[-l, l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.
Нека $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, $\ldots$ $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$.
Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l, l]$ део по део непрекидан извод реда $m + 1$. Тада:
1. конвергира бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l})^m(|a_k| + |b_k|)$,
2. Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.
1. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.
2. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1)$, $b_n = 0$, $n \geq 1$.
3. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:
1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$
4. Наћи Фуријеов ред функције $x \to x^2$, $0 < x < 2$ интеграљењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
1. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$, $n \geq 1$,
2. $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \geq 1$,

3. $S = \frac{\pi^4}{90}$,
4. $S = \frac{\pi^2}{12}$.
4. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geq 1$.
5. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.
$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2\sinh a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}$.
6. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.
7. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π, одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.
$A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}$, $B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}$.

11 час, Диференцијалне једначине првог реда у симетричном облику

Нека су у једноструко повезаној области D функције P'_x и Q'_t непрекидне. Следећа два услова су еквивалентна:
1.$P'_x = Q'_t$ за све $(t, x) \in D$,
2.$Pdt + Qdx$ је тотални диференцијал у D.
$F(t, x) = \int Pdt + \int [Q(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x)dt]dx$
1. Решити ДЈ $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$.
$x^2y^2 + x^2 + y^4 = C$.
2. Решити ДЈ $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.
$\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + Ce^{x^2} - 2e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Решити ДЈ $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.
$\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}$.
4. Решити ДЈ $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.
$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$.

Функцију $\mu = \mu(t, x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од 0 у једноструко повезаној области D називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом.
Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P} d\omega$.
5. Одредити интеграциони фактор:
1. ДЈ која раздваја променљиве,
2. линеарне ДЈ.
6. Решити ДЈ $x(1 + xy^2)y' = y(2 - 3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.
$\frac{x^2 - x^3y^2}{y} = C$, $y = 0, x < 0$.
7. Решити ДЈ $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0$.
$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C$.
8. Решити ДЈ $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2 - y)$.
$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$.

12 час, ДЈ које се решавају без и са параметризацијом

1. Решити ДЈ $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.
Опште решење $(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - De^x) = 0$, (x_0, x_0^2) сингуларне тачке. 2. Решити ДЈ $(y')^3 - 4yy' = 0$.
3. Решити ДЈ $xy'^2 - 2y' + 4x = 0$.
Опште решење $(\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{\frac{y}{x^2} - 4}}{x} - C)(D - x(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4})) = 0$. 4. Решити ДЈ $y - y'^2 e^{y'} = 0$.
$x = e^u(u + 1) + C$, $y = u^2 e^u$ опште решење у параметарском облику.
5. Решити ДЈ $y \ln y' + y' - y \ln y - xy = 0$, $y > 0$, $y' > 0$.
$x = \ln u + \frac{u}{y} - \ln y$, $\ln |y| + C = \frac{u}{y} + \frac{u^2}{2y^2}$ опште решење у параметарском облику.
6. Решити ДЈ $y - yy'^2 - 2y'x = 0$.
$x = C\frac{v^2 - 1}{v^2}$, $y = -\frac{2C}{v}$.
7. Погодном сменом упростити ДЈ и решити је $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 + a = 0$.
$y^2 = -(x - c)^2 + \frac{c^2 - a}{2}$.
8. Решити ДЈ $x^{n-1}y'^n - nxy' + y = 0$, $n \neq 0$, $x > 0$.

13 час, Лагранжова и Клерова ДЈ

1. Решити ДЈ $y = 3xy' - 7y'^3$.
2. Решити ДЈ $y = xy' + \sqrt{y'^2 + 1}$.
3. Решити ДЈ $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.
4. Решити ДЈ $yy'^2 + axy' + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

14 час, Диференцијалне једначине n-тог реда

$F(x, y^{(n)}) = 0$ је најједноставнија ДЈ чије се опште решење добија узастопном интеграцијом n пута. Ова једначина нема сингуларних решења. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}) = 0$ се сменом $y^{(k)} = z$, трансформише у ДЈ нижег реда.
Ако је ДЈ облика $f(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$, ред ДЈ се снижава за један сменом $y' = z$, где је $y \neq const$ нова независно промењљива, а $z = z(y)$ за нову непознату функцију.
Диференцијалној једначини хомогенитета m (односно, $F(x, ty, ty', \dots ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots y^{(n)})$) ред се снижава сменом $y' = yz$, где је $z = z(x)$ нова непозната функција.
Ако је ДЈ уопштена хомогена ДЈ ($F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots e^{(k-n)t} y^{(n)}) = e^{mt} F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ за неке k и m) једначина се трансформише у једначину трећег типа параметризацијом $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где је t нова независно промењљива, а $u = u(t)$ нова непозната функција.
$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x)$ је канонски облик линеарне диференцијалне једначине n-тог реда (за $f(x) = 0$ добија се одговарајућа хомогена линеарна ДЈ). Скуп решења посматране једначине образује вектроски простор на пољем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. 1. Решити једначину $x = \frac{y''}{1+y''^2}$.
$y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ има опште решење $-\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c_1 x + c_2$, $|x| < 1$.
2. Решити једначину $y'' + 2y' = e^x y'^2$.
$y = -e^{-x} - c_1 x + c_1 \ln|1 + c_1 e^x| + c_2$, $y = c$.
3. Решити једначину $y''^2 = 4(y' - 1)$.
$y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$, $y = x + c$.
4. Решити ДЈ $y'' = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
$y = \frac{1}{2} x \ln^2 x - x \ln x + x + C_1 x + C_2$.
5. Решити ДЈ $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.
$dy = (t \sin t + \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2) dt$.
6. Одредити сва решења ДЈ $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ која задовољавају почетне услове $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.
$y = C_1 \frac{x^3}{6} - C_1^3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ је опште решење, $y = \pm \frac{8}{105\sqrt{3}} x^{\frac{7}{2}} + C_4 x + C_5$ је

сингуларно решење за $u \neq 0$. Постоје 3 решења која адовољавају почетне услове.
7. Решити ДЈ $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$, $y > 0$.
8. Одредити опште решење ДЈ $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.
9. Решити ДЈ $x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$.

15 час, Линеарна ДЈ n-тог реда са константним коефицијентима, метод варијације константи, линеарна ДЈ n-тог реда са функционалним коефицијентима

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$, $a_0, a_1, \ldots a_n, g$ дефинисане на (a, b). Тачку x_0 зовемо сингуларном ако је $a_0(x_0) = 0$, у супротном, тачка је регуларна. Ако су све тачке интервала (a, b) регуларне, можемо добити канонски облик линеарне ДЈ n-тог реда:
$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x)$.
1. Одредити опште решење ДЈ
1. $y''' - 13' - 12 = 0$,
2. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$,
3. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.
2. Одредити Кошијево решење ДЈ $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
3. Решити ДЈ $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.
4. Решити ДЈ методом варијације константи $y'' + 4y = 2 \tan x$.
5. Решити ДЈ $x^2y'' - xy' + 4y = \cos \ln x + x \sin \ln x$.
6. Одредити опште решење ДЈ $(x + a)^3y''' + 3(1 - b)(x + a)^2y'' + (3b^2 - 3b + 1)(x + a)y' - b^3y = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

16 час, Степени редови

1. У близини координатног почетка одредити опште решење ДЈ $2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0$.
$y_1(x) = \frac{c_1x + c_2|x|^{\frac{1}{2}}}{1+x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. Решити ДЈ $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' - (x - 4)y = 0$.
$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, $y_1(x) = x^2e^{-x}$,

$y_2(x) = x^2 \ln|x| e^{-x} + x^2(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

17 час, Гранични проблеми (Гринова функција)

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & \alpha \le t \le s, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s)}, & s \le t \le \beta. \end{cases}$$

1. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $t^2x'' - 2x = f(x)$, $x(1) = 0$, $x(2) + 2x'(2) = 0$.

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1-t^3}{3st}, & 1 \le t \le s, \\ \frac{1-s^3}{3st}, & s \le t \le 2. \end{cases}$$

2. Наћи Гринову функцију за гранични задатак: $x'' - x = f(t)$, $x(t)$ ограничено за $t \to \pm\infty$.

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{t-s}}{2}, & -\infty \le t \le s, \\ \frac{e^{s-t}}{2}, & s \le t \le \infty. \end{cases}$$

18 час, Системи диференцијалних једначина

1. Свести на нормални систем ДЈ и систем ДЈ:
1. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$,
2. $y'' = z$, $z' = \frac{2y}{x^2} - y'$.
2. Методом елиминације решити систем ДЈ $y'' = 2y - 3z$, $z'' = y - 2z$.
3. Сменом $y = u(x)v(x)$, $u, v \in C^2(a,b)$ трансформисати ДЈ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p \in C^1(a,b)$, $q \in C(a,b)$ у ДЈ без првог извода. (Проналажење инваријанте)
4. Методом елиминације решити $x^2y' - z = 0$, $xz' + x(x^2+2)y = 4z$.
5. Методом елиминације решити систем ДЈ $xy' - y - 3z = 0$, $xz' - y + z = 0$.
6. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x+^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.
7. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{xy}$.
8. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{4y-3z} = \frac{dy}{4x-2z} = \frac{dz}{2y-3x}$.
9. Решити Кошијев проблем система ДЈ $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$, $z(0) = -1$, $y(0) = 1$.
10. Одредити опште решење нехомогеног линеарног система ДЈ $y_1' =$

$y_2 + \tan^2 x + 1$, $y_2' = -y_1 + \tan x$.

19 час, Системи диференцијалних једначина

1. Матричном методом решити систем ДЈ

$$y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1,$$
$$y_2' = -y_1 + \tan x$$

ако су позната да линеарно независна решења одговарајућег хомогеног система.

2. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,$$
$$y_2' = 4y_1 + 5y_2.$$

3. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2.$$

4. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 2y_2,$$
$$y_2' = -4y_1 - y_2.$$

5. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 3y_1 + y_2,$$
$$y_2' = -y_1 + y_2.$$

6. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$
$$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3,$$
$$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3.$$

7. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3,$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3,$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3.$$

8. Решити систем ДЈ

$$xy_1' = -6y_1 + y_2 + 3y_3,$$
$$xy_2' = -23y_1 + 6y_2 + 9y_3,$$
$$xy_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3.$$

20 час, Линеарне парцијалне једначине I реда

1. Решити Кошијев проблем хомогене линеарне ПДЈ $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u|_{x=1}=y+z$.
2. Решити хомогену линеарну ПДЈ $(2z-3y)\frac{\partial u}{\partial x}+(3x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-2x)\frac{\partial u}{\partial z}=0$.
3. Одредити једначину површи G која садржи круг $x^2+y^2=r^2$, $z=h$ и ортогонална је на фамилију хиперболоида $xy=cz^2$, $h,r,c\neq 0$.
4. Решити Пфафове једначине $dz=(2x^2+2xz+2xy^2-1)d-2ydy$ и $(\cos x+e^x)dx+(e^x+e^yz)dy+e^ydz=0$.
5. Наћи потпуни, општи и сингуларни интеграл једначине $p=(qy+z)^2$ и одредити услове постојања Кошијевог интеграла који садржи криву $y=1$, $z=g(x)$.
6. Одредити потпуне интеграле посебних типова ПДЈ 1. $A(x,p)=B(y,q)$, ПДЈ која раздваја променљиве,
2. $z=xp+yq+f(p,q)$, Клерова ПДЈ,
3. $F(z,p,q)=0$.

21 Литература

1. *http : //gen.lib.rus.ec/*
2. И. И. Љашко, А. К. Бољарчук, Ј. Г. Гај, Г. П. Головач, Збирка задатака из математичке анализе 2, Београд, 2007.
3. С. Раденовић, Математичка анализа I, методска збирка задатака, Београд, 2007.
4. С. Раденовић, Математичка анализа II, методска збирка задатака, Београд,
5. М. Марјановић, Математичка анализа I, Београд, 1979.
6. Р. Димитријевић, Ј. Манојловић, Анализа реалних функција више променљивих, збирка задатака, Ниш, 2004.
7. С. Јанковић, Ј. Кнежевић, Диференцијалне једначине I, задаци са елементима теорије, Београд, 2007.
8. С. Јанковић, Ј. Кнежевић, Диференцијалне једначине II, задаци са елементима теорије, Београд, 2007.