Математички факултет

Универзитет у Београду

Неки задаци са вежби из Анализе 1

Златко Лазовић

21. април 2016.

верзија 2.1

(задаци са ознаком * нису рађени на вежбама)

Садржај

1 МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Потребно је доказати да тврђење A_n важи за сваки природан број $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$).

Теорема 1.1. *Ако су задовољени следећи услови:*
1) $\tau(A_{n_0}) = T$,
2) за свако $n \geq n_0$, *ако је* $\tau(A_n) = T$ *онда је* $\tau(A_{n+1}) = T$,
тада важи $\tau(A_n) = T$ *за свако* $n \geq n_0$.

Задатак 1.1. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Задатак 1.2. (Бернулијева неједнакост) Доказати да за $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (-1, +\infty)$, који су истог знака, важи $(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Задатак 1.3. (Биномна формула) Доказати да за реалне бројеве a, b и $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Задатак 1.4. (Јенсенова неједнакост) Нека је f конвексна функција на $\mathbb{R}$. Доказати неједнакост

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Специјално, за конвексну функцију $f(x) = x^2$ Јенсенов неједнакост даје

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x^2 + \ldots + x_n^2}{n},$$

а за функцију $f(x) = e^x$ и за избор $x_1 = \log y_1, x_2 = \log y_2, \ldots, x_n = \log y_n$, где су $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$, добијамо

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни бројеви. Дефинишимо следеће средине:

$$H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$ Хармонијска средина

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$ Аритметичка средина

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$ Геометријска средина

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$ Квадратна средина

Задатак 1.5. Доказати да за позитивне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ важи

$$H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Задатак 1.6. (Коши-Шварцова неједнакост) Доказати да за $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ важи

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Задатак 1.7. (Хелдерова неједнакост) Доказати $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, где су p и q позитивни бројеви који задовољавају $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

2 НИЗОВИ

2.1 Лимес низа. Својства

Дефиниција 2.1. За тачку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је **лимес** или **гранична вредност** низа (a_n) реалних бројева и пишемо $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако за сваку околину U тачке a постоји природан број n_0 такав да је $a_n \in U_a$ за све природне бројеве n веће од n_0. Дакле,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \;\Leftrightarrow\; (\forall U_a)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U).$$

У случају када је a коначан број, за низ (a_n) кажемо да је **конвергентан**, а у случају када је $a = \pm\infty$ или да гранична вредност не постоји, кажемо да низ (a_n) **дивергира**.

Ако је $a \in \mathbb{R}$, тада је

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ако је $a = +\infty$, тада је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n > M).$$

Ако је $a = -\infty$, тада је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n < M).$$

Теорема 2.1. *Сваки конвергентан низ је ограничен.*

Дефиниција 2.2. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, кажемо да је (x_n) **нула-низ**.

Теорема 2.2. *Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a < b$ тада је $a_n < b_n$ почев од неког n. Специјално, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, онда је $a_n < b$ почев од неког n. Аналогно важи када се знак $<$ замени знаком $>$.*

Теорема 2.3. *(Теорема о два полицајца) Нека су $(a_n), (b_n), (c_n)$ три низа реалних бројева таква да је:*

1° $a_n \le b_n \le c_n$ *за све $n \in \mathbb{N}$ или почев од неког n_0;*

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Задатак 2.1. На основу дефиниције граничне вредности доказати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+4} = 2.$$

Решење. Потребно је доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0, такав да је $|\frac{2n+1}{n+4} - 2| < \varepsilon$ за све природне бројеве n веће од n_0, односно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+4} - 2\right| < \varepsilon\right).$$

Посматрајмо следећи израз $\left|\frac{2n+1}{n+4}-2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-8}{n+4}\right| = \frac{7}{n+4} < \frac{7}{n}$.
На основу еквиваленције $\frac{7}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon}$, можемо закључити да ако узмемо $n_0 = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right]+1$ биће задовољено

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+4}-2\right| < \varepsilon).$$

Наиме, нека је произвољно $\varepsilon > 0$. Онда можемо изабрати $n_0 = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right]+1$ тако да за свако $n \in \mathbb{N}$ које задовољава $n > n_0$ важи $n > \left[\frac{7}{\varepsilon}\right]+1 > \frac{7}{\varepsilon}$, па је

$$\left|\frac{2n+1}{n+4}-2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-8}{n+4}\right| = \frac{7}{n+4} < \frac{7}{n} < \varepsilon.$$

$\triangle$

Задатак 2.2. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ у зависности од параметра $q \in \mathbb{R}$.

Решење. Важи

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1; \\ 1, & q = 1; \\ 0, & |q| < 1; \\ \text{дивергира}, & q \le -1. \end{cases}$$

$\triangle$

Задатак 2.3. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$, за $k, m \in \mathbb{N}$ и $a_k b_m \neq 0$.

Решење. Користећи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ за свако $k \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k})}{n^m(b_m + b_{m-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_1\frac{1}{n^{m-1}} + b_0\frac{1}{n^m})} \\ &= \begin{cases} 0, & k < m; \\ \frac{a_k}{b_k}, & k = m; \\ \infty, & k > m. \end{cases} \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 2.4. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n-1} - \sqrt{n^2+n-2})$.

Решење. Рационалисањем добијамо

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \quad (\sqrt{n^2+4n-1} - \sqrt{n^2+n-2}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n-1} - \sqrt{n^2+n-2}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+4n-1} + \sqrt{n^2+n-2}}{\sqrt{n^2+4n-1} + \sqrt{n^2+n-2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n-1-n^2-n+2}{\sqrt{n^2+4n-1} + \sqrt{n^2+n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+4n-1} + \sqrt{n^2+n-2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 2.5. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Решење. Коришћењем формуле $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.6. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решење. Важи следеће

$$0\le\frac{2^n}{n!}=\frac{\overbrace{2\cdot 2\cdots 2}^{n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}}_{n-2}\le 2\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

На основу граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=0$ и Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$. △

Задатак 2.7. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$, где је $a>1$.

Решење. Нека је $m=[a]$. Тада важи

$$\begin{aligned}0\le\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m}\cdot\underbrace{\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}}_{n-m} &\le \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m}\cdot\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}\\ &= \frac{a^m}{m!}\cdot\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}.\end{aligned}$$

На основу граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^m}{m!}\cdot\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}=0$ (јер је $0<\frac{a}{m+1}=\frac{a}{[a]+1}<1$, а $\frac{a^m}{m!}$ је константа) и Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$. △

Задатак 2.8. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}$, где је $b>1$.

Решење. Имамо следеће неједнакости

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{n}{b^n}=\frac{n}{((b-1)+1)^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\ldots+(b-1)^n}\\ &\le \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(b-1)^2}.\end{aligned}$$

На основу граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(n-1)(b-1)^2} = 0$ и Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$. △

Задатак 2.9. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$, где је $k > 0$ и $a > 1$.

Решење. Важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right)^k = (\text{уведемо смену } b = a^{\frac{1}{k}} > 1) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{b^n} \right)^k.$$

На основу претходног задатка $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$, па је и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{b^n} \right)^k = 0$. △

Задатак 2.10. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a^k n}{n^m}$, где је $k > 0, m > 0$ и $a > 1$.

Решење. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a^k n}{n^m} = 0$. △

Задатак 2.11. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Решење. Применом Стирлингове формуле добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

при чему је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$. △

На основу претходних задатака можемо закључити да важи

$$\log_a^k n \prec n^b \prec q^n \prec n! \prec n^n \quad \text{када} \quad n \to \infty,$$

где су $a > 1, k > 0, b > 0$ и $q > 1$.

Задатак 2.12. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решење.

$$\begin{aligned} 1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \sqrt{n}\sqrt{n}} &= G_n(1, 1, 1, \ldots, \sqrt{n}, \sqrt{n}) \\ &\leq A_n(1, 1, 1, \ldots, \sqrt{n}, \sqrt{n}) = \frac{\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n-2} + \sqrt{n} + \sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{n - 2 + 2\sqrt{n}}{n} = \frac{n-2}{n} + \frac{2\sqrt{n}}{n}. \end{aligned}$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n} + \dfrac{2\sqrt{n}}{n} \right) = 1$ и Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. △

Задатак 2.13. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Решење. Посматрајмо два случаја.

1° Ако је $a \geq 1$, онда важи $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$. Из $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ и Теореме о 2 полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2° Ако је $a < 1$, онда важи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \left(\frac{1}{a} > 1, \text{ одакле на основу } 1^\circ \text{ важи } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \right) = 1.$$

△

Задатак 2.14. Доказати

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

за $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ и $m \in \mathbb{N}$.

Решење. Нека је $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = a$. Тада је

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m \cdot a^n} = \sqrt[n]{m} \cdot a.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} \cdot a = a$ и Теореме о два полицајца следи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = a.$$

△

Задатак 2.15. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

Решење. Како су сабирци монотоно опадајући то имамо оцену

$$n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ и применом Теореме о два полицајца следи

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

△

Задатак 2.16. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^k}$, за $a > 0, k \in \mathbb{R}$.

Решење. На основу граничних вредности
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & 0<a<1;\\ 1, & a=1;\\ +\infty, & a>1 \end{cases} \quad \text{и} \lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} 0, & k<0;\\ 1, & k=0;\\ +\infty, & k>0 \end{cases}$$ разликоваћемо 9 случајева:

1° Ако је $a\in(0,1)$ и $k<0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$. Шта је веће a^n или n^k када $n\to\infty$? Због $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = \frac{n^{-k}}{(a^{-1})^n} = 0$ имамо да је $n^k > a^n$ за $n\ge n_0$, па ћемо n^k издвојити унутар корена. Имамо

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \le \sqrt[n]{n^k\left(\frac{a^n}{n^k}+1\right)} \le \left(\frac{a^n}{n^k}\le 1 \text{ за } \quad n\ge n_0\right) \le \sqrt[n]{n^k(1+1)} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k.$$

Одоздо ћемо ограничити
$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \ge \sqrt[n]{n^k} \ge (\sqrt[n]{n})^k.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n^k} = 1$.

2° Ако је $a\in(0,1)$ и $k=0$ онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 1$. Одавде се види да је веће n^k од a^n када $n\to\infty$, па ћемо n^k издвојити унутар корена и добијамо

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \le \sqrt[n]{n^k\left(\frac{a^n}{n^k}+1\right)} \le \left(\frac{a^n}{n^k}\le 1 \text{ за } \quad n\ge n_0\right) \le \sqrt[n]{n^k(1+1)} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k.$$

Одоздо ћемо га ограничити са

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \ge \sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n^k} = 1$.

3° Ако је $a\in(0,1)$ и $k>0$ онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$. Одавде се види да је n^k веће од a^n када $n\to\infty$, па ћемо n^k издвојити унутар корена,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n+n^k} &\le \sqrt[n]{n^k\left(\frac{a^n}{n^k}+1\right)} \le \left(\frac{a^n}{n^k}\le 1 \text{ за } \quad n\ge n_0\right)\\ &\le \sqrt[n]{n^k(1+1)} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k.\end{aligned}$$

Одоздо ћемо га ограничити са

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \ge \sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n^k} = 1$.

4° Ако је $a=1$ и $k<0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$.

$$\sqrt[n]{1+n^k} \leq (n^k \leq 1 \text{ за } n \in \mathbb{N}) \leq \sqrt[n]{1+1} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Одоздо ћемо га ограничити на следећи начин

$$\sqrt[n]{1+n^k} \geq 1.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{2} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+n^k} = a$.

5° Ако је $a=1$ и $k=0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

6° Ако је $a=1$ и $k>0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$. Одавде се види да је a^n веће од n^k када $n\to\infty$, па ћемо n^k издвојити унутар корена,

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \leq \sqrt[n]{n^k\left(\frac{1}{n^k}+1\right)} \leq \left(\frac{1}{n^k} \leq 1 \text{ за } \quad n\in\mathbb{N}\right) \leq \sqrt[n]{n^k(1+1)} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k.$$

Одоздо ћемо га ограничити на следећи начин

$$\sqrt[n]{1+n^k} \geq (\sqrt[n]{n})^k.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^k = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$ и применом Теореме о 2 полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+n^k} = 1$.

7° Ако је $a>1$ и $k<0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$. Одавде се види да је a^n веће од n^k када $n\to\infty$, па ћемо a^n издвојити унутар корена

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \leq \sqrt[n]{a^n\left(\frac{n^k}{a^n}+1\right)} \leq \left(\frac{n^k}{a^n} \leq 1 \text{ за } \quad n\geq n_0\right) \leq \sqrt[n]{a^n(1+1)} = \sqrt[n]{2}a$$

Одоздо ћемо га ограничити на следећи начин

$$\sqrt[n]{a^n+n^k} \geq \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}a = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+n^k} = a$.

8° Ако је $a>1$ и $k=0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^0 = 1$. Одавде се види да је a^n веће од n^k када $n\to\infty$, па ћемо a^n издвојити унутар корена,

$$\sqrt[n]{a^n+1} \leq \sqrt[n]{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)} \leq \left(\frac{1}{a^n} \leq 1 \text{ за } \quad n\in\mathbb{N}\right) \leq \sqrt[n]{a^n(1+1)} = \sqrt[n]{2}a.$$

Одоздо ћемо га ограничити на следећи начин

$$\sqrt[n]{a^n+1} \geq \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}a = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^k} = a$.

9° Ако је $a > 1, k > 0$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$. Шта је веће a^n или n^k када $n \to \infty$? Због $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ (задатак 2.9) имамо да је $a^n > n^k$ за $n \geq n_0$, па ћемо a^n издвојити унутар корена

$$\sqrt[n]{a^n + n^k} \leq \sqrt[n]{a^n\left(1 + \frac{n^k}{a^n}\right)} \leq \left(\frac{n^k}{a^n} \leq 1 \text{ за } \quad n \geq n_0\right) \leq \sqrt[n]{a^n(1+1)} = \sqrt[n]{2}a.$$

Одоздо ћемо га ограничити на следећи начин

$$\sqrt[n]{a^n + n^k} \geq \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Из граничних вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}a = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и применом Теореме о два полицајца следи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^k} = a$.

Закључак: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^k} = \begin{cases} 1, & a \in (0,1); \\ a, & a \geq 1. \end{cases}$ △

Задатак 2.17. Доказати:

а) Збир два конвергентна низа је конвергентан низ;
б) Збир конвергентног и дивергентног низа је дивергентан низ;
в) Производ два конвергентна низа је конвергентан низ.

Решење. Погледати у уджбенику "Математичка Анализа I-Зоран Каделбург" Став 3.1.4. △

Задатак 2.18. Навести:

а) Пример два дивергентна низа чији је збир конвергентан и пример два дивергентна низа чији је збир дивергентан;
б) Пример једног конвергентног и једног дивергентног низа чији је производ конвергентан и пример једног конвергентног и једног дивергентног низа чији је производ дивергентан.

Решење. а) За низове $a_n = \sqrt{n^2 + 4n - 1}, b_n = -\sqrt{n^2 + n - 2}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \frac{3}{2} \quad \text{(задатак 2.4)}.$$

Ако је $a_n = \sqrt{n^2 + 4n - 1}$ и $b_n = \sqrt{n^2 + n - 2}$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

б) Ако је $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = (-1)^n$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

Ако је $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = n^2$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. △

Задатак 2.19. Доказати да је производ нула низа и ограниченог низа нула низ.

Решење. Нека имамо нула низ (a_n) и ограничен низ (b_n) за који важи $|b_n| \leq M$ за свако $n \in \mathbb{N})$. Тада важи

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n|,$$

одакле помоћу Теореме о два полицајца из $\lim\limits_{n\to\infty} M|a_n| = 0$ следи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. △

Задатак 2.20. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(n^2+2)(n^3+4n)}{3^n+4n+2}$.

Решење. Коришћењем задатка 2.19 добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+2)(n^3+4n)}{3^n+4n+2} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n \sin(n^2+2)}_{a_n} \underbrace{\frac{n^3+4n}{3^n+4n+2}}_{b_n} = 0,$$

при чему је (a_n) ограничен, а (b_n) нула низ. △

2.2 Диференцне једначине

Задатак 2.21. Наћи општи члан Фибоначијевог низа $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Решење. Карактеристична једначина $t^2 = t + 1$ има решења $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Одавде, општи члан је облика

$$a_n = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Константе C_1 и C_2 наћи ћемо из система

$$1 = a_1 = C_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad 1 = a_2 = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

па добијамо $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Према томе, општи члан је

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

△

Задатак 2.22. Решити диференцну једначину $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, a_1 = 2, a_2 = 7$.

Решење. Карактеристична једначина $t^2 = 4t - 4$ има двоструко решење $t_{1,2} = 2$, па је општи члан облика $a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n, n \in \mathbb{N}$. Из система $2 = 2C_1 + 2C_2, 7 = 4C_1 + 8C_2$ добијамо $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{4}$, па је $a_n = 2^{n-2} + 3n2^{n-2}, n \in \mathbb{N}$. △

Задатак 2.23. Решити систем диференцних једначина

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + b_n,\ a_1 = 2 \\ b_{n+1} &= -a_n + b_n,\ b_1 = 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Решење. Из система добијамо

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n + b_n = 3a_{n+1} - a_n + (a_{n+1} - 3a_n) = 4a_{n+1} - 4a_n, a_1 = 2, a_2 = 7,$$

а то је линеарна диференцна једначина другог реда чије је решење (задатак 2.22)

$$a_n = 2^{n-2} + 3n2^{n-2}, n \in \mathbb{N}.$$

Из прве једначине система можемо наћи b_n,

$$b_n = \frac{1}{3}(a_{n+1} - 2a_n) = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 3(n+1)2^{n-1} - 2^{n-2} - 3n2^{n-2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

△

2.3 Монотони низови. Број e

Дефиниција 2.3. За низ (a_n) реалних бројева кажемо да је **растући** ако важи $a_n \leq a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а да је **строго растући** ако је $a_n < a_{n+1}$. Аналогно се дефинишу **опадајући** и **строго опадајући** низови. Једним именом такве низове зовемо **монотоним** низовима.

Теорема 2.4. *а) Ако је низ растући и ограничен одозго, онда је конвергентан.*
б) Ако је низ опадајући и ограничен одоздо, онда је конвергентан.

Задатак 2.24. Нека су дати низови $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

а) Низ (a_n) је растући, а низ (b_n) је опадајући и важи $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

б) Низ (a_n) је ограничен одозго, а низ (b_n) је ограничен одоздо.

в) Низови (a_n) и (b_n) конвергирају ка истој граничној вредности. (Граничну вредност означимо са $e \approx 2,71828$).

Решење. На основу Бернулијеве неједнакости имамо

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

тј.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}.$$

За доказ ограничености посматрајмо други низ $b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, n > 1$. Очигледно је $a_n < b_n, n = 2, 3, \ldots$. За низ (b_n) се, аналогно претходном, доказује да је опадајући: из

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}$$

следи

$$b_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = b_{n+1}.$$

На тај начин је низ (a_n) одозго ограничен (на пример, бројем $b_2 = 4$), те постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тој граничној вредности (према Ојлеру) дајемо посебно име. △

Задатак 2.25. *

а) Доказати $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$.

б) Доказати $e - \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n\cdot n!}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

в) Доказати да је број e ирационалан.

г) Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, где је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Решење. а) Нека је $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$. Тада је

$$\begin{aligned} x_n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}+\ldots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Одавде следи да је $x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} = y_n$, односно $e \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Затим, важи

$$x_n > 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

одакле "пуштањем лимеса" добијамо $e > 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!} = y_k$ за свако $k \in \mathbb{N}$, а одатле $e \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Према томе, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

б) Важи

$$\begin{aligned} y_{n+m}-y_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(m+n)!}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}, \end{aligned}$$

одакле "пуштањем лимеса" када $m\to\infty$ добијамо

$$e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!}$$

в) Претпоставимо да је $e = \frac{m}{n}$, где су $m, n \in \mathbb{N}$. Тада важи

$$\frac{m}{n} = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{q}{n\cdot n!},\ q\in(0,1).$$

Множењем једнакости са $n!$ добијамо

$$m\cdot(n-1)! = n!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)+\frac{q}{n}, q\in(0,1).$$

Лева страна је цео број, а десна није, па смо добили контрадикцију. Број e је ирационалан.

г) Следи из граничне вредности функције $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ коју ћемо доказати у следећем поглављу (задатак 3.6). △

Задатак 2.26. Доказати неједнакости $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Решење. На основу задатка 2.24 имамо неједнакости $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, одакле логаритмовањем добијамо $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. △

Задатак 2.27. Доказати да низ $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ конвергира.

Решење. Доказаћемо да је низ опадајући и ограничен одоздо.

Посматрајмо разлику суседних чланова

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0. \end{aligned}$$

Последњу неједнакост смо добили на основу задатка 2.26. Тиме смо доказали да је низ (a_n) опадајући.

Затим,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n &> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

па смо доказали да је ограничен одоздо.

На основу Теореме 2.4 следи да је низ (a_n) ковергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma \approx 0,57$ (Ојлерова константа за коју не знамо да ли је рационалан број.) △

Задатак 2.28. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$.

Решење. На основу задатка 2.27 следи

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2 \\ &= \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.29. Доказати да низ $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ конвергира.

Решење. Доказаћемо да је низ растући и ограничен одозго.

Низ је позитиван (доказује се математичком индукцијом).

Посматрајмо количник суседних чланова

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

одакле је (a_n) растући низ.

Даље,

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\\ &< \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1,\end{aligned}$$

а одавде $a_n < e$ за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу Теореме 2.4, следи да је низ (a_n) конвергентан. △

Теорема 2.5. *(Штолцова) Посматрајмо* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.
Ако су задовољени следећи услови:
1) $y_{n+1} > y_n$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$
3) постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ *у* $\overline{\mathbb{R}}$,
тада важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Задатак 2.30. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$.

Решење. Применом Штолцове теореме добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5} &= \begin{pmatrix} x_n=1^4+2^4+\ldots+n^4, y_n=n^5\\ 1)\, y_{n+1}=(n+1)^5>n^5=y_n\\ 2)\,\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty\end{pmatrix}\\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1^4+2^4+\ldots+n^4+(n+1)^4}^{x_{n+1}}-\overbrace{(1^4+2^4+\ldots+n^4)}^{x_n}}{\underbrace{(n+1)^5}_{y_{n+1}}-\underbrace{n^5}_{y_n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{5n^4+10n^3+10n^2+5n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{1}{n})^4}{n^4(5+\frac{10}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4})}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^4}{5+\frac{10}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Знак $**$ изнад једнакости нам означава да је једнакост условна, односно да важи ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5).

С обзиром да постоји та гранична вредност и да је једнака $\frac{1}{5}$, онда знак $**$ можемо склонити и добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}=\frac{1}{5}$. △

Задатак 2.31. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}$.

Решење. Користећи Штолцову теорему имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1^p+2^4+\ldots+n^p}{n^{p+1}} &= \left(\begin{array}{c} x_n = 1^p+2^4+\ldots+n^p, y_n = n^{p+1} \\ 1)\, y_{n+1} = (n+1)^{p+1} > n^{p+1} = y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array}\right) \\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{1^p+2^p+\ldots+n^p+(n+1)^p}^{x_{n+1}} - \overbrace{(1^p+2^p+\ldots+n^p)}^{x_n}}{\underbrace{(n+1)^{p+1}}_{y_{n+1}} - \underbrace{n^{p+1}}_{y_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^{p+1}+(p+1)n^p+\ldots+1-n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\ldots+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p(1+\frac{1}{n})^p}{n^p(p+1+\frac{\binom{p}{2}}{n}+\ldots+\frac{1}{n^p})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p}{p+1+\frac{\binom{p}{2}}{n}+\ldots+\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{p+1}.
\end{aligned}$$

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$. △

Задатак 2.32. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{1}}+\dfrac{a_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$, где низ (a_n) конвергира ка a.

Решење. Применом Штолцове теореме добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \\
= \left(\begin{array}{c} y_n = \sqrt{n} \\ 1)\, y_{n+1} = \sqrt{n+1} > \sqrt{n} = y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array}\right) &\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}+\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)-\left(\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}((n+1)-n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}} \\
= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} &= 2a,
\end{aligned}$$

јер је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$.

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$. △

Задатак 2.33. (Кошијев став) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$.

Решење. Применом Штолцове теореме добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \begin{pmatrix} x_n = a_1+a_2+\ldots+a_n, y_n = n \\ 1)\ y_{n+1} = n+1 > n = y_n \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}-(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = a.$$

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\stackrel{**}{=}$. △

Задатак 2.34. Нека је a_n позитиван низ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a.$$

Решење. Ако искористимо неједнакости $H_n \leq G_n \leq A_n$ имамо

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Затим, имамо следеће граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a \text{ (Кошијев став)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} = \begin{pmatrix} x_n = n, y_n = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \\ 1)\ y_{n+1} > y_n \text{ (низ } (a_n) \text{ је позитиван)} \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty\ (a>0) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}} = a.$$

Помоћу Теореме о два полицајца закључујемо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$.

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\stackrel{**}{=}$. △

Задатак 2.35. Ако је низ x_n позитиван и постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Решење. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1} \cdot \dfrac{x_3}{x_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{x_n}{x_{n-1}}} = \text{(Задатак 2.34)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$. △

Задатак 2.36. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Решење. Први начин.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = (\text{Задатак } 2.35) = \begin{pmatrix} x_n = \frac{n^n}{n!} \\ x_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Други начин. Применом Стирлингове формуле $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$ добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}}\frac{e}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} = 1\cdot\frac{e}{1} = e.$$

△

2.4 Поднизови. Тачке нагомилавања. Горњи и доњи лимес

Дефиниција 2.4. Нека је $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ строго растући низ природних бројева, тј. нека је

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_n < \ldots$$

и нека је $a:\mathbb{N}\to A$ низ елемената скупа A. За низ $a\circ n:\mathbb{N}\to A$ са члановима $a_{n_k}(k=1,2,\ldots)$ кажемо да је **подниз** низа (a_n).

Теорема 2.6. *Ако низ (a_n) реалних бројева има граничну вредност a, тада и било који његов подниз (a_{n_k}) има граничну вредност a.*

Дефиниција 2.5. За тачку $a\in\overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је **тачка нагомилавања** низа реалних бројева (a_n) ако постоји подниз (a_{n_k}) тог низа који тежи ка a када $k\to\infty$.

Дефиниција 2.6. За тачку $a\in\overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је **тачка нагомилавања** скупа $A\subset\mathbb{R}$ ако у свакој околини тачке a постоји бесконачно много тачака скупа A, или, еквивалентно, ако у свакој околини тачке a постоји бар једна тачка скупа A различита од саме тачке a.

Дефиниција 2.7. Највећа тачка нагомилавања низа (a_n) зове се **горњи лимес** или **лимес супериор** низа (a_n) и означава са $\limsup a_n$ или $\overline{\lim} a_n$. Аналогно се дефинише **доњи лимес** или **лимес инфериор** низа (a_n) који се означава са $\liminf a_n$ или $\underline{\lim} a_n$.

Задатак 2.37. Нека поднизови (x_{2n}) и (x_{2n-1}) низа (x_n) конвергирају ка a, односно b. Ако је $a\neq b$, онда је $T(x_n)=\{a,b\}$, где је $T(x_n)$ скуп тачака нагомилавања низа (x_n). У случају да је $a=b$ низ (x_n) конвергира.

Решење. Доказаћемо да не постоји подниз који има граничну вредност различиту од a и од b. Ако је (b_n) подниз низа (a_n), онда ћемо га означити са $(a_n)\subset_p(b_n)$, а ако постоји заједнички подниз низова (a_n) и (b_n), означићемо са $(a_n)\cap_p(b_n)$.

Нека је $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$. Тада постоји подниз $(x_{n_{k_m}})$ такав да је

$$(x_{2n})\cap_p(x_{n_k}) = (x_{n_{k_m}}) \quad \text{или} \quad (x_{2n-1})\cap_p(x_{n_k}) = (x_{n_{k_m}}).$$

Ако је $(x_{2n})\cap_p(x_{n_k}) = (x_{n_{k_m}})$, онда је $(x_{n_{k_m}})\subset_p(x_{2n})$ и $(x_{n_{k_m}})\subset_p(x_{n_k})$, а одатле $\lim\limits_{m\to\infty}x_{n_{k_m}}=a$ и $\lim\limits_{m\to\infty}x_{n_{k_m}}=c$, јер сваки подниз конвергира ка истој граничној вредности

где и низ. Одавде, на основу јединствености граничне вредности, следи $a = c$.
Ако је $(x_{2n-1}) \cap_p (x_{n_k}) = (x_{n_{k_m}})$, онда је $(x_{n_{k_m}}) \subset_p (x_{2n-1})$ и $(x_{n_{k_m}}) \subset_p (x_{n_k})$, а одатле $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = b$ и $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = c$, односно $b = c$.

Доказали смо да скуп $T(x_n)$ садржи само a и b. △

Задатак 2.38. Нека поднизови $(x_{kn}), (x_{kn-1}), \ldots, (x_{kn-k+1})$ низа (x_n) конвергирају ка $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, онда је $T(x_n) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, где је $T(x_n)$ скуп тачака нагомилавања низа (x_n).

Решење. Решење овог задатка је слично као и решење задатка 2.37. △

Задатак 2.39. Нека поднизови $(x_{2n}), (x_{2n-1})$ и (x_{7n}) низа (x_n) конвергирају. Испитати конвергенцију низа x_n.

Решење. Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{7n} = c$. Тада је

$$(x_{2n}) \cap_p (x_{7n}) = (x_{14n}) \quad \text{и} \quad (x_{2n-1}) \cap_p (x_{7n}) = (x_{14n-7}).$$

Из $(x_{14n}) \subset_p (x_{2n})$ и $(x_{14n}) \subset_p (x_{7n})$ следи

$$\lim_{n\to\infty} x_{14n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_{14n} = \lim_{n\to\infty} x_{7n} = c,$$

а одавде $a = c$.

Из $(x_{14n-7}) \subset_p (x_{2n-1})$ и $(x_{14n-7}) \subset_p (x_{7n})$ следи

$$\lim_{n\to\infty} x_{14n-7} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = b \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_{14n-7} = \lim_{n\to\infty} x_{7n} = c,$$

а одавде $b = c$.

Доказали смо да је $a = c = b$, те на основу задатка 2.37 следи да низ (x_n) конвергира. △

Задатак 2.40. Наћи све тачке нагомилавања низа $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, као и $\limsup x_n$ и $\liminf x_n$.

Решење. Имамо $\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0, & n = 2, 6, 10, \ldots \\ -1, & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0, & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 4k-3; \\ 0, & n = 4k-2; \\ -1, & n = 4k-1; \\ 0, & n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Посматрајмо поднизове $(x_{4k-3}), (x_{4k-2}), (x_{4k-1})$ и (x_{4k}) и израчунајмо њихове граничне вредности

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k-3} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k-3}{4k-3+1}\cos\frac{(4k-3)\pi}{2} = 1 + 0 = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k-2}{4k-2+1}\cos\frac{(4k-2)\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k-2}{4k-1}(-1) = 1 + 1\cdot(-1) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{4k-1} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k-1}{4k-1+1}\cos\frac{(4k-1)\pi}{2} = 1 + 0 = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k}{4k+1}\cos\frac{4k\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{4k}{4k+1}\cdot 1 = 1 + 1 = 2.$$

На основу задатка 2.38 скуп тачака нагомилавања је $T(x_n) = \{0, 1, 2\}$, одакле је $\overline{\lim} x_n = 2$ и $\underline{\lim} x_n = 0$. △

Задатак 2.41. Наћи све тачке нагомилавања низа $x_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{n}{n+1}\sin\frac{2n\pi}{3}$, као и $\limsup x_n$ и $\liminf x_n$.

Решење. Очигледно је да важи

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k; \\ -1, & n = 2k-1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k-2; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k-1; \\ 0, & n = 3k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Због НЗС$(2,3) = 6$ посматраћемо поднизове $(x_{6k-5}), (x_{6k-4}), (x_{6k-3}), (x_{6k-2}), (x_{6k-1})$ и (x_{6k}) и израчунати њихове граничне вредности

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x_{6k-5} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k-5}\left(1+\frac{1}{6k-5}\right)^{6k-5} + \frac{6k-5}{6k-5+1}\sin\frac{2(6k-5)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} (-1)\left(1+\frac{1}{6k-5}\right)^{6k-5} + \frac{6k-5}{6k-4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -e + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\lim_{k\to\infty} x_{6k-4} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k-4}\left(1+\frac{1}{6k-4}\right)^{6k-4} + \frac{6k-4}{6k-4+1}\sin\frac{2(6k-4)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{6k-4}\right)^{6k-4} + \frac{6k-4}{6k-3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\lim_{k\to\infty} x_{6k-3} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k-3}\left(1+\frac{1}{6k-3}\right)^{6k-3} + \frac{6k-3}{6k-3+1}\sin\frac{2(6k-3)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} (-1)\left(1+\frac{1}{6k-3}\right)^{6k-3} + \frac{6k-3}{6k-2}\cdot 0 = -e, \\
\lim_{k\to\infty} x_{6k-2} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k-2}\left(1+\frac{1}{6k-2}\right)^{6k-2} + \frac{6k-2}{6k-2+1}\sin\frac{2(6k-2)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{6k-2}\right)^{6k-2} + \frac{6k-2}{6k-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = e + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\lim_{k\to\infty} x_{6k-1} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k-1}\left(1+\frac{1}{6k-2}\right)^{6k-1} + \frac{6k-1}{6k-1+1}\sin\frac{2(6k-1)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} (-1)\left(1+\frac{1}{6k-1}\right)^{6k-1} + \frac{6k-1}{6k}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e - \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\lim_{k\to\infty} x_{6k} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k}\left(1+\frac{1}{6k}\right)^{6k} + \frac{6k}{6k+1}\sin\frac{2(6k)\pi}{3} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{6k}\right)^{6k} + \frac{6k}{6k+1}\cdot 0 = e,
\end{aligned}$$

На основу задатка 2.38 скуп тачака нагомилавања је

$$T(x_n) = \{-e + \frac{\sqrt{3}}{2}, e - \frac{\sqrt{3}}{2}, -e, e + \frac{\sqrt{3}}{2}, -e - \frac{\sqrt{3}}{2}, e\}$$

одакле је $\limsup x_n = e + \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\liminf x_n = -e - \frac{\sqrt{3}}{2}$. △

Задатак 2.42. Наћи тачке нагомилавања низа $x_n = \sin\frac{n^2\pi}{3n + \frac{1}{n}}$.

Решење. Због

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\pi}{3n+\frac{1}{n}}-\frac{n\pi}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\pi-3n^2\pi-\pi}{9n+\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\pi}{9n+\frac{3}{n}}=0,$$

посматраћемо следеће поднизове $(x_{6k-5}),(x_{6k-4}),(x_{6k-3}),(x_{6k-2}),(x_{6k-1}),(x_{6k})$. Важи

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{6k-5} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{9(6k-5)+\frac{3}{6k-5}}+\frac{(6k-5)\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\\
\lim_{n\to\infty} x_{6k-4} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{9(6k-4)+\frac{3}{6k-4}}+\frac{(6k-4)\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\lim_{n\to\infty} x_{6k-3} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{9(6k-3)+\frac{3}{6k-3}}+\frac{(6k-3)\pi}{3}\right)=0,\\
\lim_{n\to\infty} x_{6k-2} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{9(6k-2)+\frac{3}{6k-2}}+\frac{(6k-2)\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\\
\lim_{n\to\infty} x_{6k-1} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{9(6k-1)+\frac{3}{6k-1}}+\frac{(6k-1)\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\lim_{n\to\infty} x_{6k} &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{-\pi}{54k+\frac{1}{2k}}+2k\pi\right)=0,
\end{aligned}$$

па је $T(x_n)=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. △

Задатак 2.43. Наћи тачке нагомилавања низа $x_n=\dfrac{n^2+2}{2^n+\ln n}+(-1)^n\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

Решење. Скуп тачкака нагомилавања низа је $T(x_n)=\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}$. △

Задатак 2.44. Доказати да за ограничене низове (x_n) и (y_n) важи:

а) $\underline{\lim}\,x_n+\underline{\lim}\,y_n\le\underline{\lim}\,(x_n+y_n)\le\underline{\lim}\,x_n+\overline{\lim}\,y_n\le\overline{\lim}\,(x_n+y_n)\le\overline{\lim}\,x_n+\overline{\lim}\,y_n$.

б) $\underline{\lim}\,x_n\cdot\underline{\lim}\,y_n\le\underline{\lim}\,(x_ny_n)\le\underline{\lim}\,x_n\cdot\overline{\lim}\,y_n\le\overline{\lim}\,(x_ny_n)\le\overline{\lim}\,x_n\cdot\overline{\lim}\,y_n,(x_n,y_n\ge0)$.

Решење. а) Нека је $\underline{\lim}\,(x_n+y_n)=c$, при чему је $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_{n_k})=c$. Ако посматрамо ограничен подниз (x_{n_k}), можемо закључити да има коначан доњи лимес $\underline{\lim}\,x_{n_k}=\lim\limits_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}=a$. С обзиром да је $x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}}\subset_p x_{n_k}+y_{n_k}$, важи $\lim\limits_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}})=c$, а одавде $\lim\limits_{l\to\infty}y_{n_{k_l}}=c-a$. Добили смо

$$\underline{\lim}\,x_n+\underline{\lim}\,y_n\le\underline{\lim}\,x_{n_{k_l}}+\underline{\lim}\,y_{n_{k_l}}=a+c-a=c=\underline{\lim}\,(x_n+y_n).$$

Доказали смо прву неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо низова (x_n) и (y_n) ставимо (x_n+y_n) и $(-y_n)$ добијамо

$$\underline{\lim}\,(x_n+y_n)+\underline{\lim}\,(-y_n)\le\underline{\lim}\,(x_n).$$

Коришћењем једнакости $\underline{\lim}\,x_n=-\overline{\lim}\,(-x_n)$ имамо

$$\underline{\lim}\,(x_n+y_n)-\overline{\lim}\,(y_n)\le\underline{\lim}\,(x_n),$$

одакле је

$$\underline{\lim}\,(x_n+y_n)\le\underline{\lim}\,(x_n)+\overline{\lim}\,(y_n).$$

Доказали смо другу неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо (x_n) и (y_n) ставимо (x_n) и $(-x_n - y_n)$ добијамо

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, (-x_n - y_n) \leq \underline{\lim}\, (-y_n).$$

Одавде имамо

$$\underline{\lim}\, x_n - \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq -\overline{\lim}\, y_n,$$

односно

$$\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, (x_n + y_n).$$

Доказали смо трећу неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо (x_n) и (y_n) ставимо $(-x_n)$ и $(-y_n)$ добијамо

$$\underline{\lim}\, (-x_n) + \underline{\lim}\, (-y_n) \leq \underline{\lim}\, (-x_n - y_n),$$

односно

$$-\overline{\lim}\, (x_n) - \overline{\lim}\, (y_n) \leq -\overline{\lim}\, (x_n + y_n),$$

одакле добијамо четврту неједнакост

$$\overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n.$$

б) Нека је $\underline{\lim}\, (x_n y_n) = c$, при чему је $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{n_k} y_{n_k}) = c$. Ако посматрамо ограничен подниз (x_{n_k}), можемо закључити да има коначан доњи лимес $\underline{\lim}\, x_{n_k} = \lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = a$.

У случају да је $a = 0$ прва неједнакост је тривијална.

Ако је $a \neq 0$, онда имајући у виду да је $x_{n_{k_l}} y_{n_{k_l}} \subset_P x_{n_k} y_{n_k}$, важи $\lim\limits_{l\to\infty} (x_{n_{k_l}} y_{n_{k_l}}) = c$, а одавде $\lim\limits_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = \frac{c}{a}$.

Добили смо

$$\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, x_{n_{k_l}} \cdot \underline{\lim}\, y_{n_{k_l}} = a \cdot \frac{c}{a} = c = \underline{\lim}\, (x_n + y_n).$$

Доказали смо прву неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо (x_n) и (y_n) ставимо $(x_n y_n)$ и $(\frac{1}{y_n})$ добијамо другу неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо (x_n) и (y_n) ставимо (x_n) и $(\frac{1}{x_n y_n})$ добијамо трећу неједнакост.

Ако у прву неједнакост уместо (x_n) и (y_n) ставимо $(\frac{1}{x_n})$ и $(\frac{1}{y_n})$ добијамо четврту неједнакост. △

Задатак 2.45. * Нека је $x_n > 0$ и $\overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, \dfrac{1}{x_n} = 1$. Доказати да низ (x_n) конвергира.

Задатак 2.46. Испитати конвергенцију низа $x_n = \sin n, n \geq 1$.

Решење. Претпоставимо да низ (x_n) конвергира и да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = x$. Тада, на основу једнакости $\sin^2 2n = 4\sin^2 n \cos^2 n$ и $\sin 3n = 3\sin n - 4\sin^3 n$, када "пустимо лимес" добијамо да је x решење система једначина

$$x^2 = 4x^2(1 - x^2), \quad x = 3x - 4x^3,$$

односно $x \in \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ и $x \in \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Одавде видимо да x може бити само 0, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Из једнакости $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$, када "пустимо лимес" добијамо

$$0 = 0 \cdot \cos 1 + \lim_{n\to\infty} \cos n \sin 1,$$

одакле је и $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$, а то је немогуће јер је $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Према томе, низ (x_n) дивергира. △

Задатак 2.47. Испитати конвергенцију рекурентног низа $x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3}, x_1 = 1$.

Решење. Низ конвергира јер је растући и ограничен одозго са 2. Важи $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. △

Задатак 2.48. Испитати конвергенцију рекурентног низа $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2}, x_1 \in \mathbb{R}$.

Решење. Доказаћемо да је $-1 \leq x_n \leq 1$ за свако $n \geq 2$. Следи из следећих еквиваленција

$$-1 \leq x_{n+1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{2x_n}{1+x_n^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n+1)^2 \geq 0, (x_n-1)^2 \geq 0.$$

Посматрајмо разлику суседних чланова

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n}{1+x_n^2} - x_n = \frac{2x_n - x_n - x_n^3}{1+x_n^2} = \frac{x_n(1-x_n)(1+x_n)}{1+x_n^2}.$$

Одавде видимо да монотоност зависи од позитивности низа x_n, јер је израз $\frac{(1-x_n)(1+x_n)}{1+x_n^2}$ ненегативан за $n \geq 2$.

Посматрајмо следеће случајеве

1) Ако је $x_1 > 0$, тада је $x_n > 0, n \geq 1$. То се може једноставно доказати математичком индукцијом. Тада је низ x_n растући и ограничен одозго $x_n \leq 1, n \geq 2$, па на основу Теореме 2.4 низ конвергира.

Нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, онда "пуштањем лимеса" у рекурентну везу добијамо $x = \frac{2x}{1+x^2}$, чије је решење $x \in \{-1, 0, 1\}$. Због позитивности низа, закључујемо да је $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

2) Ако је $x_1 < 0$, тада је $x_n < 0, n \geq 1$, што се доказује математичком индукцијом. Тада је низ x_n опадајући и ограничен одоздо $x_n \geq -1, n \geq 2$, па на основу Теореме 2.4 низ конвергира. Као и у случају 1), из негативности низа закључујемо да је $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$.

3) Ако је $x_1 = 0$, тада је $x_n = 0, n \geq 1$, па је $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. △

Задатак 2.49. Испитати конвергенцију низа $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}, x_0 = \frac{2016}{2015}$.

Решење. Израчунајмо неколико првих чланова

$$x_1 = \frac{1}{2-x_0} = \frac{1}{2-\frac{2016}{2015}} = \frac{2015}{2014}, \quad x_2 = \frac{1}{2-x_1} = \frac{1}{2-\frac{2015}{2014}} = \frac{2014}{2013}.$$

Може се доказати да првих неколико чланова има облик $x_n = \frac{2016-n}{2015-n}$.

Наиме, ако је $x_n = \frac{2016-n}{2015-n}$ тада је

$$x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n} = \frac{1}{2-\frac{2016-n}{2015-n}} = \frac{2015-n}{2014-n} = \frac{2016-(n+1)}{2015-(n+1)}.$$

Према томе, члан $x_{2014} = 2$ и x_{2015} не постоји. Низ није добро дефинисан и нема смисла посматрати конвергенцију. △

Задатак 2.50. Нека су дати рекурентни низови $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $x_1 = \frac{a+b}{2}, y_1 = \sqrt{ab}$, где је $a > b > 0$. Испитати конвергенцију низова (x_n) и (y_n).

Решење. Математичком индукцијом се може доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $x_n > 0$, $y_n > 0$ и коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи $x_n \geq y_n$. Одатле

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n \leq \frac{x_n + x_n}{2} - x_n = 0, \quad y_{n+1} - y_n = \sqrt{x_n y_n} - y_n \geq \sqrt{y_n y_n} - y_n = 0,$$

па је низ (x_n) опадајући, а из $x_n \geq y_n$ следи да је и ограничен одоздо са 0, а низ (y_n) растући и ограничен одозго са x_1. На основу Теореме 2.4 следи да су низови (x_n) и (y_n) конвергентни и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Ако "пустимо лимес" у прву рекурентну везу добијамо једначину $x = \frac{x+y}{2}$, одакле је $x = y$. △

Задатак 2.51. Испитати конвергенцију рекурентно задатог низа $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n(1 - \sin x_n^2)$.

Решење. Доказаћемо математичком индукцијом да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $0 \leq x_n \leq 1$

1) $x_1 \in (0,1)$

2) $x_n \in (0,1) \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1 - \sin x_n^2) \in (0,1)$

Користили смо следеће импликације $x_n^2 \in (0,1) \Rightarrow \sin x_n^2 \in (0,1) \Rightarrow 1 - \sin x_n^2 \in (0,1)$.

Испитујемо монотоност

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - \sin x_n^2) - x_n = -x_n \sin x_n^2 < 0,$$

одакле је низ опадајући, а знамо да је ограничен, па помоћу Теореме 2.4 низ конвергира. Граничну вредност ћемо наћи ако "пустимо лимес" у рекурентну везу, па добијамо да је решење једначине $x = x(1 - \sin x^2)$. Ова једначина има решења $x = 0, x = \pm\sqrt{k\pi}, k \in \mathbb{N}$. Имајући у виду да се елементи низа налазе између 0 и 1, гранична вредност је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. △

Задатак 2.52. Нека је $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3x_n^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

а) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

б) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^3}{n}$.

в) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^3 - n}{\ln n}$.

Решење. а) Помоћу математичке индукције доказаћемо да је $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Важи

1) $x_1 > 0 \quad \top$

2) $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{3x_n^2} > 0,$

па је низ позитиван. Одавде следи да је низ добро дефинисан. Затим, испитајмо монотоност

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3x_n^2} > 0.$$

Овим смо доказали да је низ растући.

Претпоставимо да постоји $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. "Пустимо лимес" у једначину $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{3x_n^2}$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \dfrac{1}{3x_n^2})$ и добијамо $x = x + \frac{1}{3x^2}$. Решење последње једначине не постоји, па не постоји $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и, ако узмемо у обзир да смо доказали да је низ растући, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

б) Коришћењем Штолцове теореме добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{n} &= \left(\begin{array}{c} y_n = n \\ 1)\ y_{n+1} = n+1 > n = y_n \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^3 - x_n^3}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^3 - x_n^3) \\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\left(x_n + \frac{1}{3x_n^2}\right)^3 - x_n^3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n^3 + 1 + \frac{1}{3x_n^3} + \frac{1}{27x_n^6} - x_n^3\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3x_n^3} + \frac{1}{27x_n^6}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$.

в) Коришћењем Штолцове теореме добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3 - n}{\ln n} &= \left(\begin{array}{c} y_n = \ln n \\ 1)\, y_{n+1} > y_n \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array}\right) \overset{**}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^3 - (n+1) - x_n^3 + n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^3 - 1 - x_n^3}{\ln\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3 + 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x_n^3} + \frac{1}{27}\frac{1}{x_n^6} - 1 - x_n^3}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3x_n^3} + \frac{1}{27}\frac{1}{x_n^6}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\frac{n}{x_n^3} + \frac{1}{27}\frac{n}{x_n^6}}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\frac{n}{x_n^3} + \frac{1}{27}\frac{n}{x_n^3}\frac{1}{x_n^3}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}+0}{\ln e} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$.

г)

$$\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= x_{n+1}^3 - n - 1 - \frac{\ln(n+1)}{3} - x_n^3 + n + \frac{\ln n}{3} \\
&= \left(x_n + \frac{1}{3x_n^2}\right)^3 - 1 - \frac{\ln(n+1)}{3} - x_n^3 + \frac{\ln n}{3} \\
&= \frac{1}{3x_n^3} + \frac{1}{27x_n^6} - \frac{\ln n + 1}{3} + \frac{\ln n}{3}
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.53. Нека је $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n + x_n^2}$ $\quad(\forall n \in \mathbb{N})$.

а) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

б) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.

в) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n} = 1.$

Решење. а) Математичком индукцијом доказујемо да је низ са позитивним члановима:

1) $x_1 > 0$,

2) $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n+x_n^2} > 0$.

Према томе, низ је добро дефинисан. Даље,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1+x_n+x_n^2} - x_n = \frac{x_n - x_n - x_n^2 - x_n^3}{1+x_n+x_n^2} = \frac{-x_n^2(1+x_n)}{1+x_n+x_n^2} < 0,$$

па је низ (x_n) опадајући. Низ је и ограничен одоздо $(x_n > 0, n \geq 1)$ и из Теореме 2.4 следи да низ конвегира $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x)$. Када у рекурентној вези "пустимо лимес" добијамо једначину $x = \frac{x}{1+x+x^2}$, чија су решења $x = 0$ и $x = 1$. С обзиром на то да је низ опадајући и да се може математичком индукцијом доказати да је $x_n \leq 1$, следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

б) Применом Штолцове теореме добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \left(\begin{array}{c} y_n = \frac{1}{x_n} \\ 1) \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n} = y_n \\ 2) \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty (\text{низ } x_n \text{ је опадајући}) \end{array} \right) \\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+x_n+x_n^2}{x_n} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = 1.
\end{aligned}$$

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$.

в) Важи следеће $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} nx_n \dfrac{\frac{1-nx_n}{x_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} nx_n \dfrac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln n}$.

Због

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln n} &= \left(\begin{array}{c} y_n = \ln n \\ 1) y_{n+1} = \ln(n+1) > \ln n = y_n \\ 2) \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array} \right) \overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - (n+1) - \frac{1}{x_n} + n}{\ln(n+1) - \ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+x_n+x_n^2}{x_n} - 1 - \frac{1}{x_n}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n \frac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln n} = 1 \cdot 1 = 1$.

Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$. △

Задатак 2.54. * Дата је функција $f(x) = e^x + \cos\frac{\pi}{x^2+3}$. Дефинишимо низ $a_{n+1} = f(a_n)$, где је $a_1 \in \mathbb{R}$ произвољно.

а) Показати да важи $f(x) \geq x + 1$ за све $x \in \mathbb{R}$.

б) Показати да је низ (a_n) монотон.

в) Да ли је низ (a_n) ограничен?

Задатак 2.55. * Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^{n^{(-1)^n}} + \sqrt[n]{2^{n(-1)^n}+6^{n(-1)^{n+1}}}, \alpha\in\mathbb{R}.$$

а) Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у зависности од $\alpha\in\mathbb{R}$.

б) Да ли је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен?

в) Да ли постоји $\alpha\in\mathbb{R}$ за које низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира?

Решење. а) Посматрајмо поднизове (a_{2n}) и (a_{2n-1}). Имамо

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{2^n+6^{-n}}\right).$$

Затим, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^n = \begin{cases} +\infty, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -\infty, & \alpha<0\end{cases}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}=2.$

Добили смо

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \begin{cases} +\infty, & \alpha>0\\ 2, & \alpha=0\\ -\infty, & \alpha<0.\end{cases}$$

Слично радимо код подниза (a_{2n-1}),

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \sqrt[n]{2^{-n}+6^n} = \alpha+6.$$

Према томе, скуп тачака нагомилавања је $T(a_n)=\begin{cases}\{\alpha+6\}, & \alpha\neq 0\\ \{6,2\}, & \alpha=0\end{cases}.$

б) Низ је ограничен акко $\alpha=0$.

в) Не постоји α за које низ (a_n) конвергира. То следи из тога што је низ ограничен само ако је $\alpha=0$, а за такво α имамо две тачке нагомилавања. △

Задатак 2.56. * Нека је $b>0$ задати параметар и нека је дат низ

$$a_n = \lim_{k\to\infty}\binom{k}{n}\cdot\left(\frac{b}{k}\right)^n\cdot\left(1-\frac{b}{k}\right)^{k-n}, n\in\mathbb{N}.$$

а) Доказати да је $a_n=\frac{e^{-b}b^n}{n!}$, за свако $n\in\mathbb{N}$.
б) Одредити све вредности параметра b за које у низу (a_n) има једнаких узастопних чланова.
в) За које вредности параметра b члан a_{123} је највећи члан низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Решење. а) Користећи Стирлингову формулу $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}=1$ добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\binom{k}{n} \quad \cdot \quad \left(\frac{b}{k}\right)^n\cdot\left(1-\frac{b}{k}\right)^{k-n} &= \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{n!(k-n)!}\cdot\frac{b^n}{k^n}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{k}{b}}\right)^{\left(-\frac{k}{b}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)(k-n)}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}\frac{k^k}{e^k}}{n!\sqrt{2\pi(k-n)}\frac{(k-n)^{k-n}}{e^{k-n}}}\cdot\frac{b^n}{k^n}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{k}{b}}\right)^{\left(-\frac{k}{b}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)(k-n)}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{b^n}{n!}\sqrt{\frac{2\pi k}{2\pi(k-n)}}\frac{1}{e^n}\frac{k^{k-n}}{(k-n)^{k-n}}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{k}{b}}\right)^{\left(-\frac{k}{b}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)(k-n)}\\
&= \frac{b^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}\cdot e^n\cdot e^{-b}=\frac{e^{-b}b^n}{n!},
\end{aligned}$$

где је $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{k}{b}}\right)^{\left(-\frac{k}{b}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)(k-n)}=e^{-b}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^{k-n}}{(k-n)^{k-n}}=e^n$.

б) Из

$$a_{n+1}=a_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^{-b}b^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^{-b}b^n}{n!} \quad\Leftrightarrow\quad b=n+1$$

следи да за $b\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ чланови a_{b-1} и a_b су једнаки. Ако $b\notin\mathbb{N}\setminus\{1\}$, онда су узастопни чланови различити.

в) Имамо

$$a_{n+1}>a_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^{-b}b^{n+1}}{(n+1)!}>\frac{e^{-b}b^n}{n!} \quad\Leftrightarrow\quad n<b-1.$$

Потребно је да важи $a_{123}>a_n$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Да би то било испуњено мора да важи $122<b-1$ и $123>b-1$, односно $b\in(123,124)$. △

Задатак 2.57. * Нека је дат низ $a_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Решење. Користећи једнакости $\ln(1+x)=x+o(x)$ и $\sin x=x+o(x)$ када $x\to 0$, добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=1.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.58. Нека је $A=\left\{\frac{m+n}{mn+1}|m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Одредити супремум и инфимум скупа A. Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Решење. Важе следеће неједнакости $0<\frac{m+n}{mn+1}\le 1$ за свако $m,n\in\mathbb{N}$.

Прва неједнакост је тривијална, а друга следи из $(m-1)(n-1)\ge 0$.

За $m=n=1$ добијамо да $1\in A$, па је $\sup A=\max A=1$.

Докажимо да је $\inf A=0$. Претпоставимо $\inf A=\varepsilon>0$. Тада постоји $m\in\mathbb{N}$ тако да је $\frac{1}{m}<\varepsilon$. Фиксирајмо такво m и посматрајмо низ $x_n=\frac{m+n}{mn+1}$. Његова гранична вредност је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m+n}{mn+1}=\frac{1}{m}$, одакле постоји члан $x_{n_0}\in(0,\varepsilon)$, па смо тиме дошли до контрадикције. Према томе $\inf A=0$, а минимум не постоји. △

Задатак 2.59. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}, a\geq 0.$

Решење. С обзиром да је

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\lim_{n\to\infty}a^{2n}=\lim_{n\to\infty}a^{3n}=\begin{cases}0, & a\in[0,1)\\ 1, & a=1\\ +\infty, & a>1\end{cases}$$

имамо следеће случајеве:

1) За $a\in(0,1)$ постоји n_0 такво да за свако $n\geq n_0$ важи

$$\sqrt[n]{\frac{1}{1+1+1}}\leq\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}\leq\sqrt[n]{\frac{1+1+1}{1}},$$

одакле применом $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1(b\geq 0)$ и Теореме о два полицајца следи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}=1;$$

2) За $a=1$ имамо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+5+1}{1+1+2}}=1;$

3) За $a>1$ имамо

$$\sqrt[n]{\frac{1}{1+1+1}}\overbrace{\leq}^{\text{за}\, n\geq n_0}\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}=\sqrt[n]{\frac{a^{2n}\left(\frac{1}{a^{2n}}+\frac{5}{a^n}+1\right)}{a^{3n}\left(\frac{1}{a^{3n}}+\frac{1}{a^n}+2\right)}}=\frac{1}{a}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{1}{a^{2n}}+\frac{5}{a^n}+1\right)}{\left(\frac{1}{a^{3n}}+\frac{1}{a^n}+2\right)}}$$
$$\overbrace{\leq}^{\text{за}\, n\geq n_0}\frac{1}{a}\sqrt[n]{\frac{(1+1+1)}{2}},$$

одакле применом $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1\ (b\geq 0)$ и Теореме о два полицајца следи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}=\frac{1}{a}.$$

Према томе

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+5a^n+a^{2n}}{1+a^n+2a^{3n}}}=\begin{cases}1, & a\in[0,1]\\ \frac{1}{a}, & a>1\end{cases}.$$

△

Задатак 2.60. * За реалан низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи $2x_{n+2}+5x_{n+1}+2x_n=0, x_1=a, x_2=b$. У зависности од $a,b\in\mathbb{R}$ испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Решење. $x_n=\frac{4(a+b)}{(-2)^n}+\frac{a+2b}{14}(-2)^n$

△

Задатак 2.61. *

а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}{n^{x+1}}, x>0.$

б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}\right)^n, x>0.$

Решење. а) Примењујући Штолцову теорему добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}{n^{x+1}} = \begin{pmatrix} x_n = 1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x, y_n = n^{x+1} \\ 1)\, y_{n+1} = (n+1)^{x+1} > n^{x+1} = y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{pmatrix}$$

$$\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^x}{(n+1)^{x+1} - n^(x+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x}{n^{x+1}\left((1+\frac{1}{n})^{x+1}-1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x}{n\left(\frac{x+1}{n}\right)+o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x}{x+1+o(1)} = \frac{2^x}{x+1}.$$

С обзиром да постоји та гранична вредност и да је једнака $\frac{2^x}{x+1}$, онда знак $**$ можемо склонити и добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}{n^{x+1}} = \dfrac{2^x}{x+1}$.

б) Нека је $a_n = \frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}$. Тада се Штолцовом теоремом доказује $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Имамо

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+a_n-1)^n = \lim_{n\to\infty} (1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)}.$$

Важи $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}} = e$ и

$$\lim_{n\to\infty} \quad n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x - (1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x)}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(2^x+4^x+\ldots+(2n)^x) - n(1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x)}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}$$

$$= \begin{pmatrix} x_n = n(2^x+4^x+\ldots+(2n)^x) - n(1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x), \\ y_n = 1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x \\ 1)\, y_{n+1} > y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{pmatrix} \overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+2)^x - n(2n+1)^x + 2^x+4^x+\ldots+(2n+2)^x - (1^x+3^x+\ldots+(2n+1)^x)}{(2n+1)^x}.$$

Последњу граничну вредност раздвојићемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+2)^x - n(2n+1)^x}{(2n+1)^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x - n(2n)^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x}{(2n)^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{x}{n}+o(\frac{1}{n})\right) - n\left(1+\frac{x}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)}{1+\frac{x}{2n}+o(\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2}+o(1)}{1+\frac{x}{2n}+o(\frac{1}{n})} = \frac{x}{2}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{2^x+4^x+\ldots+(2n+2)^x-(1^x+3^x+\ldots+(2n+1)^x)}{(2n+1)^x} \\
= &\left(\begin{array}{c} x_n = 2^x+4^x+\ldots+(2n+2)^x-(1^x+3^x+\ldots+(2n+1)^x), \\ y_n=(2n+1)^x \\ 1)\, y_{n+1}>y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty \end{array}\right) \\
\overset{**}{=} &\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)^x-(2n+3)^x}{(2n+3)^x-(2n+1)^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{4}{2n})^x-(1+\frac{3}{2n})^x}{(1+\frac{3}{2n})^x-(1+\frac{1}{2n})^x} \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{4x}{2n}+o(\frac{1}{n}))-(1+\frac{3x}{2n}+o(\frac{1}{n}))}{(1+\frac{3x}{2n}+o(\frac{1}{n}))-(1+\frac{x}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2n}+o(\frac{1}{n})}{\frac{2x}{2n}+o(\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

С обзиром да постоји та гранична вредност и да је једнака $\frac{1}{2}$, онда знак $**$ можемо склонити и добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2n+2)^x-n(2n+1)^x}{(2n+1)^x-(2n-1)^x} = \dfrac{1}{2}$, а одатле $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-1) = \frac{x+1}{2}$. Добили смо

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^x+4^x+\ldots+(2n)^x}{1^x+3^x+\ldots+(2n-1)^x}\right)^n = e^{\frac{x+1}{2}}.$$

△

Задатак 2.62. а) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

б) Ако је $a_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ општи члан низа, одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{\ln a_n}$.

в) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

Решење. а) Погледати задатак 2.36.

б) Коришћењем дела под а) добијамо

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} \cdot 1 = 1, \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{\ln a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{\ln(1+a_n-1)} = 1, \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right).
\end{aligned}
$$

в) Коришћењем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (део под а)) и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{\ln a_n} = 1$ (део под б)) добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}(a_n-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \frac{a_n-1}{\ln a_n} n \ln a_n = \frac{1}{e}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e},$$

при чему је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\ln a_n &= \lim_{n\to\infty} \ln a_n^n = (f(x)=\ln x \text{ је непрекидна}) = \ln \lim_{n\to\infty} a_n^n \\
&= \ln \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^{\frac{n}{n+1}}}{n!} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^{\frac{n+1-1}{n+1}}}{n!} \\
&= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{[n+1)!}{n![(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = (\text{под а)}) = \ln e = 1.
\end{aligned}
$$

△

Задатак 2.63. * Дат је низ $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$.

а) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Одредити $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

в) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \ldots + q^{n-1}a_1)$, где је $|q| < 1$.

Решење. а) Важи

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

б) Низ $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ је растући, одакле је $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$.

в) Нека је $S_n = a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \ldots + q^{n-1}a_1$. Тада је

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= a_{n+1} + qa_n + q^2 a_{n-1} + \ldots + q^n a_1 - a_n - qa_{n-1} - q^2 a_{n-2} - \ldots - q^{n-1}a_1 \\
&= (a_{n+1} - a_n) + q(a_n - a_{n-1}) + \ldots + q^{n-1}(a_2 - a_1) + q^n a_1 > 0,
\end{aligned}$$

па је S_n растући низ. Ограниченост следи из следећег

$$|S_n| = |a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \ldots + q^{n-1}a_1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q^2 + \ldots + \frac{1}{2}q^{n-1} = \frac{1-q^n}{2(1-q)} < \frac{1}{2(1-q)}.$$

Низ S_n конвергира јер је монотон и ограничен. Затим,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= a_{n+1} + qa_n + q^2 a_{n-1} + \ldots + q^n a_1 = a_{n+1} + q(a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \ldots + q^{n-1}a_1) \\
&= a_{n+1} + qS_n.
\end{aligned}$$

Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тада "пуштањем лимеса" у $S_{n+1} = a_{n+1} + qS_n$ добијамо $S = \frac{1}{2} + qS$, а одавде $S = \frac{1}{2(1-q)}$. △

Задатак 2.64. * Нека је дат низ (a_n), такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

а) Одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + a_n\right)^n$.

б) Нека је за $a \neq -1$ дефинисан низ $b_n = n^{p\cos n\pi}(1 + a + a_n)^{-n}, n \geq n_0$. Одредити $\underline{\lim} b_n$ и $\overline{\lim} b_n$ у зависности од реалних параметара a и p.

Решење. а) Из $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ следи $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, одакле је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + a_n\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{1+o(1)} = e.
\end{aligned}$$

б) Посматрајмо поднизове $b_{2n} = \frac{(2n)^p}{(1+a+a_{2n})^{2n}}$ и $b_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)^p(1+a+a_{2n-1})^{2n-1}}$.

1° Ако је $a > 0$ и $p \geq 0$, онда постоји $\varepsilon > 0$ за које важи $a > \varepsilon$ и

$$0 \leq b_{2n} = (2n)^p(1 + a + a_{2n})^{-2n} = \frac{(2n)^p}{(1 + a + a_{2n})^{2n}} \leq \frac{(2n)^p}{(1 + a - \varepsilon)^{2n}}.$$

Степена функција спорије тежи ка бесконачности од експоненцијалне (за $p = 0$ имамо облик $\frac{1}{\infty}$), па важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^p}{(1 + a - \varepsilon)^{2n}} = 0,$$

а одатле $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = 0$. За други подниз важи

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^p(1 + a + a_{2n-1})^{2n-1}} = \left(\tfrac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Низ (b_n) конвергира ка 0 и то је једина тачка нагомилавања.

2° Ако је $a > 0$ и $p < 0$, онда постоји $\varepsilon > 0$ за које важи $a > \varepsilon$ и

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^p(1 + a + a_{2n})^{-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)^{-p}(1 + a + a_{2n})^{2n}} = \left(\tfrac{1}{\infty}\right) = 0.$$

За други подниз постоји $\varepsilon > 0$ за које важи $a > \varepsilon$ и

$$0 \leq b_{2n-1} = (2n-1)^{-p}(1 + a + a_{2n-1})^{-2n+1} = \frac{(2n-1)^{-p}}{(1 + a + a_{2n-1})^{2n-1}} \leq \frac{(2n-1)^{-p}}{(1 + a - \varepsilon)^{2n-1}}.$$

Степена функција спорије тежи ка бесконачности од експоненцијалне (за $p = 0$ имамо облик $\frac{1}{\infty}$), па важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^{-p}}{(1 + a - \varepsilon)^{2n-1}} = 0,$$

а одатле $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n-1} = 0$. Низ (b_n) конвергира ка 0 и то једина тачка нагомилавања.

3° Ако је $a < -2$ и $p \geq 0$, онда постоји $\varepsilon > 0$ за које важи $1 + a - \varepsilon < -1$ и

$$0 \leq b_{2n} = (2n)^p(1 + a + a_{2n})^{-2n} = \frac{(2n)^p}{(1 + a + a_{2n})^{2n}} \leq \frac{(2n)^p}{(1 + a - \varepsilon)^{2n}} = \left(\tfrac{+\infty}{+\infty}\right).$$

Степена функција спорије тежи ка бесконачности од експоненцијалне (за $p = 0$ имамо облик $\frac{1}{\infty}$), па важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^p}{(1 + a - \varepsilon)^{2n}} = 0,$$

а одатле $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = 0$. За други подниз важи

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^p(1 + a + a_{2n-1})^{2n-1}} = \left(\tfrac{1}{-\infty}\right) = 0.$$

Низ (b_n) конвергира ка 0 и то једина тачка нагомилавања.

4° Ако је $-2 < a < 0$ и $p \geq 0$, онда за довољно велико n важи $-1 < 1 + a + a_n < 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^p (1 + a + a_{2n})^{-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^p}{(1 + a + a_{2n})^{2n}} = \frac{+\infty}{0_+} = +\infty.$$

За други подниз важи

$$b_{2n-1} = \frac{(1 + a + a_{2n-1})^{-2n+1}}{(2n-1)^p}.$$

Степена функција спорије тежи ка бесконачности од експоненцијалне (за $p = 0$ имамо облик $\frac{\pm\infty}{1}$), па важи

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \pm\infty,$$

($+\infty$ када $a \in (-1,)$, $-\infty$ када $a \in (-2, -1)$). Низ (b_n) нема тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

4° Ако је $a = -2$, онда имамо $b_{2n} = \frac{(2n)^p}{(-1+a_{2n})^{2n}}$ и $b_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)^p(-1+a_{2n-1})^{2n-1}}$. Из

$$\lim_{n\to\infty} (-1 + a_{2n})^{2n} = \lim_{n\to\infty} (1 - a_{2n})^{-\frac{1}{a_{2n}}(-a_{2n})2n} = e^0 = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} (-1 + a_{2n-1})^{2n-1} = (-1)(1 - a_{2n-1})^{-\frac{1}{a_{2n-1}}(-a_{2n-1})(2n-1)} = -e^0 = -1$$

добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \begin{cases} +\infty, & p > 0 \\ 1, & p = 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \begin{cases} +\infty, & p > 0 \\ -1, & p = 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

Према томе, $T(b_n) = \{1\}$ за $a = -2, p = 0, T(b_n) = \{-1\}$ за $a = -2, p = 0$ и $T(b_n) = \{0\}$ за $a = -2, p < 0$.

△

Задатак 2.65. * Нека је низ (x_n) задат рекурентно $x_{n+1} = \frac{3x_n^2}{(1+x_n)^3-1}, n \in \mathbb{N}$ и нека је $x_1 > 0$. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Задатак 2.66. * Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{m}}{n^m}$, у зависности од $m \in \mathbb{N}$.

Решење. Користећи Стирлингову формулу имамо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{m}}{n^m} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-m)!m!n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n-m)}\left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m} m!n^m} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(n-m)}} \frac{1}{e^m} \frac{n^{n-m}}{(n-m)^{n-m}} \frac{1}{m!} = \frac{1}{m!}, \end{aligned}$$

где је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n-m}}{(n-m)^{n-m}} = e^m$. △

Задатак 2.67. * Наћи тачке нагомилавања низа

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[k]{3^k - 2\ln k + k}, & n = 2k; \\ (-1)^k \left(2k\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1\right)\right)^k, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Решење. Општи члан низа можемо представити на следећи начин

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[2m]{3^{2m-1} - 2\ln(2m-1) + (2m-1)}, & n = 4m; \\ \left(4m\left(\sqrt{1+\frac{1}{2m}} - 1\right)\right)^{2m}, & n = 4m-1; \\ \sqrt[2m-1]{3^{2m-1} - 2\ln(2m-1) + (2m-1)}, & n = 4m-2; \\ -\left((4m-2)\left(\sqrt{1+\frac{1}{2m-1}} - 1\right)\right)^{2m-1}, & n = 4m-3. \end{cases}$$

па ћемо посматрати поднизове $(a_{4m}), (a_{4m-1}), (a_{4m-2})$ и (a_{4m-3}). Имамо

$$\lim_{m\to\infty} a_{4m} = \lim_{m\to\infty} a_{4m-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2\ln n + n} = 3.$$

Затим, из

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(2n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{4n} + o(\frac{1}{n})\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{4}+o(1)} = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

имамо да је $\lim\limits_{m\to\infty} a_{4m-1} = e^{-\frac{1}{4}}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} a_{4m-3} = -e^{-\frac{1}{4}}$.

Добили смо скуп тачака нагомилавања $T(a_n) = \{3, e^{-\frac{1}{4}}, -e^{-\frac{1}{4}}\}$. △

2.5 Кошијев принцип конвергенције

Дефиниција 2.8. За низ реалних бројева (x_n) кажемо да је Кошијев ако задовољава следеће

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\forall n, p \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon).$$

Одавде следи да низ није Кошијев ако задовољава следеће

$$(\exists\varepsilon > 0) \quad (\forall n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\exists n, p \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \land |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon)$$

Теорема 2.7. *Реалан низ конвергира акко је Кошијев.*

Задатак 2.68. Испитати конвергенцију низа $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Решење. Доказаћемо да је низ Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Због

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

узећемо $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тада за свако $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Према томе, низ конвергира. △

Задатак 2.69. Испитати конвергенцију низа $x_n = 1 + \frac{\sin 1}{2^2} + \frac{\sin 2}{2^3} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$.

Решење. Доказаћемо да је низ Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Због

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{(2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\ &< \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

изаберимо $n_0 = \max\{\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, 1\}$. Тада за свако $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Према томе, низ конвергира. △

Задатак 2.70. Испитати конвергенцију низа $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Решење. Доказаћемо да низ није Кошијев. За $n, p \in \mathbb{N}$ важи

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} = (\text{узећемо } p = n) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Према томе, за $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и за свако $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји $p = n > n_0$ тако да је

$$|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon.$$

Доказали смо да је низ дивергентан. △

Задатак 2.71. Нека је дат рекурентан низ $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) a_n,\ a_1 = 1$.

а) Доказати неједнакост $a_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

б) Доказати $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{e}{2^n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

в) Испитати конвергенцију низа (a_n).

Решење. а) Општи члан низа је

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) a_{n-2} = \ldots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} a_1. \end{aligned}$$

Математичком индукцијом се може доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} a_1.$$

Коришћењем неједнакости између геометријске и аритметичке средине добијамо

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} \\ &\leq \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1}{n} = \frac{n + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

б) Коришћењем неједнакости под а) и неједнакости $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ (задатак 2.24) добијамо

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n} a_n - a_n\right)\right| = \frac{1}{2^n} a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{2^n}.$$

в) Доказаћемо да је низ (a_n) Кошијев. Нека је произвољно $\varepsilon > 0$. Тада је

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \ldots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} + a_n| \\ &\leq \frac{e}{2^{n+p-1}} + \frac{e}{2^{n+p-2}} + \ldots + \frac{e}{2^n} = \frac{e}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{e}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Узећемо $n_0 = \max\{1, \left[\log_2 \frac{e}{\varepsilon}\right] + 2\}$ и тада за свако $n > n_0$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \frac{e}{2^{n-1}} < \varepsilon$. △

Задатак 2.72. * Нека је дат низ (x_n) код којег важи $x_{n+1}^2 + x_n^2 \leq \dfrac{1}{n^4} + 2x_n x_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Испитати конвергенцију низа (x_n).

Решење. Неједнакост можемо записати у следећем облику

$$x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1} + x_n^2 \leq \frac{1}{n^4} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad (x_{n+1} - x_n)^2 \leq \frac{1}{n^2} \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Доказаћемо да је низ Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада важи

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\ &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \frac{1}{(n+p-1)^2} + \frac{1}{(n+p-2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \frac{1}{(n+p-2)(n+p-3)} + \ldots + \frac{1}{(n(n-1))} \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Избором $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 2$, добијамо за свако $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. △

Задатак 2.73. Нека је (a_n) реалан низ такав да задовољава следеће:

$$(\exists \varepsilon > 0) \ (\forall m, n \in \mathbb{N}) \ (m \neq n \Rightarrow |a_m - a_n| \geq \varepsilon).$$

а) Да ли низ (a_n) може да има конвергентан подниз?

б) Да ли низ (a_n) може бити ограничен?

Решење. а) Претпоставимо да постоји конвергентан подниз (a_{n_k}). Тада је подниз (a_{n_k}) Кошијев, па за свако $\varepsilon_1 > 0$ постоји $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $k > k_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n_k} - a_{n_{k+p}}| < \varepsilon$. Према томе, ако узмемо $\varepsilon_1 = \varepsilon$, онда постоје два члана $a_{n_k}, a_{n_{k+p}}$ низа (a_n) за које важи $|a_{n_k} - a_{n_{k+p}}| < \varepsilon$, што доводи код контрадикције. Низ (a_n) не може имати конвергентан подниз.

б) Из чињенице да сваки ограничен низ има конвергентан подниз следи да низ (a_n) није ограничен. △

Задатак 2.74. * Нека је реална функција f непрекидна на свом домену D_f и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у D_f.

а) Ако је $D_f = [a, b]$, доказати да је $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ.

б) Ако је $D_f = (a, b)$, да ли $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ мора бити Кошијев низ? Образложити одговор.

в) Нека је x произвољан реалан број и a_n његова приближна вредност са n децимала. Испитати конвергенцију низа $b_n = \operatorname{arctg} e^{a_n}$.

Задатак 2.75. Нека за низ (a_n) важи $a_{n+1} - a_n \sim \frac{1}{n^2}$ када $n \to \infty$.
а) Доказати да је (a_n) растући низ почев од неког члана.
б) Доказати да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је за све $n \geq n_0, a_{n+1} - a_n < \frac{2}{n(n+1)}$.
в) Ако је $m > n \geq n_0$, доказати да је $a_m - a_n < \frac{2}{n}$.
г) Доказати да низ (a_n) конвергира.

2.6 Разни задаци

Задатак 2.76. Нека је дат низ (x_n) и низови $y_n = x_n + x_{n+1}$ и $z_n = x_n + x_{n+4}$. Ако низови (y_n) и (z_n) конвергирају, доказати да и низ (x_n) конвергира.

Решење. Из конвергенције низова (y_n) и (z_n) следи и конвергенција низа $z_n - y_n = x_{n+4} - x_{n+1}$, односно низа $t_n = x_{n+3} - x_n$. Из

$$x_{n+3} + x_n = (x_{n+3} + x_{n+2}) - (x_{n+2} + x_{n+1}) + (x_{n+1} + x_n) = y_{n+2} - y_{n+1} + y_n$$

следи и конвергенција низа $p_n = x_{n+3} + x_n$. Одузимањем конвергентних низова p_n и t_n добијамо да низ (x_n) конвергира. △

Задатак 2.77. Наћи граничне вредности:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n^3+n)\cos\frac{1}{n^2+n}+2}{\sqrt{n}}$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)+n^{2011}+\sqrt[n]{0.9}}{n^3-(1.1)^n}$.

Решење. а) Низ $x_n = \sin(n^3+n)\cos\frac{1}{n^2+n} + 2$ је ограничен $(-1 \leq x_n \leq 3)$, па је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^3+n)\cos\frac{1}{n^2+n}+2}{\sqrt{n}} = 0.$$

б) Имамо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)+n^{2011}+\sqrt[n]{0.9}}{n^3-(1.1)^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2011}\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2011}}+1+\frac{\sqrt[n]{0.1}}{n^{2011}}\right)}{(1.1)^n\left(\frac{n^3}{(1,1)^n}-1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2011}}{(1.1)^n} \cdot \frac{\frac{\ln(n+1)}{n^{2011}}+1+\frac{\sqrt[n]{0.1}}{n^{2011}}}{\frac{n^3}{(1.1)^n}-1} = 0.\end{aligned}$$

Овде смо користили $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2011}}{(1.1)^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^{2011}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{0.1}}{n^{2011}} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{(1.1)^n} = 0$. △

Задатак 2.78. * Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+a)^\alpha - (n+b)^\alpha)$, у зависности од $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. Користећи једнакост $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ када $x\to 0$ имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left((n+a)^\alpha-(n+b)^\alpha\right) &= \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-\left(1+\frac{b}{n}\right)^\alpha\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(1+\frac{a\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{b\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{(a-b)\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(a-b)\alpha n^{\alpha-1}+o\left(n^{\alpha-1}\right)=\begin{cases}0, & \alpha<1\\ (a-b)\alpha, & \alpha=1\\ \operatorname{sgn}(a\alpha-b\alpha)\infty, & \alpha>1.\end{cases}
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.79. Нека је реалан низ (x_n) дефинисан са $x_{n+1}=\frac{-x_n}{2+x_n^2}$ и $x_1>0$, за $n\geq 1$.
а) Доказати да су поднизови (x_{2n}) и (x_{2n-1}) монотони.
б) Испитати конвергенцију низа (x_n).

Задатак 2.80. * Нека је дат низ (a_n) за који важи $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$.
б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{a_n}}{\sqrt{n}}$.

Задатак 2.81. * Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n!)}{nH_n}\right)^{H_n}$, где је $H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Решење. Користећи Стирлингову формулу $\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$ (задатак 2.27), где је γ Ојлерова константа, добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n!)}{nH_n}\right)^{H_n} &= \lim_{n\to\infty} e^{H_n\ln\left(\frac{\ln(n!)}{nH_n}\right)}=\lim_{n\to\infty} e^{H_n\ln\left(\frac{n\ln n-n+O(\ln n)}{nH_n}\right)}=\lim_{n\to\infty} e^{H_n\ln\left(\frac{\ln n-1+O(\frac{\ln n}{n})}{H_n}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{H_n\ln\left(\frac{\ln n-H_n+H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})}{H_n}\right)}=\lim_{n\to\infty} e^{H_n\ln\left(1+\frac{\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})}{H_n}\right)}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} H_n\left(\frac{\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})}{H_n}+o(\frac{\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})}{H_n})\right)}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})+o\left(\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})\right)\right)}=e^{-\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Користили смо $\lim\limits_{n\to\infty}O(\frac{\ln n}{n})=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}o\left(\ln n-H_n-1+O(\frac{\ln n}{n})\right)=0$. △

Задатак 2.82. * Нека је дат низ $x_n=\cos n$, $n\in\mathbb{N}$
а) Доказати да низ (x_n) дивергира.
б) Доказати да за сваки интервал $(a,b)\subset[-1,1]$ постоји n такво да је $x_n\in(a,b)$.

Задатак 2.83. * Наћи супремум и инфимум скупа $A=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})+1|n\in\mathbb{N}\}\cup\{\frac{20n+1}{2n}|n\in\mathbb{N}\}$.

Задатак 2.84. * Одредити супремум и инфимум скупа $A=\left\{\frac{10-3n}{n+3}|n\in\mathbb{N}\right\}$. Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Задатак 2.85. * Одредити супремум и инфимум скупа $A = \left\{\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{2-3m}{m+1}|m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Задатак 2.86. a) У случају да постоје, наћи $\sup A, \inf A, \max A$ и $\min A$, где је

$$A = \left\{\frac{n+1}{3n-5}\cdot\frac{4m-1}{2m}|\ m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

б) Да ли важи $\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}\cdot\sup\{b_n|n\in\mathbb{N}\} = \sup\{a_nb_n|n\in\mathbb{N}\}$ за било која два реална низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Образложити одговор.

Решење. а) Нека је $B = \left\{\frac{n+1}{3n-5}|m\in\mathbb{N}\right\}$ и $C = \left\{\frac{4m-1}{2m}|n\in\mathbb{N}\right\}$. Из $\frac{4m-1}{2m} = 2-\frac{1}{2m}$ елементе скупа C можемо поређати у низ чији је општи члан $c_n = 2-\frac{1}{2m}$. Овај низ је растући, па је $\sup C = \lim\limits_{m\to\infty}\left(2-\frac{1}{2m}\right) = 2$ и $\inf C = \min C = \frac{3}{2}$(за $m=1$). Због $b_n = \frac{n+1}{3n-5} = \frac{1}{3}\frac{3n-5+8}{3n-5} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{8}{3n-5}\right)$ имамо да је $b_1 = -1$ и низ $b_n, n\geq 2$ је опадајући. Према томе, $\sup B = \max B = 3$ за $n=2$ и $\inf B = \min B = -1$.

Добили смо $\sup A = 6$ и $\inf A = -2$, а $\max A$ и $\min A$ не постоје.

б) Не важи једнакост. Ако посматрамо низове $a_n = 1, n\neq 1, a_1 = 2$ и $a_n = 1, n\neq 2, a_2 = 2$ имамо $\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\} = 2$, $\sup\{b_n|n\in\mathbb{N}\} = 2$ и $\sup\{a_nb_n|n\in\mathbb{N}\} = 2$. △

Задатак 2.87. Одредити супремум и инфимум скупа $A = \left\{\frac{2n+m+mn+2}{2n+18m-4mn-9}|m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Решење. Скуп се може записати на следећи начин

$$A = \left\{\frac{(m+2)(n+1)}{(1-2m)(-9+2n)}|m,n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{m+2}{1-2m}\cdot\frac{n+1}{2n-9}|m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Нека је $B = \left\{\frac{m+2}{1-2m}|m\in\mathbb{N}\right\}$ и $C = \left\{\frac{n+1}{2n-9}|n\in\mathbb{N}\right\}$. Из $\frac{m+2}{1-2m} = -\frac{1}{2}\frac{2m-1+5}{2m-1} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2m-1}\right)$ елементе скупа B можемо поређати у низ чији је општи члан $a_n = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2m-1}\right)$. Овај низ је растући, па је $\sup B = \lim\limits_{m\to\infty} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2m-1}\right) = -\frac{1}{2}$ и $\inf B = \min B = -3$(за $m=1$). Због $c_n = \frac{n+1}{2n-9} = \frac{1}{2}\frac{2n-9+11}{2n-9} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{11}{2n-9}\right)$ имамо да је $c_1 = -\frac{2}{7}, c_2 = -\frac{3}{5}, c_3 = -\frac{4}{3}, c_4 = -5$ и низ $c_n, n\geq 5$ је опадајући. Према томе, $\sup C = \max C = 6$ за $n=5$ и $\inf C = \min C = -5$.

Добили смо

$$\sup A = \max A = 15\ (n=5, m=1) \quad \text{и} \quad \inf A = \min A = -18\ (m=1, n=5).$$

△

Задатак 2.88. * Одредити супремум и инфимум скупа

$$A = \left\{\frac{m}{n}+\frac{4n}{m}|m,n\in\mathbb{N}, m<10n\right\}.$$

Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Задатак 2.89. * Одредити супремум и инфимум скупа $A = \left\{\frac{m^2+1}{3m^2+m}|m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Да ли постоје максимум и минимум скупа A?

Задатак 2.90. * Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+5(\sqrt{n})^n+x^n}, x\geq 0$.

Задатак 2.91. * Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\ln n!}{2n+2}$.

Решење. Користећи Стирлингову формулу $\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n)$ добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\ln n!}{2n+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-n\ln n+n+O(\ln n)}{2n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n+n+O(\ln n)}{2n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n}{2n+2}+\frac{n}{2n+2}+\frac{O(\ln n)}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Код последње једнакости искористили смо следеће граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n}{2n+2}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{O(\ln n)}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{O(\ln n)}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{2n+2}=0.$$

△

Задатак 2.92. Испитати конвергенцију низа $x_n=\frac{na^n+b^n}{1+a^n}$ у зависности од параметара $a,b>0$.

Решење. С обзиром да је $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & a\in(0,1)\\ 1, & a=1\\ +\infty, & a>1\end{cases}$ имамо неколико случајева.

1) За $a>1$ и $a\geq b$ имамо

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{na^n+b^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\left(n+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\frac{1}{a^n}+1}=+\infty.$$

2) За $a>1$ и $a<b$ имамо

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{na^n+b^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^n\left(n\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)}{a^n\left(\frac{1}{a^n}\right)+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n\frac{n\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}{\frac{1}{a^n}+1}=+\infty.$$

3) За $a=1$ имамо

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+b^n}{1+1}=+\infty.$$

4) За $a\in(0,1)$ имамо $\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, па гранична вредност зависи од $\lim\limits_{n\to\infty}b^n$ и добијамо

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{na^n+b^n}{1+a^n}=\begin{cases}0, & b\in(0,1)\\ 1, & b=1\\ +\infty, & b>1\end{cases}$$

Гранична вредност низа је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0, & a,b\in(0,1)\\ 1, & a\in(0,1),b=1\\ +\infty, & \text{иначе.}\end{cases}$ △

Задатак 2.93. Испитати конвергенцију низа $x_n=\frac{1+a^n}{n+b^n}$ у зависности од параметара $a,b>0$.

Решење. Ако је $a > b > 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{b^n(\frac{n}{b^n}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{(\frac{n}{b^n}+1)} = +\infty.$$

Ако је $a = b > 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n}+1}{\frac{n}{a^n}+1} = 1.$$

Ако је $b > a > 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{b^n(\frac{n}{b^n}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{(\frac{n}{b^n}+1)} = 0.$$

Ако је $0 \le a \le 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = 0.$$

Ако је $b = 1, a > 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+1} = +\infty.$$

Ако је $a > 1, 0 \le b \le 1$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{n(1+\frac{b^n}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{n(1+\frac{b^n}{n})} = +\infty.$$

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & b > a > 1 \text{ или } a \in [0,1] \\ 1, & a = b > 1 \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

△

Задатак 2.94. * Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$.

Решење. Примењујући Штолцову теорему добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}}{n^2\sqrt{n}} = \left(\begin{array}{c} y_n = n^2\sqrt{n} \\ 1) y_{n+1} = (n+1)^2\sqrt{n+1} > n^2\sqrt{n} = y_n \\ 2) \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array} \right) \\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)^2\sqrt{n+1} - n^2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}\left((1+\frac{1}{n})^2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left((1+\frac{1}{n})^2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left((1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))(1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})) - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+o(1)} = 1.
\end{aligned}$$

С обзиром да постоји гранична вредност и да је једнака 1, онда знак $**$ можемо склонити и добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k} = 1$. △

Задатак 2.95. * Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{5}{(3x)^n}+2x^n}$ у зависности од параметра $x>0$.

Задатак 2.96. Дат је позитиван низ (a_n). Ако је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Решење. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, тада постоји $\varepsilon>0$ тако да је $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1+\varepsilon$ за свако $n\geq n_0$, па је $a_n\geq a_{n_0}(1+\varepsilon)^{n-n_0}, n\geq n_0$. Из дивергенције низа на десној страни следи и дивергенција низа (a_n), то јест $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. △

Задатак 2.97. * Дат је низ $x_n=\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+3n}\right)^{2n^2+n}$.

а) Ако је $y_n=\ln x_n$ (за $n\geq n_0$), доказати да је $y_n=2(a-3)n+8+a-a^2+o(1)$, када $n\to\infty$.

б) У зависности од реалног параметра a, одредити $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Решење. а) Помоћу развоја за функцију $\ln(1+x)$ добијамо

$$\begin{aligned}
y_n &= (n^2+3n)\ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+3n}\right)=(2n^2+n)\ln\left(\frac{n^2\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}\right)\\
&= (2n^2+n)\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-1}\right)\\
&= (2n^2+n)\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\right)\\
&= (2n^2+n)\ln\left(1+\frac{a-3}{n}+\frac{10-3a}{n^2}\right)\\
&= (2n^2+n)\left(\frac{a-3}{n}+\frac{10-3a}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a-3}{n}+\frac{10-3a}{n^2}\right)^2+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\\
&= (2n^2+n)\left(\frac{a-3}{n}+\frac{10-3a}{n^2}-\frac{a^2-6a+9}{2n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\\
&= (2n^2+n)\left(\frac{a-3}{n}+\frac{11-a^2}{2n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\\
&= 2(a-3)n+(11-a^2+a-3)+o(1)=2(a-3)n+8+a-a^2+o(1).
\end{aligned}$$

б) Из трансформације $x_n=e^{\ln x_n}, n\geq n_0$ и непрекидности функције $g(x)=e^x$ имамо

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{y_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\begin{cases}+\infty, & a>3\\ 0, & a<3\\ e^2, & a=3.\end{cases}$$

△

Задатак 2.98. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Решење. Користећи тригонометријску формулу $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x$ и познати развој $\sin x = x + o(x)$ када $x \to 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi + n\pi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left((\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) \cdot \frac{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}{\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} + o(\tfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})\right) = 0.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 2.99. Нека су дати низови $a_n = \dfrac{a\cdot 2^{(-1)^n n} + n^b}{\ln n + n^4 + 1}$ и $b_n = \dfrac{1^{|a|} + 2^{|a|} + \ldots + n^{|a|}}{n^{|a|+1}}$, где су a, b неки реални бројеви.

а) Наћи све тачке нагомилавања низа $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, у зависности од параметара a и b.

б) За које вредности a и b низ $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира?

Решење. Нађимо тачке нагомилавања низ a_n. Посматрајмо поднизове (a_{2k}) и (a_{2k-1}). Важи

$$a_{2k} = \frac{a\cdot 2^{2k} + n^b}{\ln 2k + (2k)^4 + 1} \text{ и } a_{2k-1} = \frac{a\cdot \frac{1}{2^{2k-1}} + (2k-1)^b}{\ln(2k-1) + (2k-1)^4 + 1}.$$

Ако је $a > 0$, онда је $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a\cdot 2^{2k}+n^b}{\ln 2k + (2k)^4+1} = +\infty$.

Ако је $a < 0$, онда је $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a\cdot 2^{2k}+(2k)^b}{\ln 2k + (2k)^4+1} = -\infty$.

Ако је $a = 0$, онда је $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(2k)^b}{\ln 2k + (2k)^4+1} = \begin{cases} 0, & b<4 \\ 1, & b=4 \\ +\infty, & b>4. \end{cases}$

За други подниз важи

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a\cdot \frac{1}{2^{2k-1}} + (2k-1)^b}{\ln 2k - 1 + (2k-1)^4 + 1} = \begin{cases} 0, & b<4 \\ 1, & b=4 \\ +\infty, & b<4. \end{cases}$$

Према томе, за $b < 4, a = 0$ скуп тачака нагомилавања низа (a_n) у $\mathbb{R}$ је $T(a_n) = \{0\}$, а за $b = 4, a = 0$ имамо $T(a_n) = \{1\}$.

Конвергенција низа (b_n) следи из

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1^{|a|} + 2^{|a|} + \ldots + n^{|a|}}{n^{|a|+1}} = \left(\begin{array}{c} x_n = 1^{|a|} + 2^{|a|} + \ldots + n^{|a|}, y_n = n^{|a|+1} \\ 1)\, y_{n+1} = (n+1)^{|a|+1} > n^{|a|+1} = y_n \\ 2)\, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{array}\right) \\
&\overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{|a|}}{(n+1)^{|a|+1} - n^{|a|+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{|a|}(1+\frac{1}{n})^{|a|}}{n^{|a|+1}\left((1+\frac{1}{n})^{|a|+1} - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{|a|}}{n\left((1+\frac{1}{n})^{|a|+1} - 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{|a|}}{n\left(1 + \frac{|a|+1}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{|a|}}{|a|+1+o(1)} = \frac{1}{|a|+1}.
\end{aligned}$$

Гранична вредност $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ постоји у $\overline{\mathbb{R}}$ (особина 3) код Теореме 2.5), па важи знак једнакости код $\overset{**}{=}$.

Скуп тачака нагомилавања низа (b_n) је $T(b_n)=\{\frac{1}{|a|+1}\}$.

За $b<4, a=0$ скуп тачака нагомилавања низа (a_n+b_n) је $T(a_n+b_n)=\{1\}$, а за $b=4, a=0$ имамо $T(a_n)=\{2\}$.

б) Низ (a_n+b_n) конвергира за $a=0, b\leq 4$. $\triangle$

Задатак 2.100. Наћи граничну вредност низа $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot(2x)^n+n^2+\dfrac{2}{(3x)^n}}$, где је $x>0$.

3 РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

3.1 Појам и својства

Дефиниција 3.1. За скуп $A \subset \mathbb{R}$ кажемо да је **симетричан** ако за свако $x \in A$ број $-x$ такође припада A. Функција $f : A \to \mathbb{R}$ дефинисана на симетричном скупу A је **парна** ако за свако $x \in A$ важи $f(-x) = f(x)$, а **непарна** ако је за свако $x \in A$ испуњено $f(-x) = -f(x)$.

Дефиниција 3.2. За функцију реалне променљиве $f : A \to \mathbb{R}$ кажемо да је **периодична** ако постоји позитиван број T (који се назива **периодом** функције f), такав да важи

$$(\forall x \in A)(x + T \in A \text{ и } f(x + T) = f(x)).$$

Најмањи позитиван број T (ако постоји) за који важи наведено својство назива се **основним периодом** функције f.

Дефиниција 3.3. Нека је $B \subset A \subset \mathbb{R}$. Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је:

а) **растућа** на B ако је $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;

б) **строго растућа** на B ако је $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;

в) **опадајућа** на B ако је $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$;

г) **строго опадајућа** на B ако је $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Дефиниција 3.4. За функцију $f : A \to \mathbb{R}$ кажемо да је **ограничена одозго** (односно **ограничена одоздо, ограничена**) на A ако је такав скуп њених вредности $\{f(x)|x \in A\}$, тј. ако постоји $M \in \mathbb{R}$, такво да је за све $x \in A$ испуњено $f(x) < M$ (односно $f(x) > M, |f(x)| < M$).

3.2 Гранична вредност. Својства

Дефиниција 3.5. Нека је $f : A \to \mathbb{R}$ функција реалне променљиве и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ **гранична вредност (лимес) функције** f **у тачки** a и пишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ако за сваку околину $V(b)$ тачке b постоји околина $U(a)$ тачке a, таква да

$$(\forall x \in A)(x \in U(a), x \neq a \Rightarrow f(x) \in V(b)),$$

односно

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,\, b \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; (\forall V(b))\; (\exists U(a))\; (\forall x \in U(a) \backslash \{a\})\; f(x) \in V(b).$$

Посматрајмо случај коначних, односно бесконачних a и b.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) = b, a, b \text{ коначни} &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall \epsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall x \in A)\, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon),\\
\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ a \text{ коначан} &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall M)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall x \in A)\, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M),\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) = b,\ b \text{ коначан} &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall \epsilon > 0)\, (\exists M)\, (\forall x \in A)\, (x > M \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \epsilon),\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall M)\, (\exists N)\, (\forall x \in A)\, (x > N \Rightarrow f(x) > M).
\end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Гранична вредност функције $f : A \to \mathbb{R}$ у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ једнака је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ (x_n), такав да је $x_n \in A\setminus\{a\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

Теорема 3.2. *Ако функција f има лимес у тачки a, онда је једнозначно одређен.*

Теорема 3.3. *Ако функција f има коначну граничну вредност у тачки a, онда постоји околина $U(a)$тачке a, таква да је функција f ограничена на скупу $U(a)\setminus\{a\}$.*

Теорема 3.4. *Нека су $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ три функције реалне променљиве, а тачка нагомилавања скупу A и нека је $f(x) \le g(x) \le h(x)$ на некој околини $U(a)\setminus\{a\}$ тачке a. Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.*

Теорема 3.5. *Ако за два низа (x'_n) и (x''_n) која конвергирају ка a важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = c, b \ne c$, онда гранична вредност $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не постоји.*

Задатак 3.1. На основу дефиниције граничне вредности доказати да је $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Решење. Потребно је доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за свако x које задовољава $0 < |x-2| < \delta$ важи $x^2 - 4| < \varepsilon$, односно

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon).$$

Важи $|x^2 - 4| = |x-2||x+2| < \delta|x+2|$. Из $-\delta < x - 2 > \delta$ следи $2 - \delta < x < 2 + \delta$. Ако узмемо $\delta \le 1$, онда је $1 < x < 3$, односно $3 < x+2 < 5$. Према томе, $|x^2-4| < \delta|x+2| < 5\delta$. Ако изаберемо $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, добијамо $|x^2 - 4| < \varepsilon$. △

Задатак 3.2. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Решење. Из неједнакости $[x] \le x < [x] + 1$ следи $\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]}$, где је $[x]$ цео део од x. Знамо да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{[x]} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{[x]+1} = 0$, па је на основу Теореме 3.4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. △

Задатак 3.3. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| = +\infty$.

Задатак 3.4. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \pm\infty, (+$ ако је $a_n > 0$, $-$ ако је $a_n < 0)$.

Задатак 3.5. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty, & n > m; \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$

Задатак 3.6. а) Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

б) Доказати да је $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

в) Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Решење. а) Из $[x] \leq x < [x]+1$ следи да је $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$. Познато је да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e$, па је на основу Теореме 3.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

б) Увођењем смене $t=-x\to+\infty$ добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e.\end{aligned}$$

в) Увођењем смене $t=\frac{1}{x}$, имајући у виду да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, добијамо $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. △

Задатак 3.7. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-3x+1}\right)^{x+2}$.

Решење. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x-1}{x^2-3x+1}\right)^{x+2} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7x-2}{x^2-3x+1}\right)^{x+2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3x+1}{7x-2}}\right)^{\frac{x^2-3x+1}{7x-2}\frac{7x-2}{x^2-3x+1}(x+2)} = e^7,\end{aligned}$$

при чему је $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x-2}{x^2-3x+1}(x+2) = 7$. △

Задатак 3.8. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$.

Решење. За низове $x_n = \dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ и $x_n' = \frac{1}{n\pi}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 0.$$

На основу Теореме 3.5 добијамо да $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ не постоји. △

Задатак 3.9. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$.

Решење. За низове $x_n = \dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ и $x_n' = \frac{1}{2n\pi}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1.$$

На основу Теореме 3.5 добијамо да $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ не постоји. △

Дефиниција 3.6. Кажемо да је функција f **бесконачно мала** у односу на функцију g кад $x \to a$ и пишемо

$$f = o(g) \ (x \to a)$$

ако постоји околина U тачке a, таква да је $f(x) = \alpha(x)g(x)$ за $x \in U\backslash\{a\}$, где је $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Дефиниција 3.7. Кажемо да је функција f **велико O** од функције g кад $x \to a$ и пишемо

$$f = O(g) \ (x \to a)$$

ако постоји околина U тачке a, таква да је $f(x) = \beta(x)g(x)$ за $x \in U\backslash\{a\}$, где је $\beta(x)$ ограничена на $U\backslash\{a\}$.

Дефиниција 3.8. Кажемо да је функција f **асимтотски понаша** као функција g кад $x \to a$ и пишемо

$$f \sim g \ (x \to a)$$

ако постоји околина U тачке a, таква да је $f(x) = \gamma(x)g(x)$ за $x \in U\backslash\{a\}$, при чему је $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x) = 1$.

Задатак 3.10. а) Ако је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, тада је $f = o(g)$ када $x \to a$.

б) Ако је $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на $U(a)\backslash\{a\}$, тада је $f = O(g)$ када $x \to a$.

в) Ако је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = a$, тада је $f \sim g$ када $x \to a$.

Задатак 3.11. Нека $x \to a$ и $a > b > 0$. Доказати да за функције f и g и константу c важе следеће особине:

а) $o(cf) = c \cdot o(f) = o(f)$;

б) $o(1) \to 0$;

в) $o(f) + o(f) = o(f)$;

г) $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;

д) $f \cdot o(g) = o(fg)$;

ђ) Ако је $f \sim g$, онда је $o(f) = o(g)$.

Решење. Решење се може наћи у књизи "Математичка анализа I", Зоран Каделбург, став 4.8.4. $\triangle$

Задатак 3.12. Нека $x \to 0$ и $a > b > 0$. Доказати:

а) $o(x^a) + o(x^b) = o(x^b)$;

б) $x^a \mapsto o(x^b)$ (x^a се може заменити са $o(x^b)$);

в) $o(x^a) \mapsto o(x^b)$ ($o(x^a)$ се може заменити са $o(x^b)$);

Решење. а) Из $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^a)+o(x^b)}{x^b}=\frac{:x^b}{:x^b}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^{a-b})+o(1)}{1}=0$ и на основу задатка 3.10 следи

$$o(x^a)+o(x^b)=o(x^b).$$

б) Из $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^a}{x^b}=\frac{:x^b}{:x^b}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{a-b}}{1}=0$ и на основу задатка 3.10 следи

$$x^a=o(x^b),$$

односно x^a се може заменити са $o(x^b)$. Обрнуто не важи. Не можемо увек $o(x^b)$ заменити са x^a.

в) Из $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^a)}{x^b}=\frac{:x^b}{:x^b}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^{a-b})}{1}=0$ и на основу задатка 3.10 следи

$$o(x^a)=o(x^b),$$

односно x^a се може заменити са $o(x^b)$. Обрнуто не важи. Не можемо увек $o(x^b)$ заменити са $o(x^a)$. △

Задатак 3.13. Нека $x\to+\infty$ и $a>b>0$. Доказати:

а) $o(x^a)+o(x^b)=o(x^a)$;

б) $x^b\mapsto o(x^a)$;

в) $o(x^b)\mapsto o(x^a)$.

Решење. Сличан као задатак 3.12. △

Задатак 3.14. Нека је $x\to+\infty$ и $a>b>0$. Доказати:

а) $o\left(\frac{1}{x^a}\right)+o\left(\frac{1}{x^b}\right)=o\left(\frac{1}{x^b}\right)$;

б) $\frac{1}{x^a}\mapsto o\left(\frac{1}{x^b}\right)$;

в) $o\left(\frac{1}{x^a}\right)\mapsto o\left(\frac{1}{x^b}\right)$.

Решење. Следи на основу задатка 3.12 када узмемо смену $t=\frac{1}{x}\to 0$. △

Задатак 3.15. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Важи $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$, односно $\sin x=x+o(x)$ $(x\to 0)$.

Задатак 3.16. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Важи $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$, односно $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ $(x\to 0)$.

Задатак 3.17. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$.

Важи $\log_a(1+x)\sim x\log_a e$ $(x\to 0)$, односно $\log_a(1+x)=x\log_a e+o(x)$ $(x\to 0)$.

Решење. Због непрекидности функције $f(x)=\log_a x$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ имамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e.$$

△

Задатак 3.18. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Важи $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$, односно $\ln(1+x) = x + o(x)$ $(x \to 0)$.

Решење. Следи на основу задатка 3.17 за $a = e$. △

Задатак 3.19. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

Важи $a^x \sim 1 + x\ln a$ $(x \to 0)$, односно $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ $(x \to 0)$.

Решење. Увођењем смене $t = a^x - 1 \to 0$ и коришћењем задатка 3.17 добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

△

Задатак 3.20. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Важи $e^x \sim 1 + x$ $(x \to 0)$, односно $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$.

Решење. Следи на основу задатка 3.19 када је $a = e$. △

Задатак 3.21. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$

Важи $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ $(x \to 0)$, односно $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ $(x \to 0)$.

Решење. На основу задатка 3.20 имамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

△

Задатак 3.22. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$.

Решење. Користећи развој

$$\sin 5x = 5x + o(5x) = 5x + o(x) \quad \text{и} \quad \sin 3x = 3x + o(3x) = 5x + o(x)$$

када $x \to 0$ добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x + o(x) - (3x + o(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{x} \begin{array}{c} :x \\ \hline :x \end{array} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + o(1)}{1} = 2.$$

△

Задатак 3.23. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.

Решење. Користећи следеће развоје

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0),$$

$$\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + 2xo(x) + o(x)o(x) = x^2 + o(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \begin{array}{c} :x^2 \\ \hline :x^2 \end{array} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1))}{1 + o(1)} = \frac{1}{2}.$$

△

Задатак 3.24. Доказати $(x+o(x))^n = x^n + o(x^n)$ када $x \to 0$.

Решење. Ако искористимо биномну формулу добијамо

$$(x+o(x))^n = x^n + nx^{n-1}o(x) + \ldots + o(x)^n = x^n + o(x^n) + \ldots + o(x^n) = x^n + o(x^n).$$

$\triangle$

Код граничних вредности можемо користити следеће Маклоренове формуле где је остатак дат у Пеановом облику

$(x \to 0)$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

$(x \to 0)$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

$(x \to 0)$ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

$(x \to 0)$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dbinom{\alpha}{2} x^2 + \dbinom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \dbinom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$, где је

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$(x \to 0)$ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$(x \to 0)$ $\operatorname{artg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

$(x \to 0)$ $\arcsin x = x + o(x)$

Задатак 3.25. Наћи граничну вредност $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 5x) - \ln(\cos 7x)}{x^2}$.

Решење. Користећи развој $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$ када $t \to 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 5x) - \ln(\cos 7x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^2)) - \ln(1 - \frac{49}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{25}{2}x^2 + o(x^2)) - (-\frac{49}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{12x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{12 + o(1)}{1} = 12.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 3.26. Наћи граничну вредност $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.

Решење. Користећи развој $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ када $t \to 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\cos\Big(x(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))\Big) - \cos\Big(x(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))\Big)}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\cos\Big(x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\Big) - \cos\Big(x-x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\Big(1-\frac{1}{2}(x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3))^2+o(x^3)\Big) - \Big(1-\frac{1}{2}(x-x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3))^2+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\big(1-\frac{1}{2}(x^2+2x^3+o(x^3))+o(x^3)\big) - \big(1-\frac{1}{2}(x^2-2x^3+o(x^3))+o(x^3)\big)}{x^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{-2x^3+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-2+o(1)}{1} = -2.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.27. Доказати да је $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ када $x \to 0$.

Решење. Помоћу развоја за $\sin x, \cos x$ и $(1+x)^\alpha$ када $x \to 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x(\cos x)^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^{-1} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 - \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.28. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{-\frac{x}{2}} - \sin(\ln(1+x))}{x^3}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-\frac{x}{2}} - \sin(\ln(1+x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{(-\frac{x}{2})^2}{2}+o(x^2)\Big) - \sin\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{\frac{x^2}{4}}{2}+o(x^2)\Big) - \Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))^3}{3!}+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)\Big) - \Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{1}{6}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))^3+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)\Big) - \Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{1}{6}(x^3+o(x^3))+o(x^3)\Big)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{24}x^3+o(x^3)}{x^3} = \left(\frac{:x^3}{:x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{24}+o(1)}{1} = -\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 3.29. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt[5]{1+x^2} - \sin(\sin x) - \frac{8}{15}x^3}{xe^{x^2} - x(1+x^2)}$.

Решење. Из развоја $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2), \sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+o(t^5)$ и $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\binom{\alpha}{2}t^2$ када $t \to 0$ имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} & \frac{x\sqrt[5]{1+x^2} - \sin(\sin x) - \frac{8}{15}x^3}{xe^{x^2} - x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2)^{\frac{1}{5}} - \sin(\sin x) - \frac{8}{15}x^3}{x(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)) - x(1+x^2)} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+\frac{1}{5}x^2+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2}x^4+o(x^4)\right) - \sin\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right) - \frac{8}{15}x^3}{\frac{x^5}{2!}+o(x^5)}.
\end{aligned}$$

Из развоја

$$\begin{aligned}
\sin & \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right) \\
= & \ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)-\frac{1}{3!}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))^5+o(x^5) \\
= & \ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{1}{6}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)) \\
& +\frac{1}{5!}(x^5+o(x^5))+o(x^5) \\
= & \ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{1}{6}(x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5))+\frac{1}{5!}(x^5+o(x^5))+o(x^5) \\
= & \ x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)
\end{aligned}$$

добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} & \frac{\left(x+\frac{1}{5}x^3+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2}x^5+o(x^5)\right) - \left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)\right) - \frac{8}{15}x^3}{\frac{x^5}{2!}+o(x^5)} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{25}x^5-\frac{1}{10}x^5+o(x^5)}{\frac{x^5}{2!}+o(x^5)} = \left(\frac{:x^5}{:x^5}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{50}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = -\frac{9}{25}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 3.30. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\cos x)^{1-\cos x}-1}{\ln^2(1+x)}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \; \frac{(1+\cos x)^{1-\cos x}-1}{(\ln(1+x))^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+\cos x)^{1-\cos x}}-1}{(x+o(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(1-\cos x)\ln(1+\cos x)}-1}{x^2+o(x^2)}\\
= \; \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right)\ln\left(1+(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right)}-1}{x^2+o(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\ln\left(2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-1}{x^2+o(x^2)}\\
= \; \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\ln 2+\ln(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2))\right)}-1}{x^2+o(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\ln 2-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}-1}{x^2+o(x^2)}\\
= \; \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}\ln 2+o(x^2)}-1}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}\cdot\ln 2+o(x^2)-1}{x^2+o(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\ln 2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}\\
= \; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln 2+o(1)}{1+o(1)} = \frac{\ln 2}{2}. &
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Задатак 3.31. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\sin x}-1}{1-\cos x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sin x}}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x\ln(1+x)}-1}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+o(x^2))(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}-1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+o(x^2)}-1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+o(x^2)-1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = 2.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Задатак 3.32. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2+o(x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}}\\
&= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Дефиниција 3.9. Десна и лева гранична вредност функције $f(x)$ у тачки $x = a$ се дефинишу на следећи начин

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a_+} f(x) = b \;&\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon),\\
\lim_{x\to a_-} f(x) = b \;&\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Задатак 3.33. а) Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2}$.

б) Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2}$.

в) Да ли постоји $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2}$ за неку вредност a?

Решење. а) Када $x \to 0_+$ тада $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, па важи

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+\frac{a^2+a}{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}})} = \lim_{x\to 0_+} \frac{(1+\frac{a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}})}{(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}})} = 1.$$

б) Када $x \to 0_-$ тада $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, па важи

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{e^{\frac{1}{x}}+a^2+a}{e^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{a^2+a}{2}.$$

в) Гранична вредност ће постојати ако су леви и десни лимеси једнаки, односно $\frac{a^2+a}{2} = 1$. Одавде $a \in \{1, -2\}$. △

Задатак 3.34. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{mx}-1}{\operatorname{tg} nx}$.

Решење. Користећи $e^x = 1+x+o(x), \operatorname{tg} x = x+o(x)$ када $x \to 0$ добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{mx}-1}{\operatorname{tg} nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+mx+o(mx)-1}{nx+o(nx)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx+o(x)}{nx+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{m+o(1)}{n+o(1)} = \frac{m}{n}.$$

△

Задатак 3.35. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 ax}{x^2}$.

Решење. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)\right)^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(1)}{1} = 0.$ △

Задатак 3.36. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решење. Помоћу трансформације $f(x) = e^{\ln f(x)}$ за позитивну функцију добијамо

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}}.$$

Затим,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x^2\ln a+o(x^2)+1+x^2\ln b+o(x^2)}{1+x\ln a+o(x)+1+x\ln b+o(x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2+x^2\ln ab+o(x^2)}{2+x\ln ab+o(x)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+\frac{1}{2}x^2\ln ab+o(x^2)}{1+\frac{1}{2}x\ln ab+o(x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left((1+\frac{1}{2}x^2\ln ab+o(x^2))(1+\frac{1}{2}x\ln ab+o(x))^{-1}\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left((1+\frac{1}{2}x^2\ln ab+o(x^2))(1-\frac{1}{2}x\ln ab+o(x))\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{2}x\ln ab+o(x)\right) = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x\ln ab+o(x)\right)\\
&= \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\ln ab+o(1)\right) = -\frac{1}{2}\ln ab,
\end{aligned}$$

па је $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}\ln ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$. △

Задатак 3.37. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\ \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\sqrt{1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2))}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{1-\frac{n^2x^2}{2}+o(x^2))}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))(1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2))^{\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n^2x^2}{2}+o(x^2))^{\frac{1}{n}}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n}{2}))+o(x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{x^2(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n}{2})+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n}{2}+o(1)}{1}\\
&= \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.38. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

Решење. Применом тригонометријске формуле

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a\cos 2x-\sin a\sin 2x-2(\cos a\cos x-\sin a\sin x)+\cos a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a\cos 2x-\sin a\sin 2x-2\cos a\cos x+2\sin a\sin x+\cos a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-2x^2+o(x^2))\cos a-(2x+o(x^2))\sin a-2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cos a}{x^2}\\
&\quad +\frac{2(x+o(x^2))\sin a+\cos a}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\cos a+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos a+o(1)}{1} = -\cos a.
\end{aligned}
$$

△

Задатак 3.39. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right)^{\frac{x^2+1}{2}}$.

Решење. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right)^{\frac{x^2+1}{2}}=0.$ △

Задатак 3.40. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

Решење. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=1.$ △

Задатак 3.41. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \lim_{x\to 0}\operatorname{tg}2x\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0}\operatorname{tg}2x\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x+o(x)}\cos x\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2+o(1)}{1+o(1)}\cos x = 2.
\end{aligned}
$$

△

Задатак 3.42. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} &= \left(\begin{array}{c} x-7=t\to 0\\ x=t+7\end{array}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(t+9)^{\frac12}-(t+27)^{\frac13}}{(t+16)^{\frac14}-2} = \lim_{t\to 0}\frac{3(\frac{t}{9}+1)^{\frac12}-3(\frac{t}{27}+1)^{\frac13}}{2(\frac{t}{16}+1)^{\frac14}-2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3\left(1+\frac12\frac{t}{9}+o(t)\right)-3\left(1+\frac13\frac{t}{27}+o(t)\right)}{2\left(1+\frac14\frac{t}{16}+o(t)\right)-2} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{6}-\frac{t}{27}+o(t)}{\frac{t}{32}+o(t)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac16-\frac{1}{27}+o(1)}{\frac{1}{32}+o(1)} = \frac{112}{27}.
\end{aligned}
$$

△

Задатак 3.43. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1-2x})$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \quad & x^3\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)\\
= \quad & \lim_{x\to+\infty} x^3\left[|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac12}-|x|\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)^{\frac12}\right]\\
= \quad & \lim_{x\to+\infty} x^3\left[x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac12}-x\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)^{\frac12}\right]\\
= \quad & \lim_{x\to+\infty} x^4\left[\left(1+\frac12\frac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^3})\right)-\left(1-\frac12\frac{1}{x^2}-\frac12\frac{2}{x}-\frac12\frac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^3})\right)\right]\\
= \quad & \lim_{x\to+\infty} x^4\left(\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+o(x^3)\right)=+\infty.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.44. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}+\sqrt{x^2+2x})$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \quad & (\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}+\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\\
= \quad & \lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left[\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac13}-\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac12}\right]\\
= \quad & \lim_{x\to-\infty} x\left[\left(1+\frac13\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)+o(\tfrac{1}{x})\right)-\left(1+\frac12\cdot\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\right]\\
= \quad & \lim_{x\to-\infty} x\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\\
= \quad & \lim_{x\to-\infty}(-1-1+o(1))=-2.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.45. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(2^x\left(\frac{1}{2^x}+1\right)\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2^x+\ln\left(\frac{1}{2^x}+1\right)\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\ln 2\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)+\ln\left(\frac{1}{2^x}+1\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).
\end{aligned}$$

Због $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{2^x}+1\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=0$ довољно је наћи следећу граничну вредност

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln 2\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\ln 2\cdot\left(\frac{3}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)=\ln 2\cdot(3+o(1))=3\ln 2.$$

Према томе, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 3\ln 2.$ △

Задатак 3.46. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^n$.

Задатак 3.47. а) Представити изразе $e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{1}{n-1}}$ и $e^{\frac{1}{n+1}}$ у облику $a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ када $n\to\infty$.

б) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n-1]{e}-\sqrt[n+1]{e})$.

Решење. а) Када $n\to\infty$ имамо Маклоренову формулу $e^{\frac{1}{n}} = 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$, а одатле

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{n+1}} &= e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^{-1}} = e^{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}\\
&= 1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)^2 = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{n-1}} &= e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{-1}} = e^{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}\\
&= 1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)^2 = 1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n-1]{e}-\sqrt[n+1]{e}) &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})-\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{2}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right) = \lim_{n\to\infty}(2+o(1)) = 2.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.48. Нека је дата функција $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x+1}e^{\frac{1}{x}}$. Наћи константе $a, b,$ и c такве да важи

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+o(\tfrac{1}{x}) \quad \text{када } x\to+\infty.$$

Решење. Користећи Маклоренове формуле када $x\to+\infty$ добијамо

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x^2}{2x+1}e^{\frac{1}{x}} = x\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}e^{\frac{1}{x}} = x\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-1}e^{\frac{1}{x}}\\
&= x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\\
&= x\left(1+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\right) = x+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2}),
\end{aligned}$$

а одатле $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ и $c=\frac{1}{4}$. △

Задатак 3.49. Нека је дат низ $x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

а) Наћи константе a, b и c такве да за низ $y_n=\ln x_n$ важи $y_{n+1}-y_n = a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$.

б) Доказати да је $|y_{n+1}-y_n| \leq \frac{1}{n(n-1)}$ за довољно велико n.

в) Испитати конвергенцију низа (x_n).

Решење.

$$
\begin{aligned}
a) \quad y_{n+1}-y_n &= \ln x_{n+1}-\ln x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln \frac{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}{\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}} = \ln \frac{e(n+1)n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \\
&= 1+\ln \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} = 1+\ln \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} = 1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\tfrac{1}{n^3})\right) \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{3n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right) = -\frac{1}{12n^2}+o(\tfrac{1}{n^2}).
\end{aligned}
$$

Добили смо $a=0,\ b=0$ и $c=-\frac{1}{12}$.

б) Нека је $a_n=|y_n-y_{n+1}|=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ и $b_n=\frac{1}{n(n-1)}$. Важи

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n(n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{12}+o(1)}{1+\frac{1}{(n-1)}}=\frac{1}{12}.
$$

За довољно велико n, тј. за $n \geq n_0$ важи $\frac{a_n}{b_n}<1$, односно $a_n<b_n$.

в) Низ y_n је Кошијев јер важи

$$
\begin{aligned}
|y_{n+p}-y_n| &\leq |y_{n+p}-y_{n+p-1}+y_{n+p-1}-y_{n+p-2}+\ldots+y_{n+1}-y_n| \\
&\leq |y_{n+p}-y_{n+p-1}|+|y_{n+p-1}-y_{n+p-2}|+...+|y_{n+1}-y_n| \\
&< \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}+\frac{1}{(n+p-2)(n+p-3)}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p-1}<\frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

па ћемо узети $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Према томе, (y_n) конвергира, а одатле и низ (x_n). $\triangle$

Задатак 3.50. Доказати да важи

$$
\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}+o(\tfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) \quad \text{када } n\to\infty.
$$

Решење. Потребно је доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 0$. Важи

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} &= \lim_{n\to\infty}\left(n - n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n - n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right)} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n - n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n - n\left(1 - \frac{1}{2n} + o(\tfrac{1}{n})\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n - n\left(1 - \frac{1}{4n} + o(\tfrac{1}{n})\right) - \frac{1}{4}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} o(1) = 0.
\end{aligned}$$

Доказали смо да је

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} + o(\tfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) \quad \text{када } n\to\infty.$$

△

Задатак 3.51. * Наћи граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - x\sqrt{4+x^2}}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin 2x + \cos x^2}{x}$.

Решење. а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $-\frac{19}{12}$; в) 0. △

Задатак 3.52. Наћи граничну вредност низа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}\ln a + o(\frac{1}{n}) + 1 + \frac{1}{n}\ln b + o(\frac{1}{n}) + 1 + \frac{1}{n}\ln c + o(\frac{1}{n})}{3}\right)^n\\
=\ &\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{1+\frac{1}{n}\ln a+o(\frac{1}{n})+1+\frac{1}{n}\ln b+o(\frac{1}{n})+1+\frac{1}{n}\ln c+o(\frac{1}{n})}{3}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{3n}(\ln a+\ln b+\ln c)+o(\frac{1}{n})\right)}\\
=\ &\lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{1}{3n}(\ln a+\ln b+\ln c)+o(\frac{1}{n})\right))} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)+o(1)} = \sqrt[3]{e^{\ln(abc)}} = \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

△

4 Непрекидност

4.1 Локалне особине непрекидних функција

Дефиниција 4.1. За функцију $f : A \to \mathbb{R}$ реалне променљиве кажемо да је **непрекидна у тачки** $a \in A$ ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a (у скупу A), таква да је $f(U) \subset V$. Другим речима, f је непрекидна у a ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Теорема 4.1. *Нека је $f : A \to \mathbb{R}$ функција реалне променљиве и $a \in A$ тачка нагомилавања скупа A. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1° *функција f је непрекидна у тачки a;*

2° $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*;*

3° *за сваки низ $(x_n), x_n \in A$, за који је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Дефиниција 4.2. Нека је $f : A \to \mathbb{R}$ и $a \in A$ тачка прекида функције f. Каже се да је у тачки a :

1° **прекид прве врсте** функције f ако постоје коначне граничне вредности $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$; ако је a тачка нагомилавања само једног од скупова $\{x \in A | x > a\}, \{x \in A | x < a\}$, захтева се само постојање једног (одговарајућег) од тих лимеса; специјално, такав прекид је **отклоњив** ако је још $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} f(x)$, тј. ако постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2° **прекид друге врсте** функције f ако није прве врсте.

Дефиниција 4.3. За функцију $f \to A \to \mathbb{R}$ кажемо да је **непрекидна слева (здесна)** у тачки $a \in A$ ако је $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = f(a)$ (односно $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = f(a)$).

Задатак 4.1. Наћи константе $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такве да функција

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \alpha, & x \leq -2; \\ x^2 + \beta, & -2 < x \leq 3; \\ e^x + \gamma, & 3 < x \leq 5; \\ x^2 + 2x + 7, & x > 5 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$ (зато што су функције $2x + \alpha, x^2 + \beta, e^x + \gamma, x^2 + 2x + 7$ непрекидне). Потребно је испитати непрекидност у $x = -2, x = 3$ и $x = 5$.

Да би била непрекидна у $x = -2$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to -2_-} f(x) = \lim_{x\to -2_+} f(x) = f(-2).$$

Из следећег

$$\lim_{x\to -2_-} f(x) = \lim_{x\to -2_-} (2x + \alpha) = -4 + \alpha,$$

$$\lim_{x\to -2_+} f(x) = \lim_{x\to -2_+} (x^2+\beta) = 4+\beta,$$

$$f(-2) = -4+\alpha$$

закључујемо да мора бити испуњен услов $-4+\alpha = 4+\beta = -4+\alpha$, односно $\alpha=\beta$, да би била непрекидна у $x=-2$.

Да би била непрекидна у $x=3$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = \lim_{x\to 3_+} f(x) = f(3).$$

Из следећег

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = \lim_{x\to 3_-} x^2+\beta = 9+\beta,$$

$$\lim_{x\to 3_+} f(x) = \lim_{x\to 3_+} e^x+\gamma = e^3+\gamma,$$

$$f(3) = e^3+\gamma$$

закључујемо да мора бити испуњен услов $9+\beta = e^3+\gamma = 9+\beta$, односно $9+\beta = e^3+\gamma$, да би била непрекидна у $x=3$.

Да би била непрекидна у $x=5$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to 5_-} f(x) = \lim_{x\to 5_+} f(x) = f(5).$$

Из следећег

$$\lim_{x\to 5_-} f(x) = \lim_{x\to 5_-} e^x+\gamma = e^5+\gamma,$$

$$\lim_{x\to 5_+} f(x) = \lim_{x\to 5_+} x^2+2x+7 = 42,$$

$$f(5) = e^5+\gamma$$

закључујемо да мора бити испуњен услов $e^5+\gamma = 42 = e^5+\gamma$, односно $e^5+\gamma=42$, да би била непрекидна у $x=5$.

Добили смо систем

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ 9+\beta &= e^3+\gamma \\ e^5+\gamma &= 42. \end{aligned}$$

Решење овог система је

$$\alpha = e^3+33-e^5, \beta = e^3+33-e^5, \gamma = 42-e^5.$$

$\triangle$

Задатак 4.2. Наћи константу $a\in\mathbb{R}$ тако да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0; \\ a, & x=0. \end{cases}$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}/\{0\}$(зато што је функција $\frac{\sin x}{x}$ непрекидна на том скупу).

Испитајмо непрекидност у $x=0$. Да би функција била непрекидна у $x=0$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0).$$

Према томе,

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(0) = a.$$

Функција је непрекидна у $x = 0$ акко је $a = 1$. △

Задатак 4.3. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$ у зависности од реалног параметра b.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, јер је $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ непрекидна на том скупу.

Испитајмо непрекидност у $x = 1$. Да би функција била непрекидна у $x = 1$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(x) = f(1).$$

Према томе,

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 1,$$

$$f(0) = a.$$

Функција $f(x)$ је прекидна у $x = 1$ за свако $b \in \mathbb{R}$. △

Задатак 4.4. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер је $\sin\frac{1}{x}$ непрекидна на том скупу.

Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Да би функција била непрекидна у $x = 0$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0).$$

На основу задатка 3.8 гранична вредност

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \sin\frac{1}{x}$$

не постоји, а одатле функција $f(x)$ има прекид друге врсте у $x = 0$. △

Задатак 4.5. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер је $x \sin\frac{1}{x}$ непрекидна на том скупу.

Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Да би функција била непрекидна у $x = 0$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0).$$

Из ограничености функције $\sin\frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, следи

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Функција $f(x)$ је непрекидна у $x = 0$. Добили смо да је функција $f(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$. △

Задатак 4.6. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} x\ln x^2, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ у зависности од реалног параметра α.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер је $x\ln x^2$ непрекидна на том скупу.

Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Да би функција била непрекидна у $x = 0$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0).$$

На основу следећих граничних вредности

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x\ln x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} x\ln x^2 = 0,$$

$$f(0) = \alpha,$$

функција $f(x)$ је непрекидна у $x = 0$ ако је $\alpha = 0$. Добили смо да је функција $f(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$ за $\alpha = 0$, а за $\alpha \neq 0$ функција је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. △

Задатак 4.7. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1; \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm 1. \end{cases}$

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$(зато што је функција $\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2-1}$ непрекидна на том скупу).

Испитајмо непрекидност у $x = -1$. Да би функција била непрекидна у $x = -1$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_+} f(0) = f(-1).$$

Важи

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} \mathrm{arctg}\frac{1}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2},$$
$$f(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Из $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1_+} f(x)$ следи да функција има прекид у $x = -1$.

Испитајмо непрекидност у $x = 1$. Да би функција била непрекидна у $x = 1$ потребно је и довољно да важи
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(0) = f(1).$$

Важи
$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2},$$
$$f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Из $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1_+} f(0)$ следи да функција има прекид у $x = 1$.

Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. $\triangle$

Задатак 4.8. Испитати непрекидност функције $f(x) = [x]$.

Решење. Функција $f(x) = [x]$ је непрекидна на $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(k,k+1)$.

Испитајмо непрекидност у $x = k \in \mathbb{Z}$. Да би функција била непрекидна у $x = k \in \mathbb{Z}$ потребно је и довољно да важи
$$\lim_{x\to k_-} f(x) = \lim_{x\to k_+} f(x) = f(k).$$

Важи
$$\lim_{x\to k_-} f(x) = \lim_{x\to k_-} [x] = (k-1),$$
$$\lim_{x\to k_+} f(x) = \lim_{x\to k_+} [x] = k,$$
$$f(k) = k.$$

Није задовољен услов $\lim\limits_{x\to k_-} f(x) = \lim\limits_{x\to k_+} f(x) = f(k)$, па је функција прекидна у $x = k \in \mathbb{Z}$.

Доказали смо да је функција непрекидна на $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. $\triangle$

Задатак 4.9. Испитати непрекидност функције $f(x) = [x]\sin \pi x$.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(k,k+1)$(зато што су функције $[x]$ и $\sin \pi x$ непрекидне на том скупу).

Испитајмо непрекидност у $x = k \in \mathbb{Z}$. Да би функција била непрекидна у $x = k \in \mathbb{Z}$ потребно је да важи
$$\lim_{x\to k_-} f(x) = \lim_{x\to k_+} f(x) = f(k).$$

Важи
$$\lim_{x\to k_-} f(x) = \lim_{x\to k_-} [x]\sin \pi x = (k-1)\sin \pi k = 0,$$

$$\lim_{x\to k_+} f(x) = \lim_{x\to k_+} [x]\sin\pi x = k\sin\pi k = 0,$$

$$f(k) = 0.$$

Задовољен је услов $\lim\limits_{x\to k_-} f(x) = \lim\limits_{x\to k_+} f(x) = f(k)$, па је функција непрекидна и у $x = k \in \mathbb{Z}$.

Доказали смо да је функција непрекидна на $\mathbb{R}$. $\triangle$

Задатак 4.10. Испитати непрекидност функције $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+|x|^n+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$.

Решење. Израчунајмо граничну вредност

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+|x|^n+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} = \max\{1,|x|,\frac{x^2}{4}\} = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x\le -4; \\ -x, & -4<x\le -1; \\ 1, & -1<x\le 1; \\ x, & 1<x\le 4; \\ \frac{x^2}{4}, & x>4. \end{cases}$$

Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty,-4)\cup(-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$(зато што су функције $2x+\alpha, x^2+\beta, e^x+\gamma, x^2+2x+7$ непрекидне).
Потребно је испитати непрекидност у $x=-4, x=-1, x=1$ и $x=4$.

Да би била непрекидна у $x=-4$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to -4_-} f(x) = \lim_{x\to -4_+} f(x) = f(-4).$$

Из следећег

$$\lim_{x\to -4_-} f(x) = \lim_{x\to -4_-} \frac{x^2}{4} = 4,$$

$$\lim_{x\to -4_+} f(x) = \lim_{x\to -4_+} -x = 4,$$

$$f(-4) = 4$$

важи $\lim\limits_{x\to -4_-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4_+} f(x) = f(-4)$, па је $f(x)$ непрекидна у $x=-4$.

Да би била непрекидна у $x=-1$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_+} f(x) = f(-1).$$

Важи

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_-} -x = 1,$$

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} 1 = 1,$$

$$f(-1) = 1,$$

одакле је задовољено $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = f(-1)$, па је $f(x)$ непрекидна у $x=-1$.

На сличан начин се може доказати и непрекидост у $x=1$ и у $x=4$.

Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}$. $\triangle$

Задатак 4.11. Ако је $x_o \in A$ тачка нагомилавања скупа A и нека за низове $(x'_n) \in \mathbb{Q}\cap A$ и $(x''_n) \in \mathbb{I}\cap A$ који конвергирају ка x_0 важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x_0)$, онда је функција f непрекидна у x_0.

Задатак 4.12. Испитати непрекидност функције $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$

Решење. Испитајмо непрекидност у $x=x_0\in\mathbb{Q}$.

Нека је низ $(x_n)\in\mathbb{Q}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=0.$$

Нека је низ $(x_n)\in\mathbb{I}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

Имамо и

$$f(x_0)=\sin\pi x_0.$$

Да би функција била непрекидна у $x=x_0$ потребно је да важи $0=0=\sin\pi x_0$. А то је задовољено ако је $x_0\in\mathbb{Z}$.

Доказали смо да је функција непрекидна у $x_0\in\mathbb{Z}$.

Испитајмо непрекидност у $x=x_0\in\mathbb{I}$.

Нека је низ $(x_n)\in\mathbb{Q}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=0.$$

Нека је низ $(x_n)\in\mathbb{I}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

Имамо и

$$f(x_0)=0.$$

Одавде следи да за сваки низ (x_n) који конвергира ка x_0 важи $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$, а одатле $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Овим смо доказали да је функција непрекидна у $x=x_0$.

Доказали смо да је функција непрекидна на $\mathbb{I}\cup\mathbb{Z}$. △

Задатак 4.13. Испитати непрекидност Риманове функције

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, (m,n)=1;\\ 0, & x\in\mathbb{I}, x=0.\end{cases}$$

Решење. Испитајмо непрекидност у $x_0=\frac{p}{q}\in Q\setminus\{0\}$. За низ $x_n=\dfrac{pn}{qn+1}$ који конвергира ка $\dfrac{p}{q}=x_0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{pn}{qn+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{qn+1}=0\neq\dfrac{1}{q}=x_0$. Функција је прекидна у $x_0\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Испитајмо непрекидност у $x_0=0$. Узмимо низ $(x_n)\in\mathbb{Q}$ који конвергира ка $x_0=0$. Такав низ је облика $x_n=\dfrac{p_n}{q_n}$, где $q_n\to\infty$ и задовољава

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}=0=f(0).$$

Узмимо низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка $x_0 = 0$. Такав низ задовољава

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0).$$

Одавде следи, на основу задатка 4.11, да за сваки низ (x_n) који конвергира ка $x_0 = 0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$, па је f непрекидна у $x_0 = 0$.

Испитајмо непрекидност у $x_0 \in \mathbb{I}$. Нека низ $(x_n) \in \mathbb{Q}$ конвергира ка x_0. Такав низ је облика $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, где $q_n \to \infty$ и задовољава

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0).$$

Нека низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка x_0. Такав низ задовољава

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x_0).$$

Одавде следи, на основу задатка 4.11, да за сваки низ (x_n) који конвергира ка x_0 важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x_0)$, па је f непрекидна у $x_0 \in \mathbb{I}$.

Функција је непрекидна на $\mathbb{I} \cup \{0\}$. △

Задатак 4.14. Испитати непрекидност функције $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

Решење. Израчунајмо граничну вредност

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \begin{cases} x, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Функција је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Да би функција била непрекидна у $x = 0$ потребно је да важи

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(0) = f(0).$$

Из

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} x^2 = 0,$$

$$f(0) = 0$$

следи да је функција непрекидна у $x = 0$.

Према томе, функција је непрекидна на $\mathbb{R}$. △

Задатак 4.15. а) Доказати да је $\chi(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x)) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

б) Испитати непрекидност функције $\chi(x)$ (Дирихлеова функција).

Решење. а) Ако је $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, онда за $m = 2q$, $m!x$ је паран број, па је $\cos \pi m!x = 1$. Доказали смо да је $\chi(x) = \lim\limits_{m\to+\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)) = 1$ за $x \in \mathbb{Q}$.
Ако $x \in \mathbb{I}$, онда за свако $m \in \mathbb{N}$ важи $\cos \pi m!x < 1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x) = 0$. Доказали смо да је $\chi(x) = \lim\limits_{m\to+\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)) = 0$ за $x \in \mathbb{I}$.

б)Нека $x_0 \in \mathbb{Q}$. Узмимо низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка x_0. За овај низ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, а то се разликује од $f(x_0) = 1$. Према томе функција има прекид у $x_0 \in \mathbb{Q}$.
Нека $x_0 \in \mathbb{I}$. Узмимо низ $(x_n) \in \mathbb{Q}$ који конвергира ка x_0. За овај низ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, а то се разликује од $f(x_0) = 0$. Према томе функција има прекид у $x_0 \in \mathbb{I}$.

Функција је прекидна у свим тачкама. $\triangle$

4.2 Глобалне особине непрекидних функција

Дефиниција 4.4. За функцију $f : A \to \mathbb{R}(A \subset \mathbb{R})$ кажемо да је **непрекидна на скупу** A ако је она непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Скуп свих функција $f : A \to \mathbb{R}$ које су непрекидне на A означићемо са $C(A)$. Специјално, ако је $A = [a, b]$, скуп $C(A)$ означаваћемо са $C[a, b]$.

За реалну функцију f кажемо да је **део-по-део непрекидна** на $[a, b]$ ако постоји коначно много тачака

$$a = x_0 < x_1 < x_1 < ... < x_n = b$$

тог сегмента, таквих да је f непрекидна на сваком од интервала $(x_{j-1}, x_j), j = 1, 2, ..., n$, и има коначне леве, односно десне лимесе у њиховим крајевима.

Теорема 4.2. *(Болцано Кошијева теорема) Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, $f(a) = A, f(b) = B$ и C произвољна вредност између A и B. Тада постоји тачка $c \in [a, b]$, таква да је $f(c) = C$.*

Специјално, ако непрекидан функција f узима вредности разних знакова на крајевима сегмента $[a, b]$, тј. ако је $f(a) \cdot f(b) < 0$, тада постоји тачка $c \in [a, b]$, таква да је $f(c) = 0$.

Ради једноставнијег записа, сегмент $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ означићемо са $[\widehat{a, b}]$.

Задатак 4.16. Нека је $f \in C[0, 1]$. Тада постоји $c \in [0, 1]$ такво да је $f^2(c)(1 - c) = c$.

Решење. Потребно је доказати да постоји c такво да је $(f^2(x)(1 - x) - x)_{|x=c} = 0$. Посматрајмо помоћну функцију $F(x) = f^2(x)(1 - x) - x$. Важи $F \in C[0, 1]$ зато што су функције $f, 1 - x$ и x непрекидне на $[0, 1]$. Затим,

$$F(0)F(1) = (f^2(0)(1 - 0) - 0)(f^2(1)(1 - 1) - 1) = f^2(0)(-1) = -f^2(0) \leq 0.$$

Испуњени су услови Болцаново Кошијеве теореме и следи да постоји $c \in [0, 1]$ такво да је $F(c) = 0$. Доказали смо да постоји $c \in [0, 1]$ такво да је $f^2(c)(1 - c) = c$. $\triangle$

Теорема 4.3. *Ако је функција инјективна и непрекидна на (a, b), онда је строго монотона.*

Задатак 4.17. Да ли постоји непрекидна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да је $(f \circ f)(x) = e^{-x}$ за свако $x \in \mathbb{R}$?

Решење. Претпоставимо да постоји таква непрекидна функција. Доказаћемо да је строго монотона. Наиме, функција је '1-1' јер важи

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

С обзиром да је "1-1" и непрекидна, онда је строго монотона.

Ако је f строго растућа, онда важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow e^{-x_1} < e^{-x_2} \Rightarrow x_1 > x_2.$$

Дошли смо до контрадикције.

Ако је f строго опадајућа, онда важи

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow e^{-x_1} < e^{-x_2} \Rightarrow x_1 > x_2.$$

И у овом случају дошли смо до контрадикције.

Према томе, не постоји таква непрекидна функција. △

Задатак 4.18. Нека је $f \in C[0,2]$. Тада постоји $c \in [0,1]$ такво да је $f(c+1) - f(c) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$.

Решење. Посматрајмо помоћну функцију

$$F(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Ова функција је непрекидна на $[0,1]$, јер је f непрекидна на $[0,2]$. Затим, важи

$$F(0) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2}(f(2) - f(0)),$$

$$F(1) = f(2) - f(1) - \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Одавде је $F(0) + F(1) = 0$, па је $F(0)F(1) \leq 0$. Из непрекидности функције F и неједнакости $F(0)F(1) \leq 0$, коришћењем Болцанове теореме, следи да постоји $c \in [0,1]$ такво да је $F(c) = 0$.

Доказали смо да постоји $c \in [0,1]$ које задовољава $f(c+1) - f(c) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$. △

Задатак 4.19. Нека је $f \in C(\mathbb{R})$ и $f(f(7)) = 7$. Тада постоји $c \in R$ тако да важи $f(c) = c$.

Решење. Ако је $f(7) = 7$, онда је $c = 7$. Ако је $f(7) \neq 7$, онда посматрајмо помоћну функцију $F(x) = f(x) - x$. Важи

$$F(7) = f(7) - 7,$$

$$F(f(7)) = f(f(7)) - f(7) = 7 - f(7).$$

Доказали смо да је $F(7)F(f(7)) = -(f(7) - 7)^2 < 0$. Испуњени су услови Болцано Кошијеве теореме, одакле важи

$$\begin{pmatrix} F \in C[\widehat{7, f(7)}] \\ F(7)F(f(7)) < 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Б.К.Т.}}{\overbrace{\Rightarrow}} \exists c \in [\widehat{7, f(7)}] \text{ за које је } F(c) = 0.$$

Доказали смо да постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(c) - c = 0$, односно $f(c) = c$. △

Задатак 4.20. Нека су дате непрекидне функције $f:(a,b)\to(c,d), g:(c,d)\to\mathbb{R}$, где функција g није константна ни на једном сегменту $[\alpha,\beta]\subset(c,d)$. Доказати да је f константна функција, ако је $g\circ f$ константна.

Решење. Претпоставимо да f није константна. Тада постоји $x_1,x_2\in(a,b)$ где је $f(x_1)\neq f(x_2)$. Функција g је непрекидна на $[\widehat{f(x_1),f(x_2)}]$. Имајући у виду да g није константна онда постоји $y\in[\widehat{f(x_1),f(x_2)}]$ које задовољава $g(y)\neq g(f(x_1))$ или $g(y)\neq g(f(x_2))$. С обзиром да $y\in[\widehat{f(x_1),f(x_2)}]$ и да је f непрекидна на $[\widehat{x_1,x_2}]$, примењујући Болцано-Кошијеву теорему, постоји $x\in[\widehat{x_1,x_2}]$ такво да је $y=f(x)\in[\widehat{f(x_1),f(x_2)}]$. Добили смо да постоји x такво да је $g(y)=g(f(x))\neq g(f(x_1))$ или $g(f(x))\neq g(f(x_2))$. А то је контрадикција, јер је $g\circ f$ константна. △

Задатак 4.21. Ако је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна и ограничена, доказати да постоји $c\in\mathbb{R}$ такво да је $f(c)=c^{2n-1}$.

Решење. Потребно је доказати да постоји $c\in\mathbb{R}$ тако да је

$$(f(x)-x^{2n-1})_{|x=c}=0.$$

Посматрајмо помоћну функцију $F(x)=f(x)-x^{2n-1}$. Функција F је непрекидна на $\mathbb{R}$ (зато што су функције f и x^{2n-1} непрекидне) и важи

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x^{2n-1}=-\infty,$$

одакле постоји a које задовољава $F(a)<0$.

Важи и $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x^{2n-1}=+\infty$, одакле постоји $b<a$ које задовољава $F(b)<0$.

Испуњени су услови Болцано Кошијеве теореме,

$$\begin{pmatrix} F\in C[b,a]\\ F(a)F(b)<0\end{pmatrix}\overbrace{\Rightarrow}^{B.K.T}\exists c\in(b,a)\text{ тако да је }\ F(c)=0.$$

Доказали смо да постоји $c\in\mathbb{R}$ за које важи $f(c)=c^{2n-1}$. △

Задатак 4.22. Нека су $f,g\in C[a,b]$ такве да је $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Доказати да постоји $c\in(a,b)$ за које је $f(c)=g(c)$.

Решење. Потребно је доказати да постоји $c\in(a,b)$ тако да важи $f(c)=g(c)$, односно $f(c)-g(c)=0$.

Посматрајмо помоћну функцију $F(x)=f(x)-g(x)$. Важи следеће

$$\begin{pmatrix} F\in C[a,b]\\ F(a)=f(a)-g(a)<0\\ F(b)=f(b)-g(b)>0\end{pmatrix}\overbrace{\Rightarrow}^{\text{Б.К.Т.}}\ \exists c\in(a,b)\ \ F(c)=0.$$

Доказали смо да постоји $c\in(a,b)$ за које је $f(c)=g(c)$. △

Задатак 4.23. Доказати да сваки полином са реалним коефицијентима непарног степена има бар једну нулу.

Решење. Посматрајмо полином

$$P(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_1x + a_0,\ a_{2n-1} \neq 0$$

који је непрекидна функција на $\mathbb{R}$.

Претпоставимо да је $a_{2n-1} > 0$. Тада важи

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_1x + a_0) = +\infty \Rightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}\ \ P(x_2) > 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_1x + a_0) = -\infty \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}\ \ P(x_1) < 0.$$

Према томе, можемо применити Болцано Кошијеву теорему

$$\begin{pmatrix} P \in C[\widehat{x_1, x_2}] \\ P(x_1) < 0 \\ P(x_2) > 0 \end{pmatrix} \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Б.К.Т.}} \exists c \in [\widehat{x_1, x_2}] \text{ тако да је } P(c) = 0.$$

Аналогно се доказује за случај $a_{2n-1} < 0$. △

Задатак 4.24. Доказати да функција $f(x) = 5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5$ има бар једну реалну нулу.

Решење. Област дефинисаности функције је $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Доказаћемо да постоји нула функције на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Важи следеће

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} (5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5) = +\infty \Rightarrow \exists x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})\quad f(x_2) > 0,$$

$$\lim_{x\to0_+} f(x) = \lim_{x\to0_+} (5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5) = -5 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\qquad f(x_1) < 0.$$

Према томе, применом Болцано-Кошијеве теореме добијамо

$$\begin{pmatrix} f \in C[\widehat{x_1, x_2}] \\ f(x_1) < 0 \\ f(x_2) > 0 \end{pmatrix} \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Б.К.Т.}} \exists c \in [\widehat{x_1, x_2}] \text{ тако да је } f(c) = 0.$$

△

Задатак 4.25. Нека је $f : [0, 1] \to [0, 1]$ непрекидна функција за коју важи $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $(f \circ f)(x) = x$, за свако $x \in [0, 1]$. Доказати да је $f(x) = x$ за свако $x \in [0, 1]$.

Теорема 4.4. *(Вајерштрасова теорема) Ако је функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, тада је она ограничена на $[a, b]$ и постоје тачке тог сегмента у којима она постиже своју максималну, односно минималну вредност.*

Задатак 4.26. Ако је функција $f : [A, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрекидна и постоји коначна гранична вредност $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, онда f достиже апсолутни максимум или апсолутни минимум на $[a, +\infty)$.

Решење. Нека је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. Ако је функција f константна на $[a,+\infty)$, онда је тврђење тривијално. Ако функција није константна, онда постоји $b \in [a,+\infty)$ за које је или $f(b) > L$ или $f(b) < L$. Претпоставимо, без умањења општости, да је $f(b) > L$. Означимо $\varepsilon = f(b) - L$. За такво ε, на основу $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, следи да постоји $c \in [a,+\infty)$, тако да за свако $x > c$ важи $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Функција f је непрекидна на $[a,c]$, па применом Вајерштрасове теореме добијамо да постоји глобални максимум на $[a,c]$, односно постоји $d \in [a,c]$ за које је $f(d) = f_{\max}$ на $[a,c]$.

Добили смо да је

$$f(d) \geq f(x) \quad \text{за свако } x \in [a,c]$$

и

$$f(d) \geq f(b) = L + \varepsilon > f(x) \quad \text{за свако } x \in (c,+\infty).$$

Према томе $f(d) \geq f(x)$ за свако $x \in [a,+\infty)$. Доказали смо да функција има глобални максимум.

Ако је $f(b) < L$, онда можемо доказати да постоји глобални минимум. △

Задатак 4.27. Ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна, онда постоји $t \in \mathbb{R}$ тако да скуп $A_t = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = t\}$ није двочлан. Навести пример прекидне функције за коју си сви скупови $A_t, t \in \mathbb{R}$ двочлани.

Решење. Претпоставимо да је A_t двочлан за свако $t \in \mathbb{R}$. Одатле следи да је скуп A_0 двочлан, односно постоји $a, b \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(a) = f(b) = 0, a < b$. Из непрекидности функције на $[a,b]$, добијамо да или важи $f(x) > 0$ за свако $x \in [a,b]$ или важи $f(x) < 0$ за свако $x \in [a,b]$. Претпоставимо да је f позитивна на (a,b). Тада, применом Вајерштрасове теореме, имамо да постоји $c \in [a,b]$ за које је $f_{\max} = f(c) = M > 0$. Функција је 'на', па постоји $d \notin [a,b]$ тако да је $f(d) = 2M$.

Применом Болцано Кошијеве теореме за непрекидну функцију f на $[a,c]$, на $[c,b]$ и на ($[b,d]$ ако је $d > b$ или на $[d,a]$ ако је $d < a$), добијамо да постоје различите вредности $e, g, h \in \mathbb{R}$ тако да је $f(e) = f(g) = f(h) = \frac{M}{2}$. Добили смо да $e, g, h \in A_{\frac{M}{2}}$, односно дошли смо до контрадикције, јер $A_{\frac{M}{2}}$ није двочлан.

Ако је f негативна на $[a,b]$, онда поновимо претходни доказ на функцију $-f$.

Функција $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0; \\ 0, & x = 0; \\ \ln(n+1), & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$ је 'на' и задовољава особину. △

Задатак 4.28. За које вредност реалних параметара α и β функција

$$f(x) = \begin{cases} \left(4\sqrt[4]{1+x} - 3\right)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \\ -x^3 + \beta, & x < 0 \end{cases}$$

је непрекидна на $\mathbb{R}$? За такве α и β, да ли је функција ограничена на $(0,+\infty)$ и да ли постоји решење једначине $f(x) + x^5 + 2015^{2015} = 0$? Образложити одговор.

Решење. Из непрекидности функција $\left(4\sqrt[4]{1+x} - 3\right)^{\frac{1}{x}}$ и $-x^3 + \beta$ следи да је функција

f је непрекидна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Испитајмо непрекидност у нули. Из

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0_+} f(x) &= \lim_{x\to0_+}\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right)}\\
&= \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(4\left(1+\frac{1}{4}x+o(x)\right)-3\right)} = \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x+o(x))}\\
&= \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}(x+o(x))} = \lim_{x\to0_+} e^{(1+o(1))} = e,\\
\lim_{x\to0_-} f(x) &= \lim_{x\to0_-}(-x^3+\beta)=\beta,\\
f(0) &= \alpha,
\end{aligned}$$

следи да је за $\beta=\alpha=e$ функција f непрекидна на $\mathbb{R}$.

За $\alpha=\beta=e$ функција је непрекидна на $[0,+\infty)$. Због постојања коначне граничне вредности

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 4\sqrt[4]{x}+\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 4\sqrt[4]{x}}{x}+\frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 4+\frac{1}{4}\frac{\ln x}{x}}{x}+\frac{\ln\sqrt[4]{x}}{x}+\frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)}{x}=0,
\end{aligned}$$

при чему је $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 4}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+1}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)}{x}=0$, следи да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(4\sqrt[4]{1+x}-3\right)}{x}} = 1.$$

Према томе, функција је ограничена на неком скупу $[M,+\infty)$. Из непрекидности на $[0,M]$, на основу Вајерштрасове теореме, следи да је функција ограничена на $[0,M]$. према томе, функција f је ограничена на $[0,+\infty)$.

Формирајмо помоћну функцију $F(x)=f(x)+x^5+2015^{2015}$. На основу граничне вредности $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+1+x^5+2015^{2015})=-\infty$ следи да постоји $a<0$ за које је $F(a)<0$. Имамо да је $F(0)=e+2015^{2015}>0$. Функција је непрекидна на $[a,0]$ и важи $F(a)F(0)<0$, па на основу Болцано Кошијеве теореме, следи да постоји $x_1\in[a,0]$ за које је $F(x_1)=0$, односно $f(x_1)+x_1^5+2015^{2015}=0$. $\triangle$

Задатак 4.29. *

а) Ако су $F,G:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ непрекидне функције такве да је

$$\inf_{0\le x\le1}F(x)=\inf_{0\le x\le1}G(x),$$

доказати да постоји $\xi\in[0,1]$ такво да је $F(\xi)=G(\xi)$.

б) Ако су $f,g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ непрекидне функције такве да је $\inf\limits_{0\le x\le1}f(x)=\inf\limits_{0\le x\le1}g(x)$, доказати да постоји $\xi\in[0,1]$ за које је испуњено

$$f^3(\xi)-g^3(\xi)=\ln\left(1+\frac{g(\xi)-f(\xi)}{1+f(\xi)}\right).$$

Задатак 4.30. * Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и са особином да за свако $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$, при чему је $f(a) = f(b)$, следи да постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f(a) = f(c) = f(b)$. Доказати да је функција монотона на $\mathbb{R}$.

Задатак 4.31. * Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ за свако $x, y \in \mathbb{R}$. Доказати да је f бијекција.

4.3 Функционалне једначине

Задатак 4.32. Наћи све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Задатак 4.33. Наћи све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Задатак 4.34. Наћи све непрекидне функције на $\mathbb{R}$ које задовољавају услов $f(x) + f(\frac{2}{3}x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Функција треба да задовољава следеће

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - f\left(\frac{2}{3}x\right) = x - \left(\frac{2}{3}x - f\left(\frac{4}{9}x\right)\right) = x - \left(\frac{2}{3}x - \left(\frac{4}{9}x - f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 x\right)\right)\right) \\
&= x - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x - f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 x\right) = \ldots \\
&= x\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) + (-1)^{n+1} f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x\right) \\
&= x\left(\frac{1 - (-\frac{2}{3})^{n+1}}{1 + \frac{2}{3}}\right) + (-1)^{n+1} f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x\right).
\end{aligned}$$

На основу непрекидности функције f у нули, следи $\lim_{n\to\infty} f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x\right) = f(0)$, одакле "пуштањем лимеса" добијамо да само функција $f(x) = \frac{3}{5}x$ задовољава дати услов. △

Задатак 4.35. Наћи све непрекидне функције на $\mathbb{R}$ које задовољавају услов $f(2x) = f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Нека је $f(0) = a$ и нека $x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2n}\right).$$

Посматрајмо низ $y_n = \dfrac{x}{2n}$ који конвергира ка нули. На основу непрекидности функције f следи $f(y_n) \to f(0) = a$. Низ $f(y_n)$ је константан, а одатле $f(y_1) = f(x) = a$.
Само константне функције задовољавају дати услов. △

4.4 Равномерна непрекидност

Дефиниција 4.5. За функцију $f : A \to \mathbb{R}$ кажемо да је **равномерно непрекидна на скупу** $A \subset \mathbb{R}$ ако се за свако $\varepsilon > 0$ може наћи позитиван број $\delta = \delta(\varepsilon)$, такав да за сваке две тачке x_1, x_2 скупа A које су на растојању мањем од δ, важи $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, односно

$$(\varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in A)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Теорема 4.5. *Ако је функција* $f : A \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* $[a, b]$, *онда је равномерно непрекидна на* $[a, b]$.

Теорема 4.6. *Ако је функција* $f : A \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* $[a, b), (b$ *може бити и* $\pm\infty)$ *и постоје низови* x'_n *и* x''_n *тако да је*

$$x'_n \to b, x''_n \to b, \quad |x'_n - x''_n| \to 0, \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \nrightarrow 0,$$

онда функција f *није равномерно непрекидна на* $[a, b)$.

Задатак 4.36. Нека је функција f непрекидна на коначном интервалу (a, b). Тада је f равномерно непрекидна на (a, b) акко постоје граничне вредности $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b_-} f(x)$.

Решење. Нека је $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to b_-} f(x) = B$. Додефинишимо функцију

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a; \\ f(x), & x \in (a, b); \\ B, & x = b. \end{cases}$$

Функција F је непрекидна на $[a, b]$, па је на основу Канторове теореме и равномерно непрекидна на $[a, b]$.

Докажимо тврђење у другом смеру. Ако је f равномерно непрекидна на (a, b), онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{за свако } x', x'' \in (a, b),$$

за које је $|x' - x''| < \delta$.
За све x' и x'' који задовољавају неједнакости

$$0 < |x' - a| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad 0 < |x' - a| < \frac{\delta}{2},$$

имамо

$$|x' - x''| = |x' - a + a - x''| \leq |x' - a| + |x'' - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

и при томе важи неједнакост $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Следи, испуњен је Кошијев услов постојања граничне вредности када $x \to a$, то јест постоји гранична вредност $A = \lim\limits_{x \to a_+} f(x)$. Слично се доказује да постоји гранична вредност $B = \lim\limits_{x \to b_-} f(x)$. $\triangle$

Задатак 4.37. Нека је функција f непрекидна на $[a, +\infty)$. Ако постоји $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, онда је функција равномерно непрекидна на $[a, +\infty)$.

Решење. Из постојања граничне вредности следи, за свако $\varepsilon > 0$ постоји M тако да је $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ кад год је $x', x'' > M$. Фиксирајмо такав број M. Из непрекидности функције на сегменту $[a, M]$ следи њена равномерна непрекидност (Канторова теорема), односно за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји δ тако да је

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in [a, M],$$

ако је $|x' - x''| < \delta$. С обзиром да је неједнакост $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тачна за свако $x', x'' > M$, то је она тачна и за свако $x', x'' \geq a$, који испуњавају неједнакост $|x' - x''| < \delta$, одакле је f равномерно непрекидна на скупу $[a, +\infty)$. $\triangle$

Задатак 4.38. Ако је функција $f(x)$ равномерно непрекидна на (a, b) и на (c, d), где скупови имају непразан пресек, онда је равномерно непрекидна и на $(a, b) \cup (c, d)$.

Задатак 4.39. * Доказати, да ако је функција f има на коначном или бесконачном интервалу (a, b) ограничен први извод, тада је она равномерно непрекидна на том интервалу.

Решење. На основу Лагранжове теореме за сваки пар тачака $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\varepsilon)||x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|,$$

где смо искористили да је f' ограничен ($|f'(x)| \leq M$ за $x \in (a, b)$). За произвољно $\varepsilon > 0$ узмемо $\delta > 0$ такво да је $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$, добијамо да за $|x_2 - x_1| < \delta$ следи $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, односно функција f је равномерно непрекидна на (a, b). $\triangle$

Задатак 4.40. Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, где је (a, b) може бити и бесконачан интервал. Ако постоје низови (x'_n) и (x''_n) у (a, b) тако да важи $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x'_n) - f(x''_n)| \neq 0$, онда функција f није равномерно непрекидна на (a, b).

Задатак 4.41. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \dfrac{\sin(\ln(1 + x))}{x}$ на $(0, +\infty)$.

Решење. Важи

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + o(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x + o(x))}{x} = 0.$$

Испитајмо равномерну непрекидност на $(0, 2]$. Функција f је непрекидна на $(0, 2]$ и постоји $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, па на основу задатка 4.36 имамо да је $f(x)$ равномерно непрекидна на $(0, 2]$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $[1, +\infty)$. Функција f је непрекидна на $[1, +\infty)$ и постоји $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, па на основу задатка 4.37 имамо да је $f(x)$ равномерно непрекидна на $[1, +\infty)$.

Доказали смо да је функција равномерно непрекидна на $(0, 2]$ и на $[1, +\infty)$, а коришћењем задатка 4.38 добијемо да је равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$. $\triangle$

Задатак 4.42. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \sqrt{|x|}e^{-x}$ на:

а) $(0, +\infty)$;

б) $(-\infty, +\infty)$.

Решење. а) Због

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}e^{-x} = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{|x|}e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{e^x} = 0$$

посматраћемо равномерну непрекидност на $(0,2]$ и $[1,+\infty)$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $(0,2]$. Функција f је непрекидна на $(0,2]$ и постоји $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, па на основу задатка 4.36 имамо да је $f(x)$ равномерно непрекидна на $(0,2]$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $[1,+\infty)$. Функција f је непрекидна на $[1,+\infty)$ и постоји $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, па на основу задатка 4.37 имамо да је f равномерно непрекидна на $[1,+\infty)$.

Доказали смо да је функција равномерно непрекидна на $(0,2]$ и на $[1,+\infty)$, а коришћењем задатка 4.38 добијемо да је равномерно непрекидна на $(0,+\infty)$.

б) Посматрајмо низове $x_n' = -n$ и $x_n'' = -n - \frac{1}{n}$. Оба низа теже ка $-\infty$, њихова разлика $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{n}$ тежи нули, а

$$\begin{aligned}
|f(x_n') - f(x_n'')| &= \left|\sqrt{|-n|}e^n - \sqrt{\left|-n-\frac{1}{n}\right|}e^{n+\frac{1}{n}}\right| = \left|\sqrt{n}e^n - \sqrt{n+\frac{1}{n}}e^{n+\frac{1}{n}}\right| \\
&= e^n\sqrt{n}\left|1 - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}e^{\frac{1}{n}}\right| = e^n\sqrt{n}\left|1 - \left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right)\left(1+\frac{1}{n}+o(\tfrac{1}{n})\right)\right| \\
&= e^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o(\tfrac{1}{n})\right) = e^n\frac{1}{\sqrt{n}} + o(e^n\tfrac{1}{\sqrt{n}}) \to +\infty.
\end{aligned}$$

На основу претходног следи да функција није равномерно нерекидна на $(-\infty,+\infty)$. △

Задатак 4.43. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ на домену.

Решење. Домен функције је $(0,+\infty)$. Израчунајмо први изод

$$f'(x) = (\sqrt{x}\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

С обзиром да је $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = 0$ и f' непрекидна функција на $(0,+\infty)$, следи да постоји $[M,+\infty)$ где је f' ограничена функција.

Испитајмо равномерну непрекидност на $[M,+\infty)$. Функција f је непрекидна на $[M,+\infty)$ и први извод је ограничен на $[M,+\infty)$, па на основу задатка 4.39 следи да је функција равномерно непрекидна на $[M,+\infty)$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $(0,M+1]$. Десна гранична вредност у нули постоји и једнака је

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

Функција f је непрекидна на $(0,M+1]$, па на основу задатка 4.36 имамо да је $f(x)$ равномерно непрекидна на $(0,M+1]$.

Доказали смо да је функција равномерно непрекидна на $(0,M+1]$ и на $[M,+\infty)$, а коришћењем задатка 4.38 добијамо да је равномерно непрекидна на $(0,+\infty)$. △

Задатак 4.44. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $(0,+\infty)$.

Решење. За низове $x'_n = \dfrac{1}{n}$ и $x''_n = \frac{1}{n+1}$ важи

$$|x'_n - x''_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$$

и

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1 \nrightarrow 0.$$

Према Теореми 4.40 функција није равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$. △

Задатак 4.45. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \ln x$ на $(0, 1)$.

Решење. За низове $x'_n = e^{-n}$ и $x''_n = e^{-n-1}$ важи

$$|x'_n - x''_n| = \left|e^{-n} - e^{-n-1}\right| = e^{-n}(1 - \frac{1}{e}) \to 0,$$

и

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |-n - (-n-1)| = 1 \nrightarrow .$$

Према Теореми 4.40 функција није равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$. △

Задатак 4.46. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$.

Решење. Посматрајмо низове $x'_n = \sqrt{n}$ и $x''_n = \sqrt{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Важи

$$|x'_n - x''_n| = \left|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \to 0,$$

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1.$$

Према Теореми 4.40 функција није равномерно непрекидна на $(-\infty, +\infty)$. △

Задатак 4.47. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \sin x^2$ на $(0, +\infty)$.

Решење. За низове $x'_n = \sqrt{2n\pi}$ и $x''_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ важи

$$|x'_n - x''_n| = \left|\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0$$

и

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |0 - 1| = 1 \nrightarrow 0.$$

Према Теореми 4.40 функција није равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$. △

Задатак 4.48. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x \sin x$ на $(0, +\infty)$.

Решење. Посматрајмо низове $x'_n = n$ и $x''_n = n + a_n$. Важи

$$|x'_n - x''_n| = |n - n - a_n| = |a_n|,$$

па је потребно да $a_n \to 0$. Затим,

$$\begin{aligned}
|f(x'_n) - f(x''_n)| &= |n \sin n - (n + a_n) \sin(n + a_n)\\
&= |n \sin n - (n + a_n)(\sin n \cos a_n + \cos n \sin a_n)|\\
&= |n \sin n - (n \sin n \cos a_n + n \cos n \sin a_n + \sin n \cos a_n + a_n \cos n \sin a_n)|\\
&= |n \sin n(1 - \cos a_n) - n \cos n \sin a_n - a_n \sin n \cos a_n - a_n \cos n \sin a_n|.
\end{aligned}$$

Имајући у виду да $a_n \sin n \cos a_n$ и $a_n \cos n \sin a_n$ теже нули, остало је да нађемо a_n тако да $n \sin n(1-\cos a_n) - n\cos n \sin a_n$ не тежи нули. Узмимо да је $a_n = \frac{1}{n}$. Тада је

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \quad \left[n \sin n(1-\cos\frac{1}{n}) - n\cos n \sin\frac{1}{n}\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty}\left[n\sin n\left(\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right) - n\cos n\left(\frac{1}{n}+o(\tfrac{1}{n})\right)\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty}\left[\sin n\left(\frac{1}{n}+o(\tfrac{1}{n})\right) - \cos n(1+o(1))\right],
\end{aligned}$$

при чему $\sin n\left(\dfrac{1}{n}+o(\tfrac{1}{n})\right)$ тежи нули, а $\cos n(1+o(1))$ не конвергира.

Доказали смо да функција није равномерно непрекидна на $(0,+\infty)$, избором низова $x_n' = n$ и $x_n'' = n+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$ и применом Теореме 4.40. $\triangle$

Задатак 4.49. а) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна и периодична функција. Доказати да је f равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$.

б) Испитати равномерну непрекидност функције $g(x) = (-1)^{[x]}\sin x\pi$ на $(-\infty,+\infty)$, где је $[x]$ цео део од x.

Решење. а) Нека је T период функције f. Према Канторовој теореми функција f је равномерно непрекидна на $[0,2T]$. Нека је $\varepsilon>0$ призвољно. Тада постоји $\delta>0$ тако да за свако $x_1,x_2\in[O,2T]$ за које је $|x_1-x_2|<\delta$ важи $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Нека је $\delta_1=\min\{\delta,T\}$. Ако за $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ важи $|t_1-t_2|<\delta_1$, онда постоји $k\in\mathbb{Z}$ тако да је

$$x_1 = t_1-kT, x_2=t_2-kT, x_1,x_2\in[0,2T] \quad \text{и} \quad |x_1-x_2|<\delta_1\le\delta,$$

а одатле

$$|f(t_1)-f(t_2)| = |f(t_1-kT)-f(t_2-kT)| = |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Доказали смо да је функција равномерно непрекидна на $(-\infty,+\infty)$.

б) Функција $g(x)=(-1)^{[x]}\sin x\pi$ је периодична са периодом $T=1$ и непрекидна због

$$g(k)=0, \lim_{x\to k_+} g(x) = \lim_{x\to k_+} g(x) = 0,$$

па из дела под а) важи да је равномерно непрекидна на $(-\infty,+\infty)$. $\triangle$

5 Диференцијални рачун

5.1 Диференцијабилност функције

Дефиниција 5.1. **Изводом** функције $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ у тачки $x \in (a,b)$ назива се коначна следећа гранична вредност

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

где је $f(x+h) - f(x)$ прираштај функције $f(x)$ у тачки x који одговара прираштају аргумента h. Извод ћемо означити са $f'(x)$.

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	$c = const$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q$ непарно, $x \neq 0$ $\alpha = \frac{p}{q} > 1, q$ непарно, $x \in \mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
11.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
18.	$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
19.	$\operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
20.	$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
21.	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert > 1$

Задатак 5.1. Наћи извод функције $f(x) = x^x$.

Решење. Користећи $f(x) = e^{\ln f(x)}$ за позитивну функцију $f(x)$ имамо

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) \\ &= x^x(\ln x + 1). \end{aligned}$$

△

Задатак 5.2. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције $f(x) = |x|$.

Решење. Функција је непрекидна на $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, јер су функције x и $-x$ непрекидне. Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$, па је $f(x)$ непрекидна у $x = 0$.

Да би била диференцијабилна у $x = 0$ потребно је да постоји леви и десни извод и да су једнаки. Имамо

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h-0}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Из $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ следи да функција није диференцијаблна у $x = 0$. △

Задатак 5.3. Испитати диференцијабилност функције $f(x) = |\sin x|$.

Решење. Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$, јер су функције $\sin x$ и $|x|$ непрекидне.

Нуле функције $\sin x$, а то су $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, могу бити критичне тачке за диференцијабилност. Да би била диференцијабилна у $x = k\pi$ потребно је да постоји леви и десни извод и да су једнаки. Имамо

$$f'_+(k\pi) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(k\pi+h) - f(k\pi)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{(-1)^k \sin h - 0}{h} = (-1)^k,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(k\pi+h) - f(k\pi)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{(-1)^{k+1} \sin h - 0}{h} = (-1)^{k+1}.$$

Из $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ следи да функција није диференцијаблна у $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. △

Задатак 5.4. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1; \\ (1-x)(2-x), & x \in [1,2]; \\ -(2-x), & x > 2. \end{cases}$$

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, 1)\cup(1, 2)\cup(2, +\infty)$ зато што су функције $1-x, (1-x)(2-x)$ и $-(2-x)$ непрекидне.

Из

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} 1 - x = 0, \quad \lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (1-x)(2-x) = 0, \quad f(1) = 0,$$

следи непрекидност у $x = 1$.

Из

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_-} (1-x)(2-x) = 0, \quad \lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} -(2-x) = 0, \quad f(2) = 0,$$

следи непрекидност у $x = 2$.

Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$.

Функција $f(x)$ је диференцијабила на $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, зато што су функције $1 - x, (1 - x)(2 - x)$ и $-(2 - x)$ диференцијабилне.

Испитајмо диференцијабилност у $x = 1$. Имамо

$$f_-(1) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{1 - (1+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$\begin{aligned} f_+(1) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{(1 - (1+h))(2 - (1+h)) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0_+} \frac{-h(1-h))}{h} = -1. \end{aligned}$$

Функција је диференцијабилна у $x = 1$.

Испитајмо диференцијабилност у $x = 2$.

$$\begin{aligned} f_-(2) &= \lim_{h \to 0_-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{(1 - (2+h))(2 - (2+h)) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0_-} \frac{(-1-h)(-h)}{h} = 1, \end{aligned}$$

$$f_+(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{-(2 - (2+h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{h}{h} = 1.$$

Функција је диференцијабилна у $x = 2$.

Доказали смо да је функција диференцијабилна на $\mathbb{R}$. △

Задатак 5.5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Решење. Нека је $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Посматрајмо низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка x_0. За њега важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ и $f(x_0) = x_0^2 \neq 0$, одакле је функција прекидна у x_0. У $x = 0$ функција је непрекидна, јер за сваки низ x_n који конвергира ка 0 важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0, f(0) = 0$. Испитајмо диференцијабилност у $x = 0$, односно следећу граничну вредност

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

За низ $(h_n) \in \mathbb{Q}$ који конвергира ка 0 важи

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(h_n)}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{h_n^2}{h_n} = \lim_{n \to \infty} h_n = 0.$$

Такође, за низ $(h_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка 0 важи

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(h_n)}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{0}{h_n} = 0.$$

Доказали смо да за сваки низ (h_n) који конвергира ка 0 важи

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(h_n)}{h_n} = 0.$$

Према томе, постоји $f'(0)$ и функција је диференцијабилна у $x = 0$. △

Задатак 5.6. Доказати да функција $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ има прекидан извод.

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}$, јер је $x^2 \sin\frac{1}{x}$ непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$.

Функција је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, због диференцијабилности функције $x^2 \sin\frac{1}{x}$. Испитајмо диференцијабилност функције у $x = 0$. Важи

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Према томе, функција је диференцијабилна и у $x = 0$.

Први извод функције је $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ и прекидан је у $x = 0$. Наиме,

$$\lim_{x\to 0} 2x \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} \ \text{не постоји.}$$

△

Задатак 5.7. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где је $[x]$ цео део функција.

Решење. Функције $[x]$ и $\sin \pi x$ су непрекидне на $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$, а одатле и функција $f(x) = [x] \sin \pi x$.

Испитајмо непрекидност у $x = k \in \mathbb{Z}$. Из следећег

$$\lim_{x\to k_-} f(x) = \lim_{x\to k_-} [x] \sin \pi x = (k-1) \sin k\pi = 0,$$

$$\lim_{x\to k+} f(x) = \lim_{x\to k+} [x] \sin \pi x = k \sin k\pi = 0,$$

$$f(k) = k \sin k\pi = 0,$$

може се закључити да је функција непрекидна у $x = k \in \mathbb{Z}$. Доказали смо да је функција непрекидна на $\mathbb{R}$.

Функције $[x]$ и $\sin \pi x$ су диференцијабилне на $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$, а одатле и функција $f(x) = [x] \sin \pi x$.

Испитајмо диференцијабилност у $x = k \in \mathbb{Z}$. Из следећег

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{h\to 0+} \frac{[k+h]\sin\pi(k+h) - [k]\sin\pi k}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k\sin\pi(k+h) - k\sin\pi k}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{k(-1)^k \sin\pi h - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k(-1)^k \pi h + o(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k(-1)^k\pi + o(1)}{1} \\ &= k(-1)^k\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(k) &= \lim_{h\to 0-} \frac{[k+h]\sin\pi(k+h) - [k]\sin\pi k}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(k-1)\sin\pi(k+h) - k\sin\pi k}{h} \\ &= \lim_{h\to 0-} \frac{(k-1)(-1)^k \sin\pi h - 0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(k-1)(-1)^k\pi h + o(h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0-} \frac{(k-1)(-1)^k\pi + o(1)}{1} = (k-1)(-1)^k\pi, \end{aligned}$$

$$f'_+(k) \neq f'_-(k),$$

може се закључити да функција није диференцијабилна у $x = k \in \mathbb{Z}$. Доказали смо да је функција диференцијабилна на $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$. △

Задатак 5.8. Нека је дата функција $f(x) = |x^2 - x - 12| \cos \dfrac{x\pi}{2}$.

а) Испитати диференцијабилност функције.

б) Испитати равномерну непрекидност на $(0, 1)$.

в) Испитати равномерну непрекидност на $\mathbb{R}$.

Решење. а) Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$. Због апсолутне вредности, тачке које су критичне за диференцијабилност су оне у којима се анулира $x^2 - x - 12$, односно у $x \in \{-3, 4\}$. Функције $|x^2 - x - 12|$ и $\cos \frac{x\pi}{2}$ су диференцијабилна на $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$, па је и $f(x)$ диференцијабилна на том скупу. Испитајмо диференцијабилност у $x = -3$. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{|9 - 6h + h^2 - h + 3 - 12| \cos \frac{(-3+h)\pi}{2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-|h^2 - 7h| \sin \frac{h\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} -|h^2 - 7h| \left(\frac{\pi}{2} + o(1)\right) = 0.\end{aligned}$$

Функција је диференцијабилна у $x = -3$.

Испитајмо диференцијабилност у $x = 4$. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h\to 0_+} \frac{|16 + 8h + h^2 - h - 4 - 12| \cos \frac{(4+h)\pi}{2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0_+} \frac{|7h + h^2| \cos \frac{h\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0_+} |7 + h| \cos \frac{h\pi}{2} = 7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h\to 0_-} \frac{|16 + 8h + h^2 - h - 4 - 12| \cos \frac{(4+h)\pi}{2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0_-} \frac{|7h + h^2| \cos \frac{h\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0_-} -|7 + h| \cos \frac{h\pi}{2} = -7.\end{aligned}$$

Због $f'_+(4) \neq f'_-(4)$ функција није диференцијабилна у $x = 4$.

Према томе, функција је диференцијабилна на $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

а) Функција је непрекидна на $[0, 1]$, па је на основу Канторове теореме равномерна непрекидна на $[0, 1]$, а одатле и на $(0, 1)$.

в) Функција није равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$. △

Задатак 5.9. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} |x|^m \sin \frac{1}{|x|^n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

на $\mathbb{R}$, у зависности од параметара $m, n \in \mathbb{Z}$.

Решење. Прво ћемо израчунати граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x^\beta$.

1) Ако је $\beta > 0$, онда је

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin x^\beta = \lim_{x\to 0} x^\alpha (x^\beta + o(x^\beta)) = \lim_{x\to 0}(x^{\alpha+\beta} + o(x^{\alpha+\beta})) = \begin{cases} 0, & \alpha+\beta > 0 \\ 1, & \alpha+\beta = 0 \\ \text{не постоји}, & \alpha+\beta < 0 \end{cases}.$$

2) Ако је $\beta = 0$, онда је $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x^\beta = \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin 1 = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \sin 1, & \alpha = 0 \\ \text{не постоји}, & \alpha < 0 \end{cases}.$

3) Ако је $\beta < 0$, онда је $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x^\beta = \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \text{не постоји}, & \alpha = 0 \\ \text{не постоји}, & \alpha < 0 \end{cases}$

Према томе,

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin x^\beta = \begin{cases} 0, & (\beta > 0, \alpha+\beta > 0) \vee (\alpha > 0, \beta \leq 0) \\ 1, & \beta > 0, \alpha+\beta = 0 \\ \sin 1, & \beta = 0, \alpha = 0 \\ \text{не постоји}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Функција f је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ због непрекидности функције $|x|^m \sin \frac{1}{|x|^n}$. Испитајмо непрекидност у $x = 0$. Имамо

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0_+} |x|^m \sin \frac{1}{|x|^n} &= \lim_{x\to 0_+} x^m \sin \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to 0_+} x^m \sin x^{-n} \\ &= \begin{cases} 0, & (n < 0, m-n > 0) \vee (m > 0, n \geq 0) \\ 1, & n < 0, m-n = 0 \\ \sin 1, & n = 0, m = 0 \\ \text{не постоји}, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0_-} |x|^m \sin \frac{1}{|x|^n} &= \lim_{x\to 0_-} (-1)^m x^m \sin \frac{1}{(-1)^n x^n} = \lim_{x\to 0_-} (-1)^{m+n} x^m \sin x^{-n} \\ &= \begin{cases} 0, & (n < 0, m-n > 0) \vee (m > 0, n \geq 0) \\ (-1)^{m+n}, & n < 0, m-n = 0 \\ (-1)^{m+n} \sin 1, & n = 0, m = 0 \\ \text{не постоји}, & \text{иначе} \end{cases}. \end{aligned}$$

Добили смо $\lim\limits_{x\to 0} |x|^m \sin \frac{1}{|x|^n} = 0 = f(0)$ ако је $(n < 0, m-n > 0) \vee (m > 0, n \geq 0)$, односно за те вредности m, n функција је непрекидна на $\mathbb{R}$.

Испитајмо непрекидност функције f. функција f је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, јер је $|x|^m \sin \frac{1}{|x|^n}$ диференцијабилна на том скупу. Важи

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{|h|^m \sin \frac{1}{|h|^n}}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h^m \sin \frac{1}{h^n}}{h} = \lim_{h\to 0_+} h^{m-1} \sin h^{-n} \\ &= \begin{cases} 0, & (n > 0, m-1+n > 0) \vee (m-1 > 0, n \leq 0) \\ 1, & n > 0, m-1+n = 0 \\ \sin 1, & n = 0, m-1 = 0 \\ \text{не постоји}, & \text{иначе}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{h\to 0_-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{|h|^m\sin\frac{1}{|h|^n}}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{(-1)^m h^m \sin\frac{1}{(-1)^n h^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0_+}(-1)^{m+n}h^{m-1}\sin h^{-n} \\
&= \begin{cases} 0, & (n>0, m-1+n>0)\vee(m-1>0, n\le 0) \\ (-1)^{m+n}, & n>0, m-1+n=0 \\ -1\sin 1, & n=0, m-1=0 \\ \text{не постоји}, & \text{иначе.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Добили смо да важи $f'_+(0)=f'_-(0)$ ако и само ако

$$(n>0, m-1+n>0)\vee(m-1>0, n\le 0)\vee(n>0, m-1+n=0, m+n \text{ паран}),$$

односно
$$(n>0, m-1+n>0)\vee(m-1>0, n\le 0).$$

Функција је диференцијабилна у $x=0$ ако је непрекидна у тој тачки и $f'_+(0)=f'_-(0)$, а то важи за
$$(m>1)\vee(0<m\le 1, n>1-m)\vee(m=1, n<0).$$

$\triangle$

5.2 Основне теореме диференцијалног рачуна

Теорема 5.1. *(Ролова) Нека је функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна на сегменту $[a,b]$, диференцијабилна у интервалу (a,b) и $f(a)=b$. Тада у интервалу (a,b) постоји тачка c, таква да је $f'(c)=0$.*

Теорема 5.2. *(Лагранжова) Ако је функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна на сегменту $[a,b]$ и диференцијабилна у интервалу (a,b), онда постоји $c\in(a,b)$, тако да је*

$$\frac{f(b)f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Теорема 5.3. *(Дарбуова) Ако је функција $f(x)$ диференцијабилна на сегменту $[a,b]$, онда за произвољно μ између $f'(a)$ и $f'(b)$ постоји $c\in(a,b)$ тако да је $f'(c)=\mu$.*

Теорема 5.4. *(Кошијева) Ако су функције $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидне на $[a,b]$, диференцијабилне у (a,b) и $g'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$, онда постоји тачка $c\in(a,b)$, тако да је*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Задатак 5.10. Права $y=kx+n$ додирује график функције $f\in C^3(\mathbb{R})$ у тачки $(a,f(a))$ и пресеца га у двема различитим тачкама $(b,f(b))$ и $(c,f(c))$. Доказати да постоји тачка $\xi\in\mathbb{R}$ таква да је $f^{(3)}(\xi)=0$.

Решење. С обзиром да је f диференцијабилна и да $y=kx+n$ додирује график функције у $(a,f(a))$, важи $f'(a)=k$. Нека важи распоред $b<a<c$. Применом Лагранжове теореме на $[b,a]$ и на $[a,c]$ добијамо да постоји $x_1\in[b,a], x_2\in[a,c]$ тако да је $f'(x_1)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=k$ и $f'(x_2)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=k$. Функција f' задовољава услове Ролове теореме

на $[x_1,a]$ $(f' \in \mathcal{D}(x_1,a), f' \in \mathcal{C}[x_1,a]$ $f'(x_1) = f'(a))$, па добијамо да постоји $\varepsilon_1 \in [x_1,a]$ тако да је $f''(\varepsilon_1) = 0$. Слично, применом Ролове теореме на $[a,x_2]$, добијамо да постоје $\varepsilon_2 \in [a,x_2]$ за које је $f''(\varepsilon) = 0$. На крају, применом Ролове теореме за функцију f'' на $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ $(f'' \in \mathcal{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $f'' \in \mathcal{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$, $f''(\varepsilon_1) = f''(\varepsilon_2) = 0)$ добијамо да постоји $\varepsilon \in (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ за које је $f'''(\varepsilon) = 0$. △

Задатак 5.11. Дата је функција $f(x) = 2x^3 + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}$.

а) Доказати да се функција може додефинисати тако да буде диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

б) Да ли постоји околина тачке $x = 0$ у којој је додефинисана функција монотона?

Задатак 5.12. Нека је $f \in \mathcal{C}^{(1)}[0,+\infty)$, при чему за свако $x \in (0,+\infty)$ важи $f'(x+T) = f'(x)$, где је $T > 0$. Ако је $f(0) > 0$ и $f'(x) < 1$ за свако $x \in (0,+\infty)$, тада постоји $\xi \in [0,+\infty)$ такво да је $f(\xi) = \xi$. Доказати.

Задатак 5.13. Доказати да за $x > 2$ важи $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1$.

Решење. Нека је $x > 2$ фиксирано. Тада се може применити Лагранжова теорема на функцију $f(t) = t\cos\frac{\pi}{t}$, која је непрекидна на $[x,x+1]$ и диференцијабилна на $(x,x+1)$. Добијамо да постоји $\varepsilon \in [x,x+1]$ тако да је $f(x+1) - f(x) = f'(\varepsilon) = \cos\frac{\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{\varepsilon}\sin\frac{\pi}{\varepsilon}$. С обзиром да је $x > 2$, имамо $0 < \frac{\pi}{\varepsilon} < \frac{\pi}{2}$, па ћемо доказати да је $g(t) = \cos t + t\sin t > 1$ на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Наиме, $g(0) = 1$ и $g'(t) = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t > 0$, одакле је g растућа функција. Узимајући у обзир непрекидност функције g следи да је $g(t) > 1$ за $t \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Према томе, $f(x+1) - f(x) = \cos\frac{\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{\varepsilon}\sin\frac{\pi}{\varepsilon} > 1$. Доказали смо за произвољно $x > 2$, па тиме важи неједнакост за свако $x > 2$. △

5.3 Изводи вишег реда

Задатак 5.14. Наћи n-ти извод функције $f(x) = a^x$.

Решење. На основу неколико извода

$$f'(x) = a^x \ln a, f''(x) = a^x \ln^2 a, f'''(x) = a^x \ln^3 a,$$

можемо претпоставити да је

$$f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a.$$

Доказаћемо математичком индукцијом.

1) За $n = 1$ важи једнакост $f'(x) = a^x \ln x$.

2) Ако важи једнакост за $n = k$, онда је $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(a^x \ln^k a\right)' = a^x \ln^{k+1} a$, па једнакост важи и за $n = k + 1$. △

Задатак 5.15. Наћи n-ти извод функције $f(x) = \sin x$.

Решење. На основу неколико извода

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x,$$

можемо претпоставити да је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k-3; \\ \cos x, & n = 4k-2; \\ -\sin x, & n = 4k-1; \\ -\cos x, & n = 4k. \end{cases} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Математичом индукцијом се доказује да претходна једнакост важи. △

Задатак 5.16. Наћи n-ти извод функције $f(x) = \cos x$.
Наћи n-ти извод функције $f(x) = \cos x$.

Решење. На основу неколико извода

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x,$$

можемо претпоставити да је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\sin x, & n = 4k-3; \\ -\cos x, & n = 4k-2; \\ \sin x, & n = 4k-1; \\ \cos x, & n = 4k. \end{cases} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Математичом индукцијом се доказује да претходна једнакост важи. △

Задатак 5.17. Наћи n-ти извод функције $f(x) = x^m$.

Решење. На основу првих неколико извода

$$f'(x) = mx^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \quad f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

закључујемо да је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}, & m \notin \mathbb{N} \text{ или } n \leq m; \\ 0, & m \in \mathbb{N}, n > m, \end{cases}$$

што се може и доказати математичком индукцијом. △

Задатак 5.18. Наћи n-ти извод функције $f(x) = \ln x$.

Решење. Први извод је $f'(x) = \frac{1}{x}$, па се коришћењем задатка 5.17 добија

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = (-1)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-1-n+1)x^{-1-n} \\ &= (-1)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)x^{-n} = (-1)^n n! x^{-n}. \end{aligned}$$

△

Задатак 5.19. Наћи n-ти извод функције $f(x) = (ax+b)^p$.

Решење. Помоћу првих неколико извода

$$f'(x) = ((ax+b)^p)' = p((ax+b)^{p-1})a,$$

$$f''(x) = (p((ax+b)^{p-1})a)' = p(p-1)(ax+b)^{p-2}a^2,$$

можемо претпоставити да је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)(ax+b)^{p-n}a^n, & p \notin \mathbb{N} \text{ или } n > p; \\ 0, & p \in \mathbb{N}, n > p. \end{cases}$$

Доказ следи на основу математичке индукције. △

Задатак 5.20. (Лајбницова формула) За две функције $u(x)$ и $v(x)$ и за $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Задатак 5.21. Наћи 100-ти извод функције $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

Решење. Користећи Лајбницову формулу (задатак 5.20) имамо

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)} = \left((1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)} \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (1+x)^{(k)} \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100-k)} \\ &= \binom{100}{0}(1+x)\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)} + \binom{100}{1}(1+x)'\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(99)} \\ &= (1+x)\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)} + 100\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(99)}. \end{aligned}$$

На основу задатка 5.19 важи

$$\begin{aligned} \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}(-1)^n \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}(-1)^n \\ &= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}(-1)^n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}. \end{aligned}$$

Добили смо

$$f^{(100)}(x) = (1+x)\frac{(199)!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-100} + 100\frac{(197)!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-99}.$$

$\triangle$

Задатак 5.22. Наћи 200-ти извод функције $f(x) = x \sinh x$.

Задатак 5.23. Наћи n-ти извод функције $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Решење. Трансформацијом $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ добијамо

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)^{(n)} \\
&= \left((x-2)^{-1}\right)^{(n)} - \left((x-1)^{-1}\right)^{(n)} \\
&= (-1)(-2)\cdot \ldots \cdot(-n)(x-2)^{-n-1} - (-1)(-2)\cdot \ldots \cdot(-n)(x-1)^{-n-1} \\
&= (-1)^n n!(x-2)^{-n-1} - (-1)^n n!(x-1)^{-n-1}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 5.24. Наћи n-ти извод функције $f(x) = \sin^3 x$.

Задатак 5.25. Доказати $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$, где је $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задатак 5.26. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решење. С обзиром да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ имамо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Код ове граничне вредности не можемо применити Лопиталово правило. Наиме, гранична вредност

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

не постоји. $\triangle$

Задатак 5.27. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha \ln x$, где је $\alpha > 0$.

Решење. Коришћењем Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{L.P.}{\overbrace{=}} \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to0+} -\frac{1}{\alpha}x^\alpha = 0.$$

$\triangle$

Задатак 5.28. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решење. Трансформацијом $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, где је $f(x)$ позитивна функција, добијамо

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}},$$

при чему је

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} \overbrace{=}^{L.P.} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Према томе,

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

$\triangle$

Задатак 5.29. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

Решење. Користећи Лопиталово правило добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} &\overbrace{=}^{L.P.} \lim_{x\to 1} \frac{(x^x - x)'}{(\ln x - x + 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{(\frac{1}{x} - 1)} \\ &\overbrace{=}^{L.P.} \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^x(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} = -2. \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 5.30. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{x^x - 1}$.

Решење. Из непрекидности функције $f(x) = e^x$ важи

$$\lim_{x\to 0_+} x^{x^x-1} = \lim_{x\to} e^{(x^x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0_+} (x^x - 1)\ln x}.$$

Даље,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0_+} (x^x - 1)\ln x &= \lim_{x\to 0_+} (e^{x\ln x} - 1)\ln x = \lim_{x\to 0_+} (1 + x\ln x + o(x\ln x) - 1)\ln x \\ &= \lim_{x\to 0_+} (x\ln x + o(x\ln x))\ln x = \lim_{x\to 0_+} (x\ln^2 x + o(x\ln^2 x)) = 0. \end{aligned}$$

Добили смо

$$\lim_{x\to 0_+} x^{x^x-1} = e^0 = 1.$$

$\triangle$

Задатак 5.31. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x})$.

Решење. Гранична вредност је неодређеног облика $\infty - \infty$ и урадићемо је Лопиталовим правилом, али пре тога сведемо на облик $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overbrace{=}^{L.P.} \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overbrace{=}^{L.P.} \lim_{x\to 0} \frac{-x\cos x - \cos x}{\cos x + \cos x - \sin x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 5.32. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

5.4 Испитивање функција

Задатак 5.33. Нека је $f(x) = \dfrac{xe^{\frac{\pi}{x}}}{1+e^{\frac{\pi}{x}}}$. Одредити константе a, b и c тако да важи

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\tfrac{1}{x}),$$

када $x \to +\infty$.

Решење. Коришћењем развоја $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \binom{\alpha}{2} t^2 + o(t^2)$ када $t \to 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{xe^{\frac{\pi}{x}}}{1+e^{\frac{\pi}{x}}} = xe^{\frac{\pi}{x}}(1+e^{\frac{\pi}{x}})^{-1} = xe^{\frac{\pi}{x}}\left(2 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right)^{-1} \\
&= x\left(1 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right)\left(1 - \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi^2}{2x^2} + \frac{\pi^2}{4x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{2x^2} - \frac{\pi^2}{2x^2} + \frac{\pi^2}{4x^2} - \frac{\pi}{2x}\cdot\frac{\pi}{x} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{4x^2} - \frac{\pi^2}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) = \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi^2}{4x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8x} + o(\tfrac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Добили смо константе $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\pi}{4}, c = -\frac{\pi^2}{8}$. △

Задатак 5.34. Нека је $f(x) = \sqrt{x(x+2)}e^{\frac{1}{x}}$.
Одредити константе a_1, b_1 и c_1 тако да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \dfrac{c_1}{x} + o(\frac{1}{x}), x \to +\infty$.
Одредити константе a_2, b_2 и c_2 тако да важи $f(x) = a_2x + b_2 + \dfrac{c_2}{x} + o(\frac{1}{x}), x \to -\infty$.

Решење. Нека $x \to +\infty$. Онда важи

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x(x+2)}\,e^{\frac{1}{x}} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}\,e^{\frac{1}{x}} = x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\
&= x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\
&= x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) = x + 2 + \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Добили смо константе $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 1$.

Нека $x \to -\infty$. Тада важи

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x(x+2)}e^{\frac{1}{x}} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}e^{\frac{1}{x}} = -x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} \\ &= -x\left(1+\frac{1}{2}\frac{2}{x}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\ &= -x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right) \\ &= -x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})\right) = -x-2-\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x}) \end{aligned}$$

Добили смо константе $a_2 = -1, b_2 = -2, c_2 = -1$. △

Задатак 5.35. Наћи асимптоте функције $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{2x}\right) e^{\frac{1}{3x}}$.

Решење. Област дефинисаности је $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Испитајмо постојање косе асимптоте. Када $x \to \pm\infty$ важи

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = \left(x+\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{18x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) = x+\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Према томе, коса асимптота (слева и здесна) је $y = x + \dfrac{1}{3}$.

Испитајмо постојање вертикалне асимптоте. С обзиром да функција није дефинисана у $x = 0$, а јесте у левој и десној околини, онда ћемо наћи следеће граничне вредности

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = (\infty\cdot\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0-}\left(x+\frac{1}{2x}\right)e^{\frac{1}{3x}} = (-\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 0-}\left(xe^{\frac{1}{3x}}+\frac{1}{2x}e^{\frac{1}{3x}}\right).$$

Због

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{2x}e^{\frac{1}{3x}} = (-\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{3x}}}{\frac{1}{2x}} = (\text{Лопиталово пр.}) = \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{3x}}\frac{3}{9x^2}}{\frac{2}{4x^2}} = \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{3x}}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0,$$

имамо

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{\frac{1}{3x}} = (0\cdot 0) = 0.$$

Одавде видимо да је $x = 0$ вертикална асимптота здесна, а није вертикална асимптота слева. △

Задатак 5.36. Наћи асимптоте функције $f(x) = \ln(1+e^{-x}) + x - \dfrac{2e^x}{1+e^x}$.

Решење. Област дефинисаности је $D_f = (-\infty, +\infty)$.

Испитајмо постојање косе асимптоте.

Када $x \to +\infty$ имамо

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^{-x}) + x - \frac{2e^x}{1+e^x} = e^{-x} + o(e^{-x}) + x - \frac{2}{\frac{1}{e^x}+1} \\ &= e^{-x} + o(e^{-x}) + x - 2(1+e^{-x})^{-1} \\ &= e^{-x} + o(e^{-x}) + x - 2(1-e^{-x}+o(e^{-x})) = x - 2 + 2e^{-x} + o(e^{-x}). \end{aligned}$$

Коса асимптота здесна је $y = x - 2$.

Када $x \to -\infty$ имамо

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^{-x}) + x - \frac{2e^x}{1+e^x} = \ln(e^{-x}(e^x+1)) + x - \frac{2e^x}{1+e^x} \\ &= -x + \ln(1+e^x) + x - \frac{2e^x}{1+e^x} = \ln(1+e^x) - \frac{2e^x}{1+e^x}, \end{aligned}$$

одакле је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, па је $y = 0$ хоризонтала асимптота слева.

Функција нема вертикалне асимптоте. △

Задатак 5.37. Наћи асимптоте функције $f(x) = x\mathrm{arctg}\dfrac{x}{|x|+1}$.

Решење. Област дефинисаности је $D_f = (-\infty, +\infty)$. Важи

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1} = (+\infty)\cdot\frac{\pi}{4} = +\infty,$$

па нема хоризонталну асимптоту, а косу ћемо наћи из следећих граничних вредности

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1} - \frac{\pi}{4}x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Коса асимптота здесна је $y = \dfrac{\pi}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

Хоризонтална асимптота слева не постоји јер је

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1} = (-\infty)\cdot\frac{-\pi}{4} = \infty.$$

Даље,

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}\frac{x}{-x+1} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{|x|+1} + \frac{\pi}{4}x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{-x+1} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

одакле је $y = -\dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2}$ коса асимптота слева.

Функција нема вертикалне асимптоте. △

Задатак 5.38. Да ли је $x = 0$ локални екстремум функције $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$?

Решење. Нађимо изводе функције $f(x)$ и њихове вредности у $x = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x, \ f(0) = 0,\\
f'(x) &= e^x - e^{-x} - 2\sin x, \ f'(0) = 0,\\
f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x, \ f''(0) = 0,\\
f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2\sin x, \ f'''(0) = 0,\\
f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x, \ f^{(4)}(0) = 4,
\end{aligned}$$

Из следећег $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 4 > 0$, следи да функција у $x = 0$ има локални минимум. △

Задатак 5.39. Доказати неједнакост $\operatorname{tg} x > x$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Решење. Формирајмо функцију $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Потребно је доказати да је функција позитивна на $(0, \frac{\pi}{2})$. Из првог извода

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 < 0 \text{ за } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

следи да је f опадајућа, а с обзиром да је $f(0) = 0$, онда је $f(x) < 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. △

Задатак 5.40. Доказати неједнакост $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решење. Формирајмо функцију $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3}$. Потребно је доказати да је функција позитивна на $(0, \frac{\pi}{2})$. Израчунајмо извод

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg} x^2 - x^2 < 0 \text{ за свако } x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Одавде следи да је функција опадајућа на $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а с обзиром да је $f(0) = 0$, имамо да је $f(x) < 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. △

Задатак 5.41. Доказати неједнакост $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, где је $x, y > 0, 0 < \alpha < \beta$.

Решење. Посматрајмо следеће еквиваленције за $0 < \alpha < \beta, t > 0$

$$\begin{aligned}
&(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow y\left((\tfrac{x}{y})^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} > y\left((\tfrac{x}{y})^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
\Leftrightarrow \ &\left((\tfrac{x}{y})^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left((\tfrac{x}{y})^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow (t^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(t^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Формирајмо функцију $f(p) = (t^p + 1)^{\frac{1}{p}}$. Потребно је доказати да је функција $f(p)$ опадајућа. Први извод је

$$\begin{aligned}
f'(p) &= \left((t^p + 1)^{\frac{1}{p}}\right)' = \left(e^{\ln(t^p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{p}\ln(t^p+1)}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}}\right)' = e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}}\left(\frac{\ln(t^p+1)}{p}\right)'\\
&= e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}} \frac{\frac{1}{t^p+1}t^p \ln t - \ln(t^p+1)}{p^2} = e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}} \frac{1}{p^2}\left(\frac{t^p}{t^p+1}p\ln t - \ln(t^p+1)\right)\\
&= e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}} \frac{1}{p^2(t^p+1)}\left(t^p p \ln t - (t^p+1)\ln(t^p+1)\right)\\
&= e^{\frac{\ln(t^p+1)}{p}} \frac{1}{p^2(t^p+1)} \ln\frac{(t^p)^{t^p}}{(t^p+1)^{(t^p+1)}} < 0,
\end{aligned}$$

одакле је $f(p)$ опадајућа. △

Задатак 5.42. Наћи локалне екстремуме функције $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Решење. Област дефинисаности функције је $(-\infty, +\infty)$. Први извод је

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}})' = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\tfrac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}} \\ &= \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}, \end{aligned}$$

одакле се види да не постоји у $x=0$ и у $x=1$, а анулира се у $x=\frac{1}{3}$.

Кандидати за локални екстремум су $x=0, x=1$ и $x=\frac{1}{3}$.

Први извод постоји и непрекидан је у околини ових тачака.

У околини тачке $x=\frac{1}{3}$ важи

$$f'\left(\tfrac{1}{3}-\varepsilon\right) = \frac{1-3(\frac{1}{3}-\varepsilon)}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{3}-\varepsilon)^2(1-\frac{1}{3}+\varepsilon)}} = \frac{3\varepsilon}{(\frac{1}{3}-\varepsilon)^2(\frac{2}{3}+\varepsilon)} > 0,$$

$$f'\left(\tfrac{1}{3}+\varepsilon\right) = \frac{1-3(\frac{1}{3}+\varepsilon)}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{3}+\varepsilon)^2(1-\frac{1}{3}-\varepsilon)}} = \frac{-3\varepsilon}{(\frac{1}{3}+\varepsilon)^2(\frac{2}{3}-\varepsilon)} < 0,$$

за довољно мали позитиван број ε, па је $x=\frac{1}{3}$ локални минимум, при чему је $f(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

У околини тачке $x=0$ важи

$$f'(-\varepsilon) = \frac{1-3(-\varepsilon)}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2(1+\varepsilon)}} > 0,$$

$$f'(\varepsilon) = \frac{1-3\varepsilon}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}} > 0,$$

за довољно мали позитиван број ε, па је $x=0$ није локални минимум.

У околини тачке $x=1$ важи

$$f'(1-\varepsilon) = \frac{1-3(1-\varepsilon)}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2(1-1+\varepsilon)}} < 0,$$

$$f'(1+\varepsilon) = \frac{1-3(1+\varepsilon)}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2(1-1-\varepsilon)}} > 0,$$

за довољно мали позитиван број ε, па је $x=1$ локални минимум, при чему је $f(1) = 0$. $\triangle$

Задатак 5.43. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})e^{-x},\ n \in \mathbb{N}.$$

Решење. Први извод функције постоји на $\mathbb{R}$ и једнак је

$$f'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Стационарна тачка је $x=0$, а први извод у околини те тачке је

$$f'(-\varepsilon) = -\frac{(-\varepsilon)^n}{n!}e^{\varepsilon}, f'(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^n}{n!}e^{-\varepsilon},\ \text{за } \varepsilon > 0.$$

Одавде следи закључак:

1° Ако је n паран, онда је $f'(-\varepsilon) < 0, f'(\varepsilon) > 0$ и функција нема локалних екстремума;

2° Ако је n непаран, онда је $f'(-\varepsilon) > 0, f'(\varepsilon) < 0$ и $x = 0$ је локални екстремум. $\triangle$

Задатак 5.44. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$

Решење. 1) Домен функције је $(-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$, због услова $x \neq 0$ и $x^2 + 2x \geq 0$.

2) Домен није симетричан, те функција f није ни парна ни непарна.

3) Знак функције, нуле функције:

Важе следеће еквиваленције

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ f(x) > 0 \ &\Leftrightarrow\ x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty). \end{aligned}$$

4) Хоризонталну асимптоту нема јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = +\infty$.

Коса асимптота када $x \to +\infty$ је $y = x + 2$, када $x \to -\infty$ је $y = -x - 2$, јер важе следећи развоји (задатак 5.34)

$$e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = x + 2 + \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}),\ x \to +\infty,$$

$$e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = -x - 2 - \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}),\ x \to -\infty.$$

Испитујемо понашање функције у десној околини тачке $x = 0$

$$\lim_{x\to0_+} f(x) = \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = (+\infty\cdot0) = \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x}\sqrt{x+2}.$$

Због

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0_+} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x} &= (+\infty\cdot0) = \lim_{x\to0_+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to0_+}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{x\to0_+} 2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{+\infty}{0_+}\right) = +\infty, \end{aligned}$$

следи да је $\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = +\infty$, а одатле $x = 0$ је вертикална асимптота здесна.

5) Први извод, монотоност, екстремне вредности: Први извод функције је

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x})' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2+2x} + e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}2(x+1) \\ &= e^{\frac{1}{x}}\frac{-x^2-2x+x^3+x^2}{x^2\sqrt{x^2+2x}} = e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2+2x}} = e^{\frac{1}{x}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x\sqrt{x^2+2x}} \end{aligned}$$

и монотост функције f зависи од знака функције $e^{\frac{1}{x}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$.

Формирајмо таблицу

монот.	$(-\infty,-2)$	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},+\infty)$
x	$-$	није деф.	није деф.	$+$	$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$	није деф.	није деф.	$-$	$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$	није деф.	није деф.	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	није деф.	није деф.	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	није деф.	није деф.	$\searrow$	$\nearrow$

Функција $f(x)$ опада на $(-\infty,-2)$, опада на $(0,\sqrt{2})$ и расте на $(\sqrt{2},+\infty)$. Тачка $x=\sqrt{2}\in D_f$, те је $x=\sqrt{2}$ локални минимум, $f(\sqrt{2})\approx 5$.

6) Други извод, конвексност, превојне тачке:

Други извод је

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2+2x}}\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2+2x}}+e^{\frac{1}{x}}\frac{2x^2\sqrt{x^2+2x}-(x^2-2)(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}x+\sqrt{x^2+2})}{x^2(x^2+2x)} \\ &= 2e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2+4x+2}{x^2(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

и из таблице

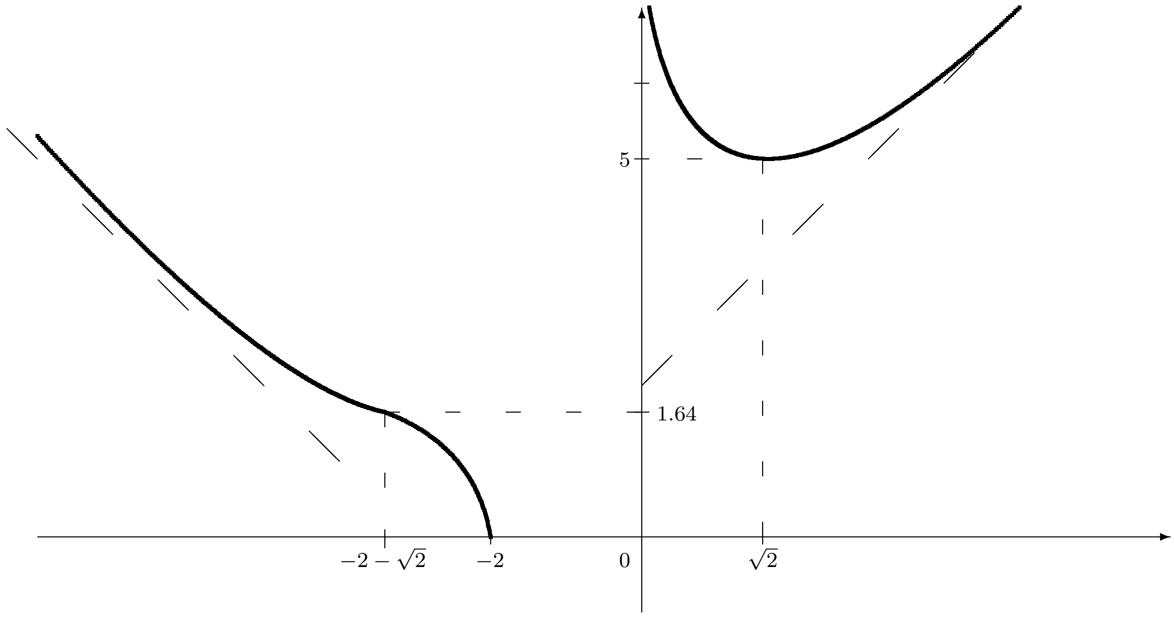
конв.	$(-\infty,-2-\sqrt{2})$	$(-2-\sqrt{2},-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
x^2+4x+2	$-$	$+$	није деф.	$+$
f'	$-$	$+$	није деф.	$+$
f	$\cup$	$\cap$	није деф.	$\cup$

закључујемо да је $f(x)$ конвексна на $(-\infty,-2-\sqrt{2})$, $f(x)$ конкавна на $(-2-\sqrt{2},-2)$ и $f(x)$ конвексна на $(0,+\infty)$. Према томе, $(-2-\sqrt{2},1.64)$ је превојна тачка.

Заједничка таблица за први и други извод је

график	$(-\infty,-2-\sqrt{2})$	$(-2-\sqrt{2},-2)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},+\infty)$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$
f	допунити	допунити	допунити	допунити

7) График функције је



△

Задатак 5.45. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Решење. 1) Домен функције је $D_f = (0, +\infty)$.

2) Функција f није ни парна ни непарна.

3) Из граничне вредности

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right) = 0$$

следи да је $y = 0$ хоризонтална асимптота здесна.

Нема вертикалну асимптоту јер је

$$\lim_{x\to0_+} f(x) = \lim_{x\to0_+} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0_+} \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0_+} \frac{1+o(1)}{1} = 1.$$

4) Функција је позитивна на D_f.

5) Први извод функције је

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x}\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}-(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)}.$$

6) Други извод функције је

$$f''(x) = \left(\frac{\sqrt{x}-(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} - (x+1)\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}x^{\frac{3}{2}}\right)(x+1) - (\sqrt{x}-(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x})(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})}{x^3(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}}\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2}\right).$$

Знак другог извода зависи од знака функције

$$g(x) = 3\text{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2}.$$

Први извод функције $g(x)$ је

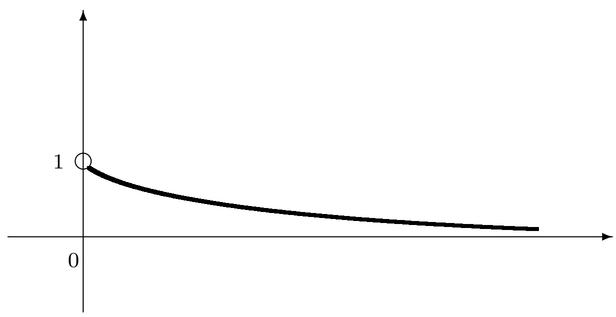
$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(3\text{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2}\right)' \\
&= \frac{3}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\left(5\sqrt{x}+\frac{5x+3}{2\sqrt{x}}\right)(x+1)^2 - \sqrt{x}(5x+3)2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)^3}\big(3(x+1)^2 - (x+1)(15x+3) + 4x(5x+3)\big) \\
&= \frac{8x^2}{2\sqrt{x}(x+1)^3},
\end{aligned}$$

одакле је $g'(x) > 0$ за свако $x \in (0,+\infty)$, односно g је растућа функција на $(0,+\infty)$. С обзиром да је непрекидна функција g растућа на $(0,+\infty)$ и да је $g(0) = 0$, функција g је позитивна на $(0,+\infty)$. Добили смо да је и $f''(x)$ позитивна функција на $(0,+\infty)$, односно да је f конвексна функција.

С обзиром да је непрекидна функција f' растућа (због $f''(x) > 0$ за свако $x \in (0,+\infty)$) и да је $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, имамо да је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (0,+\infty)$. Према томе, $f(x)$ је опадајућа функција. Из следеће таблице се може видети како изгледа график функције

график	$(0,+\infty)$
f	$\searrow$
f	$\cup$
f	дописати

7) График



$\triangle$

Задатак 5.46. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \text{arctg}|\ln|x||$.

Решење. 1) Домен функције је $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) Функција је парна јер је $f(x) = f(-x)$ за свако $x \in D_f$.

За $x > 0$ важи

$$f(x) = \text{arctg}|\ln x| = \begin{cases} \text{arctg}\ln x, & x \geq 1; \\ -\text{arctg}\ln x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Испитајмо функцију $h(x) = \operatorname{arctg} \ln x$ на $(0, +\infty)$.

1') Домен функције $h(x)$ је $D_h = (0, +\infty)$.

2') Функција $h(x)$ није ни парна ни непарна.

3') Из $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \ln x = \dfrac{\pi}{2}$, права $y = \frac{\pi}{2}$ је хоризонтална асимптота здесна.

Нема вертикалну асимптоту јер је $\lim\limits_{x\to 0_+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{arctg} \ln x = -\dfrac{\pi}{2}$.

4') Знак функције, нуле функције
$h(x) > 0 \quad \forall x > 1$
$h(x) < 0 \quad \forall 0 < x < 1$
$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

5') Први извод, монотоност, екстремне вредности

Први извод је

$$h'(x) = (\operatorname{arctg} \ln x)' = \frac{1}{1 + \ln^2 x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} > 0,$$

одакле је $h(x)$ растућа на D_f.

6') Други извод, конвексност, превојне тачке
Други извод је

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}\right)' = -\frac{1}{x^2(1 + \ln^2 x)}(1 + \ln^2 x + 2 \ln x) \\ &= -\frac{1}{x^2(1 + \ln^2 x)}(1 + \ln x)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

одакле је $h(x)$ конкавна на $(0, +\infty)$.

график	$(0, +\infty)$
f	$\nearrow$
f	$\cap$
f	допунити

7') График функције $h(x)$

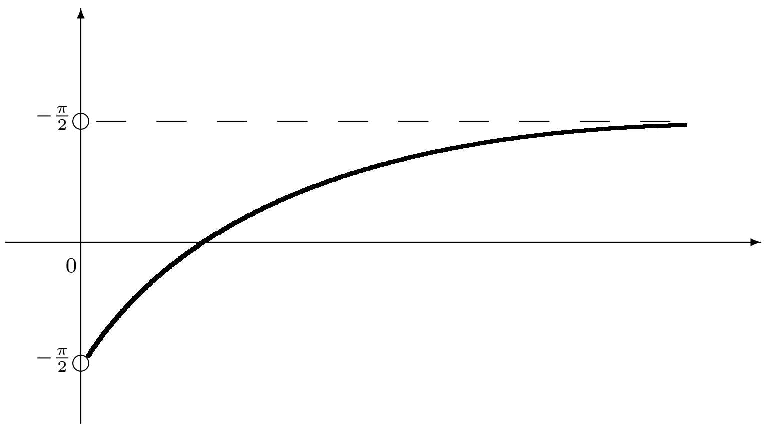


График функције $h(x)$ на $(0, +\infty)$

7) График функције $f(x)$

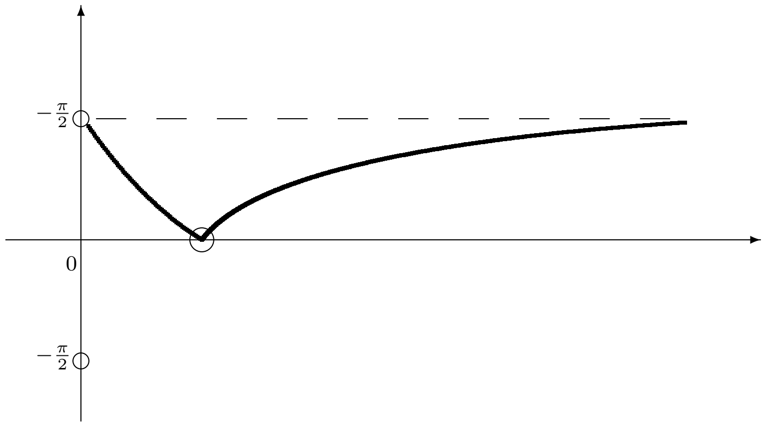


График функције $f(x)$ на $(0, +\infty)$

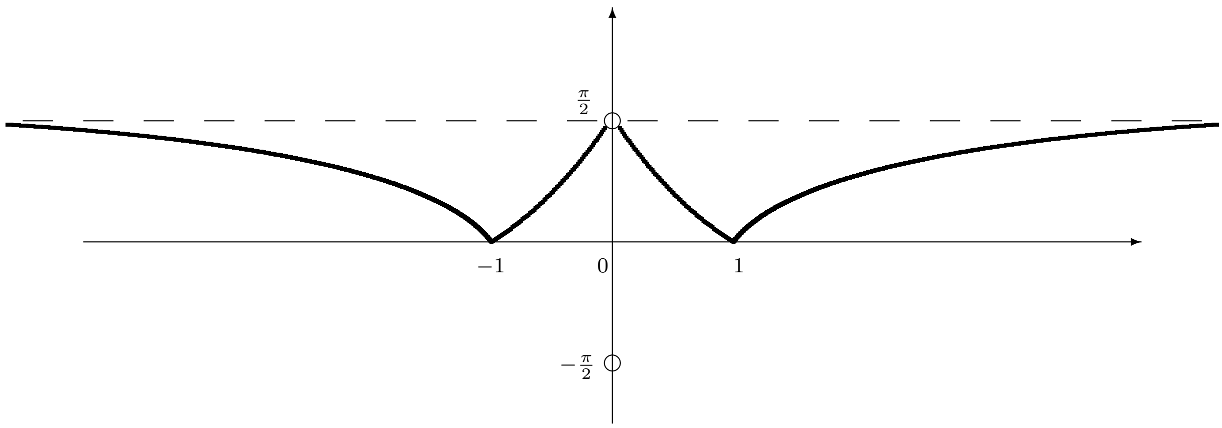


График функције $f(x)$ на $(0, +\infty)$

Наћи ћемо углове под којим график функције $f(x)$ улази у тачке $x = 1, x = 0$ и $x = -1$ и излази из $x = 1, x = 0$ и $x = -1$. Важи

$$\lim_{x \to 1_+} f'(x) = \lim_{x \to 1_+} h'(x) = \frac{1}{1 + \ln^2 x} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 1_+} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

одакле је угао под којим излази из $x = 1$ једнак

$$\varphi_1 = \text{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

а из

$$f'(1_-) = -h'(1) = -1$$

следи да је угао под којим улази у $x = 1$ једнак

$$\varphi_2 = \text{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Угао под којим излази из тачке $x = 0$ налазимо и следећег

$$\begin{aligned} f'(0_+) &= -h'(0_+) = -\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln^2 x)} = (\text{Лопиталово правило}) \\ &= -\lim_{x\to 0_+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\ln x \frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{-\frac{1}{x}}{2\ln x} = (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\infty, \end{aligned}$$

односно $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Функција улази у $x = 0$ под углом од $\frac{\pi}{2}$, улази у $x = -1$ под углом $-\frac{\pi}{4}$ и излази у $x = -1$ под углом од $\frac{\pi}{4}$. △

Задатак 5.47. а) Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x - 3}\right)^2.$$

б) Испитати број решења једначине $2x - \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x - 3}\right)^2 = \frac{18}{5}x + a$ у зависности од реалног параметра a.

Задатак 5.48. Нека је дата функција $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$.

а) Испитати ток и скицирати график функције f.
б) Испитати ток и скицирати график функције $F(x) = \max\{f(x), f(x-7)\operatorname{sgn}(x-7)\}$.

Задатак 5.49. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3}$.

Решење. 1) Домен функције је $D = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$

2) Функција није ни парна ни непарна

3) Функција је позитивна на $D = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, а има нулу у $x = -3$.

4) Важи

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3} = \lim_{t\to 0_+} e^{\frac{1}{t}}\sqrt{t^2+2t} = +\infty,$$

па је $x = 1$ вертикална асимптота.

Нема хоризонталну асимптоту јер је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Из следећих граничних вредности

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3}}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3} - x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}\left(1+\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right) - 1\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\left(1+\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right) - 1\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}+o(\tfrac{1}{x}) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} 3 + o(1) = 3 \end{aligned}$$

добијамо косу асимптоту $y = x+3$ када $x \to +\infty$. Слично и када $x \to -\infty$ имамо

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = -1,$$

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3}+x) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-e^{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-e^{\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}\left(1+\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)+1\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-1-\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\left(1+\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)+1\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-1-\frac{3}{x}+o(\tfrac{1}{x})-1\right) = \lim_{x\to-\infty} -3+o(1) = -3,
\end{aligned}$$

па је $y = -x-3$ коса асимптота када $x \to -\infty$.

5) Први извод је

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2+4x+3})' = e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}\sqrt{x^2+4x+3} + e^{\frac{1}{x+1}}\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}} \\
&= e^{\frac{1}{x+1}}\frac{-x^2-4x-3+(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+4x+3}} \\
&= e^{\frac{1}{x+1}}\frac{-x^2-4x-3+x^3+4x^2+5x+2}{(x+1)^2\sqrt{x^2+4x+3}} = e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^3+3x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+4x+3}} \\
&= e^{\frac{1}{x+1}}\frac{(x+1)(x^2+2x-1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+4x+3}} = e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}}.
\end{aligned}$$

Из таблице

монот.	$(-\infty,-3]$	$(-1,\sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{2}-1,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x+1}}$	$+$	$+$	$+$
x^2+2x-1	$+$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{x^2+4x+3}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

добијамо да функција $f(x)$ опада на $(-\infty,-3]$, опада на $(-1,-1+\sqrt{2})$ и расте на $(\sqrt{2}-1,+\infty)$. Према томе, $x = -1+\sqrt{2} \in D$ је локални минимум и износи $f(\sqrt{2}-1) = 4,46$ и $x = 0 \in D$ је локални минимум и износи $f(-3) = 0$.

6) Други извод је

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}}\right)' = e^{\frac{1}{x+1}}\frac{-1}{(x+1)^2}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}} \\
+ &\quad e^{\frac{1}{x+1}}\frac{(2x+2)(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}-(x^2+2x-1)\left(\sqrt{x^2+4x+3}+(x+1)\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}\right)}{(x+1)^2(x^2+4x+3)} \\
= &\quad 2e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+6x+7}{(x+1)^3(x+3)\sqrt{x^2+4x+3}}.
\end{aligned}$$

Из таблице

конв.	$(-\infty,-3-\sqrt{2})$	$(-3-\sqrt{2},-3)$	$(-1,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x+1}}$	$+$	$+$	$+$
x^2+6x+7	$+$	$-$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
$\sqrt{x^2+4x+3}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

добијамо да функција $f(x)$ конвексна на $(-\infty,-3-\sqrt{2})$, конкавна на $(-3-\sqrt{2},-3)$ и конвексна на $(-1,+\infty)$. Према томе, $(-3-\sqrt{2},1.64)$ је превојна тачка.

7) График функције је ...

$\triangle$

5.5 Разни задаци

Задатак 5.50. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}-2\sqrt{n}\right)^2$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}-2\sqrt{n}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})+1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n\sqrt{n}}+o(\frac{1}{n\sqrt{n}})-1}-2\sqrt{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2\sqrt{n}+1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})}{1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n})}-2\sqrt{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(2\sqrt{n}+1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{6n}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^{-1}-2\sqrt{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(2\sqrt{n}+1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{6n}+\frac{1}{4n}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)-2\sqrt{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(2\sqrt{n}-1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+1-\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{3\sqrt{n}}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})-2\sqrt{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{6\sqrt{n}}+o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)^2 = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 5.51. Нека је

$$f(x)=\begin{cases} \ln(1+3x^2), & x\le -1\\ ax^2+bx+c, & -1<x\le 0\\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$$

Испитати за које вредности $a,b,c\in\mathbb{R}$ функција f је непрекидна, и за њих испитати диференцијабилност и равномерну непрекидност функције.

Решење. Функција је непрекидна на $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Из

$$\lim_{x\to -1_-} f(x)=\lim_{x\to -1_-}\ln(1+3x^2)=\ln 4,$$

$$\lim_{x\to -1_+} ax^2+bx+c=a-b+c,$$

$$\lim_{x\to 0_-} ax^2+bx+c=c,$$

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0,$$

следи да је $c=0$ и $a-b=\ln 4$.

Функција је диференцијабилна на $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Десни извод у $x=0$ је

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0_+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{\frac{\sin h}{\sqrt{h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{\sin h}{h}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty.$$

Према томе, функција није диференцијабилна у $x=0$.

Испитајмо диференцијабилност у $x=-1$. Десни и леви изводи су

$$f'_+(-1)=\lim_{h\to 0_+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{a(h-1)^2+b(h-1)-\ln 4}{h}=b,$$

$$\begin{aligned}
f'_-(-1)&=\lim_{h\to 0_-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0_-}\frac{\ln(1+3(h-1)^2)-\ln 4}{h}\\
&=\lim_{h\to 0_-}\frac{\ln(3h^2-6h+4)-\ln 4}{h}=\lim_{h\to 0_-}\frac{\ln(1+\frac{3}{4}h^2-\frac{3}{2}h)}{h}=\lim_{h\to 0_-}\frac{-\frac{3}{2}h+o(h)}{h}=-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Функција је диференцијабилна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. △

Задатак 5.52. Показати да важи:

а) $\frac{\ln x}{x-1}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ за свако $x>1$;

б) $\prod\limits_{k=2}^{n}\ln k\le\frac{\sqrt{n!}}{n}$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

Решење. а) Неједнакост је еквивалентна следећој неједнакости $\ln x\le\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Посматрајмо функцију $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Из

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}-(x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x^{\frac{3}{2}}}<0$$

следи да је функција f опадајућа на $(1,+\infty)$, а због $f(1)=0$, она је негативна на $(1,+\infty)$. Према томе, важи $\ln x\le\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

Задатак се може урадити и на други начин. Посматрајмо функцију $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\ln x-x+1}{(x-1)\sqrt{x}}$. Знак ове функције на $(0,+\infty)$ зависи од $g(x)=\sqrt{x}\ln x-x+1$. Први извод функције $g(x)$ је $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-1$, а други $g''(x)=-\frac{\ln x}{4x^{\frac{3}{2}}}<0$. Функција $g'(x)$ опада на $(1,+\infty)$ и из $g'(1)=0$ следи да $g'\le 0$ на $(1,+\infty)$. Доказали смо да је функција g опадајућа. С обзиром да је $g(1)=0$, важи $g(x)\le 0$ за свако $x\in(1,+\infty)$. Према томе, $f(x)\le 0$ на $(1,+\infty)$.

б) Коришћењем неједнакости под а) добијамо да за сваки природан број $n \geq 2$ важи

$$\prod_{k=2}^{n} \ln k \leq \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n}} = \frac{(n-1)!}{\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n!}}{n}.$$

$\triangle$

Задатак 5.53. У зависности од реалног параметра α, одредити

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{n^2+4n+2}{n^3+3n^2} \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha}.$$

Решење. Коришћењем развоја $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ и граничне вредности $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \left(\cos\left(\frac{n^2+4n+2}{n^3+3n^2} \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n} \left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right) \left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1} \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n} \left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right) \left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right) \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n} \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})\right) \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+o(\tfrac{1}{n^3}) \right) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+o(\tfrac{1}{n^3}) \right)^2 + o(\tfrac{1}{n^2}) + \frac{1}{2n^2} \right)^{n^\alpha} \\
= & \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)^{n^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{e}, & \alpha = 3 \\ 1, & \alpha < 3 \\ 0, & \alpha > 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 5.54. Наћи константе a, b, c тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} a^{\frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x^b}}, & x < 0; \\ c, & x = 0 \\ x^{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$. За такве добијене константе испитати диференцијабилност функције $f(x)$. Да ли је функција $f(x)$ инјективна на $[1, +\infty)$?

Решење. Функција је добро дефинисана јер важи $\sin x^2 - x^3 > 0$ за свако $x < 0$.

$$\lim_{x\to 0_+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0_+} e^{x^2 \ln x} = 1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0_-} a\frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}-1}{x^b} &= \lim_{x\to 0_-} a\frac{\sqrt{x^2-x^3+o(x^3)}}{x^b} = \lim_{x\to 0_-} -a\frac{\sqrt{1-x+o(x)}}{x^{b-1}}\\ &= \lim_{x\to 0_-} -a\frac{1+x+o(x)}{x^{b-1}} = \begin{cases} -a, & b=1\\ \infty, & b>1\\ 0, & b<1\end{cases}\end{aligned}$$

Према томе, добијамо да је $a=-1, b=1$ и $c=1$.

Функција је диференцијабилна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ јер су функције $-\frac{\sqrt{\sin x^2-x^3}}{x}$ и x^{x^2} диференцијабилне на $(-\infty,0)$, односно $(0,+\infty)$. Испитајмо диференцијабилност у $x=0$. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_+}\frac{h^{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{e^{h^2\ln h}-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0_+}\frac{1+h^2\ln h+o(h^2\ln h)-1}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{h^2\ln h+o(h^2\ln h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0_+} h\ln h + o(h\ln h) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_-}\frac{-\frac{\sqrt{\sin h^2-h^3}}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{-\sqrt{\sin h^2-h^3}-h}{h^2}\\ &= \lim_{h\to 0_-}\frac{-\sqrt{h^2-h^3+o(h^3)}-h}{h^2} = \lim_{h\to 0_-}\frac{\sqrt{1-h+o(h)}-1}{h} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Леви и десни извод се разликују, одакле функција није диференцијабилна у $x=0$.

Због

$$f'(x) = \left(x^{x^2}\right)' = x^{x^2}(2x\ln x + x) > 0 \quad \text{на } (1,+\infty)$$

функција је растућа, а из непрекидности на $[1,+\infty)$ следи да је и инјективна. $\triangle$

Задатак 5.55. Нека је дата функција $f(x) = 3x-6-\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.

а) Наћи константе a,b,c тако да важи $f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+o(\frac{1}{x})$ када $x\to+\infty$.

б) Испитати ток и скицирати график функције $f(x)$.

в) Наћи једначину тангенте графика функције $f(x)$ која са позитивним делом x-осе заклапа угао од $135°$.

Решење. а) Коришћењем развоја добијамо

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x-6-\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 = 3x-6-\ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2\\ &= 3x-6-\ln\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-2}\right)\\ &= 3x-6-\ln\left(\left(1+\frac{4}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\left(1+\frac{2}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\right)\\ &= 3x-6-\ln\left(1+\frac{6}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\\ &= 3x-6-\frac{6}{x}+o(\tfrac{1}{x}),\end{aligned}$$

одакле је $a = 3, b = -6, c = -6$.

б)

1) Област дефинисаности функције: $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Функција није ни парна ни непарна

3) Знак функције:

4) Функција има вертикалну асимптоту у $x = 1$ и у $x = -2$. То следи из следећих граничних вредности
$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -2_+} f(x) = \lim_{x \to -2_-} f(x) = +\infty.$$
Хоризонталну асимптоту нема. Коса асимптота је $3x - 6$ када $x \to \pm\infty$.

5) Први извод је $f'(x) = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)}$. Из таблице

монот.	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

добијамо да функција $f(x)$ расте на $(-\infty, -2)$, опада на $(-2, -1)$, расте на $(-1, 0)$, опада на $(0, 1)$ и расте на $(1, +\infty)$. Према томе, $x = -1 \in D$ је локални минимум и износи $f(-1) = \ln 4 - 9$, а $x = 0 \in D$ је локални максимум и износи $f(0) = -6 - \ln 4$.

6) Други извод је $f''(x) = \frac{-6(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}$. Из таблице

конв.	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
-6	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cap$

добијамо да је функција $f(x)$ конвексна на $(-\infty, -2)$, конвексна на $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, конкавна на $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, конкавна на $(0, 1)$ и конкавна на $(1, +\infty)$. Према томе, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ је превојна тачка.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cap$
$f(x)$	*dopuniti*	*dopuniti*	*dopuniti*	*dopuniti*	*dopuniti*	*dopuniti*

7) График функције је...

в) Важи $f'(x) = \operatorname{tg} 135° = -1$, односно $\frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)} = -1$ Из једначине добијамо $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, па су једначине тангенти $y = -(x - x_1) + f(x_1)$ и $y = -(x - x_2) + f(x_2)$. △

Задатак 5.56. а) Нека је функција $F \in C[0, +\infty) \cap D(0, +\infty)$, $F(x) \leq 0$ за $x \in [0, +\infty)$, $F(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Доказати да постоји $\varepsilon \in (0, +\infty)$ тако да је $F'(\varepsilon) = 0$.

б) Нека је $f \in C[0, +\infty) \cap D(0, +\infty)$, $f(0) = 1$ и $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x}$ за свако $x \in (0, +\infty)$. Доказати да постоји $c \in (0, +\infty)$ тако да је $f'(\varepsilon) = \frac{-1}{(1+\varepsilon)^2}$.

Решење. а) Ако постоји $x_1 \in (0, +\infty)$ тако да је $F(x_1) = 0$, онда можемо применити Ролову теорему на сегменту $[0, x_1]$. Ако је $F(x) < 0$ за свако $x \in (0, +\infty)$, онда је $F(x_1) = b < 0$. Из граничне вредности $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ следи да постоји $x_2 > x_1$ за које је $0 > F(x_2) = c > F(x_1)$. Функција $F(x)$ је непрекидна на $[0, x_1]$ и на $[x_1, x_2]$, одакле на основу Болцано Вајерштрасове теореме постоје тачке $m \in (0, x_1), n \in (x_1, x_2)$ за које је $F(m) = F(n) = \frac{c}{2}$. Примењујући Ролову теорему на $[m, n]$ важи да постоји $\varepsilon \in (m, n)$ за које је $F'(\varepsilon) = 0$.

б) Применимо део под а) на функцију $F(x) = f(x) - \frac{1}{1+x}$. △

Задатак 5.57. Наћи граничну вредност низа $a_n = \left(\frac{\ln n^x}{n+1} + x^n + n2^n\right)^{\frac{1}{n}}$ у зависности од позитивног параметра x.

Решење. Због

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}, \lim_{n\to\infty} n2^n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^x}{n+1} = 0,$$

посматраћемо следеће случајеве:

1° За $x > 2$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n^x}{n+1}}{x^n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^n}{x^n} = 0$, а одатле за довољно велико n добијамо горње ограничење

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^x}{n+1} + x^n + n2^n} \leq \sqrt[n]{x^n + x^n + x^n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{x^n} = x\sqrt[n]{3}$$

и доње

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^x}{n+1} + x^n + n2^n} \geq \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Из $\lim\limits_{n\to\infty} x = x, \lim\limits_{n\to\infty} x\sqrt[n]{x} = x$ и Теореме о два полицајца имамо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

2° За $x = 2$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n^2}{n+1}}{n2^n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n2^n} = 0$, а одатле за довољно велико n добијамо горње ограничење

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^2}{n+1} + 2^n + n2^n} \leq \sqrt[n]{n2^n + n2^n + n2^n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2^n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}2$$

и доње

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^2}{n+1} + 2^n + n2^n} \geq \sqrt[n]{n2^n} = 2\sqrt[n]{n}.$$

Из $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n} = 2$ и Теореме о два полицајца имамо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

3° За $x \in (0,2)$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n^x}{n+1}}{n2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n2^n} = 0$, а одатле за довољно велико n добијамо горње ограничење

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^x}{n+1} + x^n + n2^n} \leq \sqrt[n]{n2^n + n2^n + n2^n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2^n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}2$$

и доње

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\ln n^x}{n+1} + x^n + n2^n} \geq \sqrt[n]{n2^n} = 2\sqrt[n]{n}.$$

Из $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n} = 2$ и Теореме о два полицајца имамо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 2, & x \in (0,2] \\ x, & x > 2. \end{cases}$$

△

Задатак 5.58. а) Наћи Маклоренов полином трећег степена за функцију

$$f(x) = \arcsin x.$$

б) Израчунати граничну вредност:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(e^{\arcsin\frac{1}{n}} - e^{\operatorname{arctg}\frac{n}{n^2+1}}\right)}{n\cos\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n} - 2}.$$

Решење. а) Маклоренов полином трећег степена је

$$M_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Наћи ћемо изводе функције до реда 3. Имамо

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \left(x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + x\left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' \\ &= \left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + x\left(3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right) \\ &= \left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + 3x^2\left((1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right), \end{aligned}$$

те је Маклоренов полином

$$M_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3.$$

б) Коришћењем дела под а) имамо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(e^{\arcsin\frac{1}{n}} - e^{\operatorname{arctg}\frac{n}{n^2+1}}\right)}{n\cos\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n} - 2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})} - e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}}\right)}{n\left(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3})\right)\left(\frac{2}{n}-\frac{4}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-2} \\ = \lim_{n\to\infty} &\frac{n\left(e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})} - e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}\right)}{n\left(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3})\right)\left(\frac{2}{n}-\frac{4}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)-2} \\ = \lim_{n\to\infty} &\frac{n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})) - e^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)-\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}}\right)}{-\frac{7}{3}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} \\ = \lim_{n\to\infty} &\frac{n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3}) - e^{\frac{1}{n}-\frac{4}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})}\right)}{-\frac{7}{3}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} \\ = \lim_{n\to\infty} &\frac{n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})-1-\frac{1}{n}+\frac{4}{3n^3}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)}{-\frac{7}{3}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} \\ = \lim_{n\to\infty} &\frac{n\left(\frac{11}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)}{-\frac{7}{3}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{11}{6}+o(1)}{-\frac{7}{3}+o(1)} = -\frac{11}{14}. \end{aligned}$$

△

Задатак 5.59. Нека је функција f непрекидна на $[0,2]$, диференцијабилна на $(0,2)$ и нека важи

$$f(0) = f(2) = M > 0 \quad \text{и} \quad |f'(x)| \le M \quad \text{за свако } x \in (0,2).$$

Доказати да је функција f ненегативна на $[0,2]$.

Решење. Претпоставимо да постоји $x \in (0,2)$ за које је $f(x) < 0$. Ако је $x \in (0,1]$, онда на основу Лагранжове теореме постоји $c \in (0,x)$ тако да је $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, а одатле $|f'(c)| = \left|\frac{f(x)-M}{x}\right| > \frac{M}{1} = M$.

Слично се доказује када је $x \in (1,2)$. Примењује се Лагранжова теорема на $(1,2)$ и добија се да постоји $c \in (1,2)$ тако да је $|f'(c)| = \left|\frac{f(2)-f(x)}{2-x}\right| > \frac{M}{1} = M$.

Дошли смо до контрадикције. Према томе, f је ненегативна на $[0,2]$. △

Задатак 5.60. Нека је функција f непрекидна на $[0,2]$, диференцијабилна на $(0,2)$ и нека важи

$$f(0) = f(2) = M > 0 \quad \text{и} \quad |f'(x)| \le M \quad \text{за свако } x \in (0,2).$$

Доказати да је функција f позитивна на $[0,2]$.

Решење. Претпоставимо да постоји $x \in (0,2)$ за које је $f(x) = 0$. Ако је $x \in (0,1)$, онда на основу Лагранжове теореме постоји $c \in (0,x)$ тако да је $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, а одатле $|f'(c)| = \left|\frac{f(x)-M}{x}\right| > \frac{M}{1} = M$.

Слично се доказује када је $x \in (1,2)$. Примењује се Лагранжова теорема на $(1,2)$ и добија се да постоји $c \in (1,2)$ тако да је $|f'(c)| = \left|\frac{f(2)-f(x)}{2-x}\right| > \frac{M}{1} = M$.

Ако је $x = 1$, онда постоји $x_1 \in (0,1)$ тако да је $f(x_1) \neq -Mx_1 + M$, иначе не би функција била диференцијабилна у $x = 1$. Ако је $f(x_1) < -Mx_1 + M$, онда применимо Лагранжову теорему на $(0,x_1)$ и добијамо да постоји $x_2 \in (0,x_1)$ тако да је

$$|f'(x_2)| = \left|\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}\right| = \left|\frac{f(x_1)-M}{x_1}\right| > \left|\frac{M+Mx_1-M}{x_1}\right| = M.$$

Ако је $f(x_1) > -Mx_1+M$, онда ћемо применити Лагранжову теорему на $(x_1,1)$ и добити контрадикцију.

Дошли смо до контрадикције. Према томе, f је позитивна на $[0,2]$. △