Вероватноћа и статистика

- списак задатака са часова вежби -

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

1. Коцка чије су све стране обојене подељена је у 1000 мањих коцки једнаке величине. Израчунати вероватноћу да случајно изабрана коцка има тачно две обојене стране.
2. Израчунати вероватноћу да цифре десетица и јединица куба случајно изабраног природног броја буду јединице.
3. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима од 1 до n извлачи се једна по једна цедуља,

   (а) без враћања,

   (б) са враћањем,

   и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви $1, 2, \ldots, n$.
4. Хотел има n соба поређаних једна до друге у правој линији. На случајан начин k $(k < n)$ гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.
5. На случајан начин се N људи размешта за округлим столом. Израчунати вероватноћу да два одабрана лица не седну једно до другог.
6. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A, односно играч B, ако је тренутни резултат 4:2 за играча A.
7. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m предмета. Израчунати вероватноћу да међу тим предметима буде тачно l неисправних.
8. Израчунати вероватноћу да се записивањем по случајном редоследу две цифре 1, једне цифре 2, три цифре 3, две цифре 4 и једне цифре 6 добије деветоцифрени број који на непарним местима има непарне цифре.

ФОРМУЛА УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА

9. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Гледаоци случајно бирају места без обзира на карте које имају. Израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад $n \to \infty$?
10. У воз који има m вагона пење се n $(n \geq m)$ путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.

ГЕОМЕТРИЈСКА ВЕРОВАТНОЋА

11. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.
12. Растојање између две паралелне телефонске линије дужине l је d $(d < l)$. На свакој од телефонских линија на непознатом месту постоји прекид. Израчунати вероватноћу да је растојање R међу тачкама прекида не веће од a $(d < a < \sqrt{l^2 + d^2})$.

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА

13. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 22\}$ случајно је изабран један број. Израчунати вероватноћу да је изабран паран број ако је познато да је изабран број дељив са три.

14. У ред са 10 седишта на случајан начин седају три особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да је особа Z села између особа X и Y.

15. У чинији се налазе четири јабуке сорте 1 и пет јабука сорте 2. Девојчица савког дана поједе по једну јабуку. Израчунати вероватоноћу да ће девојчица прво појести све јабуке сорте 2.

16. Свака од 15 испитних цедуља садржи по два питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би положио испит он треба да одговори или на оба питања са цедуље коју прву извуче или на једно питање са цедуље коју прву извуче и на прво питање са цедуље коју другу извуче. Шта је вероватније: да студент положи или да не положи испит?

17. Човек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа (без враћања) док не нађе одговарајући кључ. Израчунати вероватноћу да тражени кључ извуче у k-том извлачењу, где је k фиксиран број такав да је $1 \leq k \leq n$.

18. Задатак 6.

19. На турниру треба одиграти три партије стоног тениса против шампиона A и нешто слабијег играча B по једној од шема $A - B - A$ или $B - A - B$. Награда се добија ако се победи у бар две партије узастопно. Коју шему изабрати?

ФОРМУЛА ПОТПУНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

20. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је пет нових и три стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.
    (а) Израчунати вероватноћу да оба другоодабрана дела буду нова.
    (б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су првоодабрани делови били стари.

21. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица у кутији су једнако вероватне. Из кутије се четири пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

22. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p. Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вероватноћом налази на било којој од n полица. Прегледано је m $(m < n)$ полица и та књига није нађена. Израчунати вероватноћу да је она сада у библиотеци.

23. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији $\frac{1}{4}$ куглица су црне, а $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Извучена куглица се враћа у кутију из које је извучена и из ње се опет извлачи једна куглица. Израчунати вероватноћу да ова куглица буде црна.

ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ И ДИСПЕРЗИЈА.

24. У смеру кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно један од другог. На сваком семафору се с вероватноћом $p = 0.5$ појављује црвено и с вероватноћом $q = 0.5$ зелено светло. Случајна величина X представља број семафора поред којих пролази аутомобил до првог заустављања. Одредити закон и функцију расподеле вероватноћа случајне величине X.

25. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлачимо, без враћања, док не извучемо цедуљу са непарним бројем. Ако је X збир извучених бројева, а Y број извлачења, одредити законе расподела вероватноћа случајних величина X и Y. Израчунати њихово математичко очекивање и дисперзију.

26. Из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y. Нека је $S = \max\{x, y\}$. Одредити расподелу случајне величине S и израчунати $P\{0.5 < S \leq 3.5\}$, $P\{S > 2\}$, као и очекивање ES.

27. Из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ бира се oђедном m различитих бројева, $2 \leq m \leq n$. Нека је R максимално растојање међу одабраним бројевима. Одредити расподелу случајне величине R.

28. Вероватноћа да кошаркаш погоди кош је $p \in (0, 1)$. Он гађа све док не погоди. Израчунати очекивани број покушаја до поготка.

29. Баца се коцкица за игру. Израчунати очекивани број бацања до појаве свих бројева.

30. Резултат гађања је погодак са вероватноћом p или промашај са вероватноћом $1-p$. Изводи се n независних гађања. Израчунати очекивани број промена резултата у тих n експеримената.

31. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу. Ако је $Y = n - X$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати EY и DY.

32. Нека је X случајна величина чији је закон расподеле

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix},$$

за $p \in (0, \frac{1}{2})$. Наћи законе расподеле за случајне величине $Y = X^2$ и $Z = e^X$. Израчунати DY и DZ.

33. У кутији се налазе три куглице нумерисане бројевима 1,2,3. Из кутије се на случајан начин бирају две куглице, једна по једна са враћањем. Нека је X количник бројева добијених у првом и другом извлачењу.
    (а) Одредити закон расподеле случајне величине X.
    (б) Скицирати график функције расподеле F_X.
    (в) Израчунати вероватноћу да X узме целобројну вредност.

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ. НЕЗАВИСНОСТ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА.

34. Новчић се се баца четири пута. Нека је X броја палих писама, а Y највећи број узастопних понављања писма. Одредити заједничку расподелу вектора (X, Y) и испитати независност случајних величина X и Y.

35. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлаче се цедуље, без враћања, док се не извуче цедуља са непарним бројем. Нека је X збир извучених бројева, а Y број извлачења. Одредити расподелу случајне величине (X, Y), као и маргиналне расподеле за X и Y. Испитати независност случајних величина X и Y и израчунати очекивање производа X и Y, EXY.

36. За случајне величине X и Y из претходног задатка, одредити расподелу случајне величине Z, где је $Z = XY$.

37. Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p), 0 < p < 1$, расподелом. Ако је $Y = max\{X_1, X_2\}$, одредити расподелу случајне величине Y.

38. Нека су $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ и $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ независне случајне величине. Наћи респоделу њиховог збира, $Z = X + Y$.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ ПУАСОНОВОМ РАСПОДЕЛОМ

39. Дефектан артикал се производи са вероватноћом 0.02. Артикли се пакују у кутије од 100 комада. Израчунати:

    (а) вероватноћу да у кутији нема дефектних артикала;

    (б) вероватноћу да је број дефектних артикала у кутији већи од пет.

40. Познато је да у неком граду становник има бицикл са вероватноћом 0.02, а мотор са вероватноћом 0.01, с тим што нико нема и бицикл и мотор. Израчунати вероватноћу да од 100 случајно изабраних становника број оних који поседују бар једно од ова два превозна средства буде између 2 и 6 (укључујући и те бројеве).

41. Из скупа бројева $\{1, 2, ..., n\}$ на случајан начин се, са враћањем, извлачи $2n$ бројева ($n \geq 100$). Одредити најмањи број k такав да вероватноћа да број извучених четворки не буде мањи од k износи највише 0.05.

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

42. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. Одредити функцију расподеле те случајне величине.

43. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x)^2, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

    (а) Израчунати константу a за коју је $f(x)$ густина расподеле (вероватноћа) неке случајне величине X.

    (б) Одредити функцију расподеле те случајне величине.

    (в) Израчунати $P\{X > 1/3\}$.

    (г) Израчунати очекивање EX и дисперзију DX.

44. Наћи расподелу случајне величине $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, где је $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

45. Нека је X непрекидна случајна величина са густином $f_X(x)$. Наћи расподелу случајне величине Y, где је $Y = X^2$.

46. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-\pi/2, \pi/2]$ расподелу. Ако је $Y = \cos X$, одредити густину расподеле случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

47. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Одредити функције расподела следећих случајних величина:

    (а) $Y = |1 - X|$

    (б) $Z = \min\{X, X^2\}$

48. Број φ се случајно бира из сегмента $[0, \pi/2]$, а затим се кроз тачку $A(0,1)$ повлачи права која са позитивним делом x осе заклапа угао φ. Ако је D удаљеност те праве од координатног почетка, одредити расподелу случајне величине D.

49. Штап дужине $b-a$ случајно се ломи на једном месту. Израчунати очекивану дужину крађег дела штапа.

50. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,2]$ расподелу. Ако је $Y = \min\{X, 1\}$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ НОРМАЛНОМ РАСПОДЕЛОМ

51. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки са вероватноћом 0.05 захтева дораду. Колики треба да буде капацитет паркинга, па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају дораду?

52. Стрелац погађа циљ са вероватноћом 0.4. Колико најмање гађања треба да планира, па да вероватноћа да ће имати бар 80 погодака буде 0.9?

53. У позориште са 1000 места посетиоци улазе случајно на два улаза који имају по гардеробу. Колико најмање места треба да буде у свакој гардероби, па да са вероватноћом 0.99 посетиоци могу да оставе своје ствари у гардероби улаза на који су и ушли?

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ

54. Дата је функција расподеле дводимензионе случајне величине (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   (а) Одредити густину расподеле случајне величине (X,Y).

   (б) Испитати независност случајних величина X и Y.

   (в) Ако је $T = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, израчунати $P\{(X,Y) \in T\}$.

55. Тачка $A(X,Y)$ се случајно бира у квадрату D са теменима $(1,0), (0,1), (-1,0)$ и $(0,-1)$. Одредити густину расподеле случајног вектора (X,Y), као и маргиналне расподеле случајних величина X и Y.

56. Случајне величине X и Y су независне и имају исту експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је $Z = |X - Y|$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

57. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$, $\alpha > 0$ расподелу, случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0,h]$ расподелу и независне су. Ако је $Z = X + Y$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

КОВАРИЈАНСА И КОЕФИЦИЈЕНТ КОРЕЛАЦИЈЕ

58. На случајан начин бира се једна од вредности из скупа вредности $A = \{-2,-1,1,2\}$. Нека случајна величина X представља одабрану вредност и нека је случајна величина Y дата са $Y = X^2$. Одредити коваријацију $\operatorname{cov}(X,Y)$ случајних величина X и Y, а затим испитати да ли су оне независне.

59. Случајни вектор (X,Y) има функцију густине

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{xy}}, & \text{за } \ 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{за остале } \ x \text{ и } y. \end{cases}$$

   Одредити коефицијент корелације $\rho(X,Y)$.

60. Ако за случајну величину X важи да је $EX = 3$ и $DX = 0.01$, проценити $P\{2.5 < X < 3.5\}$.

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА

61. Нека су X_1, X_2,..., X_n независне случајне величине са истом расподелом

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ 0 < p < 1.$$

   Одредити условну расподелу случајне величине X_1 при услову $X_1 + X_2 + ... + X_n = k$, тј. расподелу за $X_1 | X_1 + X_2 + ... + X_n = k$.

62. Дводимензиона случајна величина (X,Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Одредити $f_{X|Y=y}(x)$ - условну густину расподеле случајне величине X при услову $Y = y$.

КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

63. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

    (а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;

    (б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу;

    (в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир X_3+X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ расподелу;

    (г) X_5 чија густина расподеле је $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$, а затим израчунати очекивање EX_5 и дисперзију DX_5.

64. Одредити расподелу случајне величине чија је карактеристична функција $\varphi(t)$ ако је:

    (а) $\varphi(t)=\frac{3+\cos t}{4}$

    (б) $\varphi(t)=(1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}, 0<\alpha<\beta<1$;

    (в)$\varphi(t)=\frac{1}{2-e^{it}}$.

КОНВЕРГЕНЦИЈА НИЗА СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА У РАСПОДЕЛИ. ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

65. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $\mathcal{U}[0,n]$ расподелу. Ако је $Y_n=\min\{1,X_n\}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n).

66. Нека је (X_n) низ независних случајних величина, при чему X_n има $\mathcal{U}[n,n^2]$ расподелу, за $n\in\mathbb{N}$. Ако је $Y_n=\frac{X_n-n}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n).

67. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $\mathcal{U}[-1,1]$ расподелу.

68. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5,0.5]$.

    (а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

    (б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА

ОЦЕЊИВАЊЕ ПАРАМЕТАРА

69. Нека је $(X_1, X_2, ..., X_n)$ узорак из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу. Доказати да случајна величина:
   (а) $\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$ има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу;
   (б) $\frac{\overline{S}_\star^2}{\sigma^2}$ има χ_n^2 расподелу $\left(\overline{S}_\star^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2\right)$;
   (в) $\frac{\overline{S}_n^2}{\sigma^2}$ има χ_{n-1}^2 расподелу;
   (г) $\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}$ има Студентову t_{n-1} расподелу.

70. Нека су дати независни узорци: $(X_1, X_2, ..., X_n)$ из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и $(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ из популације чије обележје Y има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $\frac{(\overline{X}_n - m_1) - (\overline{Y}_k - m_2)}{\sqrt{n\overline{S}_n^2(X) + k\overline{S}_k^2(Y)}}\sqrt{\frac{nk}{n+k}(n+k-2)}$.

71. Нека су дати независни узорци: $(X_1, X_2, ..., X_n)$ из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и $(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ из популације чије обележје Y има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $\frac{n(k-1)\sigma_2^2\overline{S}_n^2(X)}{k(n-1)\sigma_1^2\overline{S}_k^2(Y)}$.

72. Обележје популације X има нормалну $\mathcal{N}(m, m)$ расподелу. За оцену непознатог параметра m, на основу узорка обима n, предложене су две статистике: узорачка средина $\overline{X}_n$ и поправљена узорачка дисперзија $\tilde{S}_n^2$. Испитати непристрасност и постојаност тих оцена. Испитати која је оцена боља у средње квадратном смислу.

73. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$. За оцену непознатог параметра θ предложена је статистика $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{2}$. Испитати да ли је та оцена ефикасна.

74. Обележје X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра λ, а затим испитати непристрасност и ефикасност тако добијене оцене.

75. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ.

76. Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ на основу узорка обима n из популације чије обележје X има:
   (а) униформну $\mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$, расподелу;
   (б) униформну $\mathcal{U}[-\theta,\theta]$, $\theta > 0$, расподелу;
   (в) униформну $\mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta \geq 1$, расподелу;
   (г) униформну $\mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta \in \mathbb{N}$, расподелу.

77. Обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је λ непознати параметар. На основу узорка $(2.3, 3.4, 1.2, 2.5, 0.6)$ методом максималне веродостојности одредити оцену вероватноће $P\{X \geq 1\}$.

78. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, x \geq \theta_1, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцене непознатих параметара θ_1 и θ_2.

ИНТЕРВАЛИ ПОВЕРЕЊА

79. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 10, чија је узорачка средина $\overline{x}_{10} = 5.5$, а узорачка дисперзија $\overline{s}_{10}^2 = 36$.
   (а) Одредити 90% интервал поверења за непознати параметар m.
   (б) Одредити 90% једнострани (доњи, горњи) и двострани интервал поверења за непознати параметар σ^2, као и за непознати параметар σ.

80. Из популације чије обеле је X има нормалну $\mathcal{N}(m, 16)$ расподелу извучен је узорак обима 64, чија је узорачка средина $\overline{x}_{64} = 5$. Констатовано је да је $\beta\%$ интервал поверења за m једнак (4, 6). Одредити β.

81. Обележје X има униформну $\mathcal{U}[0, 1+\theta]$, $\theta > 0$, расподелу, где је θ непознати параметар. Узет је узорак обима 200 и констатовано је да је у узорку 150 елемената који су мањи од један.

    (а) Одредити 95% интервал поверења за вероватноћу p, где је $p = P\{X < 1\}$.

    (б) На основу резултата под (а) одредити 95% интервал поверења за θ.

82. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу извучен је узорак:

I_k	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,\infty)$
n_k	493	378	298	211	171	45	4

Одредити 98% интервал поверења за непознати параметар λ.

ТЕСТИРАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА

83. У кутији је 10 куглица, црвених и белих. Тестира се нулта хипотеза H_0(у кутији се налазе 2 црвене и 8 белих куглица) против алтернативне хипотезе H_1(у кутији је више од 2 црвене куглице), тако што се из кутије извлаче две куглице једна за другом, без враћања, па ако су обе извучене куглице црвене, хипотеза H_0 се одбацује, иначе се не одбацује. Израчунати вероватноћу грешке прве врсте и функцију моћи тог теста.

84. Нека је хипотеза H_0(обележје X има густину расподеле $f_0(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$), а хипотеза H_1 (обележје X има густину расподеле $f_1(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1$). На основу узорка (X_1, X_2) треба се определити за једну од ове две хипотезе. Предложена су два теста чије су критичне области $W_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq k_1, x_2 \geq k_1\}$, односно $W_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \geq k_2\}$, оба са истим прагом значајности α, где је $\alpha = 1$. Испитати који је тест бољи. Подразумева се да је познато да обележје X узима вредности из сегмента $[0, 1]$.

85. Нека су дате хипотезе

$$H_0 \left(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \right)$$

и

$$H_1 \left(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.42 & 0.01 & 0.01 & 0.5 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \right).$$

Са прагом значајности 0.03, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе H_0 против хипотезе H_1 на основу узорка обима 2. Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тако одабраног теста.

86. Обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу, где је σ^2 непознати параметар. Са прагом значајности 0.05, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\sigma^2 = 1)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 = 2)$ на основу узорка обима 10.

87. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу извучен је узорак обима n.

    (а) Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$ $(H_1(\lambda = \lambda_1), \lambda_1 \neq 1)$.

    (б) Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$.

    (в) Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тог теста ако је обим узорка 100, алтернативна хипотеза $H_1(\lambda = 2)$, а праг значајности 0.05.

88. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 20 и констатовано је да је узорачка средина $\overline{x}_{20} = 53.5$, а узорачка дисперзија $\overline{s}^2_{20} = 45.85$. Са прагом значајности α тестирати:

    (а) хипотезу $H_0(m = 60)$ за $\alpha = 0.05$;

    (б) хипотезу $H_0(\sigma^2 = 50)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 < 50)$, за $\alpha = 0.1$.

89. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, 36)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, 25)$ расподелу извучени су независни узорци обима 12 и 10 и констатовано је да су узорачке средине $\overline{x}_{12} = 178$ и $\overline{y}_{10} = 176.6$. Са прагом значајности 0.04 тестирати хипотезу $H_0(m_1 = m_2)$ против хипотезе $H_1(m_1 > m_2)$.

90. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу извучени су независни узорци обима 8 и 10 и констатовано је да су узорачке дисперзије $\overline{s}_8^2(X) = 46$ и $\overline{s}_{10}^2(Y) = 50$. Са прагом значајности 0.1 тестирати хипотезу $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$.

91. Један лек помаже у лечењу неке болести у 80% случајева. Нови лек за ту болест је помогао у 250 од 300 случајева. Са прагом значајности 0.03 тестирати хипотезу да је нови лек ефикаснији од старог.

92. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

X_k	1	2	3	4	5	≥ 6
M_k	45	30	15	6	2	2

Са прагом значајности 0.05 тестирати хипотезу да обележје X има закон расподеле $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$.

93. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

I_k	$[0, 1]$	$[1.5, 2.5]$	$(2.5, 3.5]$	$(3.5, 5]$
M_k	52	35	9	4

Са прагом значајности 0.02 тестирати хипотезу да обележје X има експоненцијалну расподелу.