Вероватноћа - списак задатака

1. Бацају се истовремено новчић и коцкица. Одредити скуп елементарних исхода.
2. У кутији су четири листића означена бројевима 1, 2, 3 и 4. Извлачимо листиће
   (а) без враћања,
   (б) са враћањем,

   све док не извучемо листић са непарним бројем. Одредити скуп елементарних исхода.
3. Стрелац гађа у циљ облика кружне мете полупречника дужине K, при чему се мери растојање поготка од центра мете. Одредити скуп елементарних исхода.
4. Посматра се n гостију у ресторану и региструје да ли су наручили кафу или не, а онда се посматра још онолико гостију колико је међу првих n гостију наручило кафу и код њих се, такође, региструје да ли су наручили кафу или не. Одредити скуп елементарних исхода Ω и број елемената тог скупа. Сматра се да је укупан број гостију у ресторану већи или једнак $2n$.

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

5. Коцка чије су све стране обојене подељена је у 1000 мањих коцки једнаке величине. Израчунати вероватноћу да случајно изабрана коцка има тачно две обојене стране.
6. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима од 1 до n извлачи се једна по једна цедуља,
   (а) без враћања,
   (б) са враћањем,

   и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви $1, 2, \dots, n$.
7. Хотел има n соба поређаних једна до друге у правој линији. На случајан начин k $(k < n)$ гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.
8. На случајан начин се N људи размешта за округлим столом. Израчунати вероватноћу да два одабрана лица не седну једно до другог.
9. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A, односно играч B, ако је тренутни резултат 4:2 за играча A.
10. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m предмета. Израчунати вероватноћу да међу тим предметима буде тачно l неисправних.
11. Израчунати вероватноћу да се записивањем по случајном редоследу две цифре 1, једне цифре 2, три цифре 3, две цифре 4 и једне цифре 6 добије деветоцифрени број који на непарним местима има непарне цифре.

12. Двадесет идентичних куглица девојчица на случајан начин распоређује у пет кутија. Израчунати вероватноћу да

    (а) у свакој кутији буду бар две куглице;

    (б) тачно две кутије буду празне.

ФОРМУЛА УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА

13. Четири брачна пара на случајан начин седају у ред са 8 столица . Израчунати вероватноћу да ниједан пар не седи заједно.

14. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Гледаоци случајно бирају места без обзира на карте које имају. Израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад $n \to \infty$?

15. У воз који има m вагона пење се n $(n \geq m)$ путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.

ГЕОМЕТРИЈСКА ВЕРОВАТНОЋА

16. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.

17. Растојање између две паралелне телефонске линије дужине l је d $(d < l)$. На свакој од телефонских линија на непознатом месту постоји прекид. Израчунати вероватноћу да је растојање R међу тачкама прекида не веће од a $(d < a < \sqrt{l^2 + d^2})$.

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА И НЕЗАВИСНОСТ

18. Из скупа $\{1, 2, \ldots, 22\}$ случајно је изабран један број. Израчунати вероватноћу да је изабран паран број ако је познато да је изабран број дељив са три.

19. У ред са 10 седишта на случајан начин седају три особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да је особа Z села између особа X и Y.

20. У чинији се налазе четири јабуке сорте 1 и пет јабука сорте 2. Девојчица савког дана поједе по једну јабуку. Израчунати вероватоноћу да ће девојчица прво појести све јабуке сорте 2.

21. Свака од 15 испитних цедуља садржи по два питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би положио испит он треба да одговори или на оба питања са цедуље коју прву извуче или на једно питање са цедуље коју прву извуче и на прво питање са цедуље коју другу извуче. Шта је вероватније: да студент положи или да не положи испит?

22. Човек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа (без враћања) док не нађе одговарајући кључ. Израчунати вероватноћу да тражени кључ извуче у k-том извлачењу, где је k фиксиран број такав да је $1 \leq k \leq n$.

23. Под претпоставком да су вероватноће рађања мушког и женског детета једнаке, испитати независност догађаја A - деца нису истог пола и B - међу децом је највише једна девојчица, ако:

    (а) у породици има троје деце;

    (б) у породици има четворо деце.

24. Задатак 9.

25. На турниру треба одиграти три партије стоног тениса против шампиона A и нешто слабијег играча B по једној од шема $A - B - A$ или $B - A - B$. Награда се добија ако се победи у бар две партије узастопно. Коју шему изабрати?

26. У свакој партији између играча A и B, играч A побеђује са вероватноћом p и нема неречених ишода. Игра траје или док A не добије m партија (A победник) или док A не изгуби n партија (B победник). Израчунати вероватноћу да A победи у целој игри.

ФОРМУЛА ПОТПУНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

27. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је пет нових и три стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.

    (а) Израчунати вероватноћу да оба другоодабрана дела буду нова.

    (б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су прводабрани делови били стари.

28. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица у кутији су једнако вероватне. Из кутије се четири пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

29. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p. Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вероватноћом налази на било којој од n полица. Прегледано је m ($m < n$) полица и та књига није нађена. Израчунати вероватноћу да је она сада у библиотеци.

30. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији $\frac{1}{4}$ куглица су црне, а $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Извучена куглица се враћа у кутију из које је извучена и из ње се опет извлачи једна куглица. Израчунати вероватноћу да ова куглица буде црна.

ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ И ДИСПЕРЗИЈА.

31. У смеру кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно један од другог. На сваком семафору се с вероватноћом $p = 0.5$ појављује црвено и с вероватноћом $q = 0.5$ зелено светло. Случајна величина X представља број семафора поред којих пролази аутомобил до првог заустављања. Одредити закон и функцију расподеле вероватноћа случајне величине X.

32. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлачимо, без враћања, док не извучемо цедуљу са непарним бројем. Ако је X збир извучених бројева, а Y број извлачења, одредити законе расподела вероватноћа случајних величина X и Y. Израчинати њихово математичко очекивање и дисперзију.

33. У кутији се налазе три куглице нумерисане бројевима 1,2,3. Из кутије се на случајан начин бирају две куглице, једна по једна са враћањем. Нека је X количник бројева добијених у првом и другом извлачењу.

    (а) Одредити закон расподеле случајне величине X.

    (б) Скицирати график функције расподеле F_X.

    (в) Израчунати вероватноћу да X узме целобројну вредност.

34. Из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n \geq 2)$ на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y. Нека је $S = \max\{x, y\}$. Одредити расподелу случајне величине S и израчунати $P\{0.5 < S \leq 3.5\}$, $P\{S > 2\}$, као и очекивање ES.

35. Задат је испит са 10 питања при чему треба одабрати један од два понуђена одговора. Да би се положио испит потребно је 70% тачних одговора. Израчунати:

    (а) вероватноћу да студент положи испит ако насумично заокружује одговоре;

    (б) вероватноћу да студент има више од два тачна одговора.

36. Вероватноћа да кошаркаш погоди кош је $p \in (0, 1)$. Он гађа све док не погоди. Израчунати очекивани број покушаја до поготка.

37. Случајна величина има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Израчунати очекивање и дисперзију те случајне величине.

38. Баца се коцкица за игру. Израчунати очекивани број бацања до појаве свих бројева.

39. Резултат гађања је погодак са вероватноћом p или промашај са вероватноћом $1 - p$. Изводи се n независних гађања. Израчунати очекивани број промена резултата у тих n експеримената.

40. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу. Ако је $Y = n - X$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати EY и DY.

41. Нека је X случајна величина чији је закон расподеле

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix},$$

    за $p \in (0, \frac{1}{2})$. Наћи законе расподеле за случајне величине $Y = X^2$ и $Z = e^X$. Израчунати DY и DZ.

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ. НЕЗАВИСНОСТ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА.

42. Новчић се се баца четири пута. Нека је X броја палих писама, а Y највећи број узастопних понављања писма. Одредити заједничку расподелу вектора (X, Y) и испитати независност случајних величина X и Y.

43. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлаче се цедуље, без враћања, док се не извуче цедуља са непарним бројем. Нека је X збир извучених

бројева, а Y број извлачења. Одредити расподелу случајне величине (X, Y), као и маргиналне расподеле за X и Y. Испитати независност случајних величина X и Y и израчунати очекивање производа X и Y, EXY.

44. За случајне величине X и Y из претходног задатка, одредити расподелу случајне величине Z, где је $Z = XY$.

45. Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p), 0 < p < 1$, расподелом. Ако је $Y = max\{X_1, X_2\}$, одредити расподелу случајне величине Y.

46. Нека су $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ и $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ независне случајне величине. Наћи респоделу њиховог збира, $Z = X + Y$.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ ПУАСОНОВОМ РАСПОДЕЛОМ

47. Дефектан артикал се производи са вероватноћом 0.02. Артикли се пакују у кутије од 100 комада. Израчунати:

    (а) вероватноћу да у кутији нема дефектних артикала;

    (б) вероватноћу да је број дефектних артикала у кутији већи од пет.

48. Познато је да у неком граду становник има бицикл са вероватноћом 0.02, а мотор са вероватноћом 0.01, с тим што нико нема и бицикл и мотор. Израчунати вероватноћу да од 100 случајно изабраних становника број оних који поседују бар једно од ова два превозна средства буде између 2 и 6 (укључујући и те бројеве).

49. Из скупа бројева $\{1, 2, ..., n\}$ на случајан начин се, са враћањем, извлачи $2n$ бројева ($n \geq 100$). Одредити најмањи број k такав да вероватноћа да број извучених четворки не буде мањи од k износи највише 0.05.

СЛУЧАЈНО ЛУТАЊЕ

50. На неким изборима за кандидата A гласало је m бирача, а за кандидата B гласало је n бирача, при чему је $m > n$. Колика је вероватноћа да је током гласања све време водио кандидат A?

51. Пијан човек стоји на удаљености од једног корака до ивице провалије. На случајан начин прави кораке ка провалији са вероватноћом p и од провалије са вероватноћом $1 - p$. Одредити вероватноћу да човек падне у провалију.

УВОД У ПРОГРАМИСКИ ЈЕЗИК R. СИМУЛАЦИЈЕ СЛУЧАЈНОГ ЛУТАЊА.

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

52. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. Одредити функцију расподеле те случајне величине.

53. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x)^2, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Израчунати константу a за коју је $f(x)$ густина расподеле (вероватноћа) неке случајне величине X.

(б) Одредити функцију расподеле те случајне величине.

(в) Израчунати $P\{X > 1/3\}$.

(г) Израчунати очекивање EX и дисперзију DX.

54. Наћи расподелу случајне величине $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, где је $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

55. Нека је X непрекидна случајна величина са густином

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Наћи расподелу случајне величине Y, где је $Y = X^2$.

56. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-\pi/2, \pi/2]$ расподелу. Ако је $Y = \cos X$, одредити густину расподеле случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

57. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Одредити функције расподела следећих случајних величина:

(а) $Y = |1 - X|$;

(б) $Z = \min\{X, X^2\}$.

58. Број φ се случајно бира из сегмента $[0, \pi/2]$, а затим се кроз тачку $A(0,1)$ повлачи права која са позитивним делом x осе заклапа угао φ. Ако је D удаљеност те праве од координатног почетка, одредити расподелу случајне величине D.

59. Штап дужине $b-a$ случајно се ломи на једном месту. Израчунати очекивану дужину краћег дела штапа.

60. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,2]$ расподелу. Ако је $Y = \min\{X, 1\}$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

61. Случајна величина X има $\mathcal{U}[-1,4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = |X|$ и израчунати EY.

62. Случајна величина X има $\mathcal{U}[0,4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = [X]$.

63. Случајна величина X има стандардну експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(1)$. Одредити расподелу случајне величине:

а) $Y = [X]$;

б) $Y = X - [X]$.

64. Случајна величина X има $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу. Наћи функцију расподеле случајне величине $Y = \frac{1}{X} - [\frac{1}{X}]$.

65. Показати да је очекивање случајне величине X која има гама $\gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ расподелу $EX = \alpha/\beta$ и дисперзија $DX = \alpha/\beta^2$.

66. Случајна величина X има густину расподеле $f(x) = n(n+1)x^{n-1}(1-x)$, $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Израчунати EX и EX^3.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ НОРМАЛНОМ

67. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки са вероватноћом 0.05 захтева дораду. Колики треба да буде капацитет паркинга, па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају дораду?

68. Стрелац погађа циљ са вероватноћом 0.4. Колико најмање гађања треба да планира, па да вероватноћа да ће имати бар 80 погодака буде 0.9?

69. У позориште са 1000 места посетиоци улазе случајно на два улаза који имају по гардеробу. Колико најмање места треба да буде у свакој гардероби, па да са вероватноћом 0.99 посетиоци могу да оставе своје ствари у гардероби улаза на који су и ушли?

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ

70. Дата је функција расподеле дводимензионе случајне величине (X, Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Одредити густину расподеле случајне величине (X, Y).

(б) Испитати независност случајних величина X и Y.

(в) Ако је $T = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, израчунати $P\{(X,Y) \in T\}$.

71. Тачка $A(X,Y)$ се случајно бира у квадрату D са теменима $(1,0), (0,1), (-1,0)$ и $(0,-1)$. Одредити густину расподеле случајног вектора (X,Y), као и маргиналне расподеле случајних величина X и Y.

72. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је $Y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot X$, одредити расподелу случајне величине Y као и случајног вектора (X, Y).

73. Случајне величине X и Y су независне и имају исту експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је $Z = |X - Y|$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

74. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$, $\alpha > 0$ расподелу, случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0,h]$ расподелу и независне су. Ако је $Z = X + Y$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

75. Случајна величина X има Бернулијеву расподелу са параметром $p = \frac{1}{2}$, а случајна величина Y је независна од X и има униформну расподелу на интервалу $[0,1]$. Одредити расподелу њиховог збира, $Z = X + Y$.

76. Случајно се бира тачка (X, Y) унутар квадрата са теменима $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ако је $Z = XY$, одредити расподелу случајне величине Z.

ЧЕБИШЕВЉЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

77. Ако за случајну величину X важи да је $EX = 3$ и $DX = 0.01$, проценити $P\{2.5 < X < 3.5\}$.

78. Нека је X случајна променљива таква да је $DX < \infty$ и $EX > a$, где је $a \in \mathbb{R}$ нека константа. Показати да важи

$$P\{X < a\} \leq \frac{DX}{(EX - a)^2}.$$

КОВАРИЈАНСА И КОЕФИЦИЈЕНТ КОРЕЛАЦИЈЕ

79. На случајан начин се бира једна од вредности из скупа вредности $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Нека случајна величина X представља одабрану вредност и нека је случајна величина Y дата са $Y = X^2$. Одредити коваријацију $cov(X, Y)$ случајних величина X и Y, а затим испитати да ли су оне независне.

80. Расподела дводимензионе случајне променљиве (X, Y) је

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
0	0.21	0.28	0.14	0.07
1	0.06	0.08	0.04	0.02
2	0.03	0.04	0.02	0.01

Наћи ρ_{ZW} где је $Z = -2Y$ и $W = 3X + 1$.

81. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелу. Ако је $Y = |X|$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

82. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелу. Ако је $Y = sgnX$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

83. Ако су $X_1, X_2, ..., X_n$ независне случајне величине са истом униформном $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелом и ако је $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, а $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, израчунати коефицијент корелације случајних величина $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

84. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелу. Ако је

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} I\Big\{\frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n}\Big\}, n \in \mathbb{N}, n > 1,$$

израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y_n.

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА

85. Нека су X_1, X_2,..., X_n независне случајне величине са истом расподелом

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \ 0 < p < 1.$$

Одредити условну расподелу случајне величине X_1 при услову $X_1 + X_2 + ... + X_n = k$, тј. расподелу за $X_1 | X_1 + X_2 + ... + X_n = k$.

86. Дводимензиона случајна величина (X, Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Одредити $f_{X|Y=y}(x)$ - условну густину расподеле случајне величине X при услову $Y = y$.

87. Из сегмента $[0,1]$ случајно се бира број X, а затим се из сегмента $[\frac{X}{2}, X]$ случајно бира број Y. Одредити расподелу случајне величине Y.

88. Дводимензиона случајна величина (X, Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(3,0)$ и $(2,1)$. Одредити $f_{Y|X\in[1,2]}(y)$ - условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X \in [1,2]$.

КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

89. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

    а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;

    б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу;

    в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ расподелу;

    г) X_5 која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу;

    д) X_7 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$, а затим израчунати очекивање EX_7 и дисперзију DX_7.

90. Доказати да линеарна комбинација n независних случајних величина са нормалном расподелом има нормалну расподелу.

91. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи да је:

    а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;

    б) $\varphi(t) = (1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}, 0 < \alpha < \beta < 1$;

    в) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

92. Ако су Y и Z независне случајне величине такве да је $X = Y + Z$, где X има $\mathcal{U}(0, n+1)$, а Y има $\mathcal{U}(0,1)$ распореду, одредити расподелу случајне величине Z.

КОНВЕРГЕНЦИЈЕ НИЗОВА СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

93. Нека је $\Omega = \{\omega_k | k \in N\}$ скуп елементарних ишода неког експеримента и $P\{\omega_k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$. За сваки природан број n нека је $X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, k = n; \\ 0, k \neq n. \end{cases}$, а $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$. Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n), односно низа случајних величина (Y_n).

94. За сваки природан број n случајна величина X_n има униформну $U[0, \frac{1}{n}]$ расподелу, а независна од ње случајна величина Y_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ако је $Z_n = X_n + Y_n$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n).

95. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $U[0,n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

96. Ако низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном ка случајној величини X, онда $EX_n \to EX$ и $DX_n \to DX$ кад $n \to \infty$. Доказати.

ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА

97. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $U[-1,1]$ расподели.

98. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:

   а) закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

   б) густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$;

   в) закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

99. Нека је низ случајних величина (X_n) такав да за сваки природан број n важи да је $EX_n = 0$ и $DX_n \leq C$ где је C константа која је већа од 0, и било који члан X_n зависи само од претходног X_{n-1} и следећег X_{n+1}, а независан је од осталих чланова низа. Доказати да за овај низ важи слаби закон великих бројева.

ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

100. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

   (а) Ако се сабира 1500 бројева , израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

   (б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

101. Пошиљка од 100 сандука ампула се сматра исправном ако у целој пошиљци има највише 120 неисправних ампула. Број неисправних ампула по сандуку је случајна промјенљива са Пуасоновом $\mathcal{P}(1)$ расподелом. Одредити вероватноћу да пошиљка буде исправна.

102. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$.