Рол, Лагранж, Коши - наставак

1 Задаци

1. Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ четири пута диференцијабилна функција таква да је $f(0) = f'(0) = 0 = f(1) = f'(1) = f''(1)$. Доказати да постоји $c \in (0,1)$ за које је $f^{(4)}(c) = 0$.

2. Нека је f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и нека је $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Доказати да постоје s и t тако да важи $a < s < t < b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = 2$.

3. Нека је f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b). Доказати да постоји $c \in (a,b)$ такво да је

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (f(b)+f(a)-1) = f'(c)(2f(c)-1).$$

4. Нека је f $n+1$ пута диференцијабилна функција на $\mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + f'(x) + \cdots + f^n(x) \neq 0$. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.
(а) Доказати да важи $\frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^n(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^n(a)} > 0$.
(б) Ако је $\log \frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^n(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^n(a)} = b - a$, доказати да постоји $c \in (a,b)$ тако да важи $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

5. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$ и f и g непрекидне на $[a,b]$ и диференцијабилне на (a,b) такве да је $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за све $x \in [a,b]$. Доказати да постоји $c \in (a,b)$ такво да је $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

6. Нека је $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ непрекидна, два пута диференцијабилна функција таква да је за све $x \in (0,4)$ $f'(x) \neq 0$ и $f(\frac{3}{2}) = 0$. Доказати да постоји $c \in (0,4)$ такво да важи $\frac{f(c)-f''(c)}{f'(c)} = 2\, ctg\ c$.

7. Нека је f непрекидна на $[0,1]$, диференцијабилна на $(0,1)$ и нека је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Доказати да постоје $c \in (0,1)$ такво да је

$$f'(c) = \frac{\pi}{8}\left((f(c))^3 + \frac{1}{f(c)}\right).$$

8. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција која је два пута диференцијабилна на (a,b). Ако f има три различите нуле у $[a,b]$, доказати да постоји $c \in [a,b]$ такво да је $9f(c) + f''(c) = 6f'(c)$.

9. Нека су f и g непрекидне на $[a,b]$, диференцијабилне на (a,b) које нису константне, такве да је $f(x) + g(x) \neq 0$ и $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$ за све $x \in [a,b]$. Доказати да је $\frac{f(x)}{g(x)}$ константно.

10. Нека је f непрекидна на $[0,\pi]$, диференцијабилна на $(0,\pi)$. Доказати да постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f'(c) - (f(c))^2 < 1$.

11. Нека је f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и нека је $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$. Ако је $f'(x) + (f(x))^2 \geq -1$ за све $x \in (a,b)$, доказати да је $b - a \geq \pi$.

12. Нека је f непрекидна на $[1,2]$ и диференцијабилна на $(1,2)$. Доказати да постоји $c \in (1,2)$ такво да је $f(2) - f(1) = \frac{1}{2}c^2 f'(c)$.

13. Нека је f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и $ab > 0$. Доказати да постоји $c \in (a,b)$ такво да је

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - cf'(c).$$

14. Нека је f диференцијабилна функција на $[0,1]$ таква да је $f'(0) = 1$ и $f'(1) = 0$. Доказати да постоји $c \in (0,1)$ такво да је $f'(c) = c$.