Диференцијалне једначине а - МН смерови
Домаћи - пета недеља

асистент: Филип Броћић

Дефиниција 1 *Нека су $(M, d_M), (N, d_N)$ метрички простори и $\mathcal{F} = \{f : M \to N\}$ фамилија пресликавања. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ равностепено непрекидна ако*

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\delta > 0)\,(\forall f \in \mathcal{F})\,(\forall x, y \in M) \quad d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Дефиниција 2 *Нека је (N, d_N) метрички простор, X скуп $\mathcal{F}$ фамилија пресликавања. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ равномерно ограничена ако*

$$diam(\cup_{f \in \mathcal{F}} f(X)) < \infty.$$

Задатак 1
Нека је дат низ $x_n : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ који је равномерно ограничен. Показати да постоји $M \in \mathbb{R}$ тако да је

$$x_n([a, b]) \subset [0, M]^k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задатак 2
Нека је A пребројив свуда густ подскуп од $[a, b]$. Ако је $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ показати да постоји подниз x_{n_k} низа x_n такав да $x_n(a_1)$ конвергира.

Задатак 3
Показати да постоји подниз x_{n_k} низа x_n такав да $x_{n_k}(a_i)$ конвергира $\forall i \in \mathbb{N}$.

Задатак 4
Уколико је низ x_n и равностепено непрекидан показати да подниз из задатка 3 задовољава Кошијев услов равномерне конвергенције и одатле закључити да он равномерно конвергира.

Приметимо да је тиме доказана следећа теорема:

Теорема 1 *Нека је дат низ $x_n : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ равномерно ограничен и равностепено непрекидан. Тада постоји подниз низа x_n који равномерно конвергира.*

Претходна теорема је специјалан случај теореме Арцела-Асколи, која гласи:

Теорема 2 *Нека је M компактан метрички простор и Y Банахов простор. Нека је $C_Y(M)$ Банахов простор непрекидних пресликавања из M у Y снабдевен униформном нормом. Подскуп $\mathcal{F}$ од $C_Y(M)$ је релативно компактан акко*

1) фамилија $\mathcal{F}$ је равностепено непрекидна,

2) $\forall x \in M \quad \mathcal{F}(x) := \{f(x) | f \in \mathcal{F}\}$ је релативно компактан у Y.