

Диференцијалне једначине а - МН смерови
Домаћи - четврта недеља

асистент: Филип Броћић

1) Наћи све криве код којих је растојање сваке тачке од координатног почетка једнако дужини дужи OP , где је P пресек тангенте криве у тој тачки и y -осе.

2) Не су $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције.

а) Наћи опште решење линеарне хомогене једначине првог реда

$$y' + p(x)y = 0$$

б) Методом варијације константе, користећи резултат из а) наћи опште решење једначине

$$y' + p(x)y = q(x)$$

3) Решити диференцијалне једначине

а) $xy' - y = x^3$,

б) $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$,

в) $y' - 2xy = 6xe^{x^2}$,

г) $xy' + ay + x^n = 0$, $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

4) Наћи решење диференцијалне једначине

$$y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

које тежи нули када $x \rightarrow \infty$

5) Нека је y_1 неко решење једначине $y' + p(x)y = q(x)$. Показати да се погодном сменом једначина своди на једначину која раздваја променљиве. (Хинт: извод и једначина су ЛИНЕАРНИ).

6) Доказати да се Бернулијева једначина

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

погодном сменом може свести на линеарну. (Хинт: помножити једначину са $y^{-\alpha}$ и присетити се извода сложене функције).

7) Решити диференцијалне једначине

а) $y' = \frac{y}{x} - y^2$,

б) $xy' - 2x\sqrt{y} = 4y$,

в) $xy^2y' + y^3 = x \cos x$,

г) $(x^2 - 1)y' + axy^2 + xy = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

8) Након увођења смене решити диференцијалну једначину

а) $y' + x \cos^2 y - \sin^3 y = 0$,

б) $y' = \frac{\sin y \cos y}{x} - \sin^2 y \cos y$.

9) Нека је y_1 партикуларно решење Рикатијеве једначине

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Показати да се сменом $y = y_1 + z$ своди на Бернулијеву једначину, а сменом $y = y_1 + \frac{1}{z}$ на линеарну једначину.

10) Решити диференцијалне једначине

а) $x(2x - 1)y' + y^2 - (4x + 1)y + 4x = 0$,

б) $y' = \frac{2 \sin x - y^2 \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x}$,

в) $y' + y^2 + \frac{4y}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$.