Диференцијалне форме у $\mathbb{R}^n$

1.1 Диференцијалне 1-форме

У овом параграфу уводимо алгебарски објекат - диференцијалне форме, који ће се испоставити да уопштава (и олакшава) рад са n-интегралом, (за оне који се плаше већих димензија двоструки и троструки) и омогућава нам да на природан начин дефинишемо површински и криволинијски интеграл (а за оне који воле да знају више - интеграцију на многострукостима).

Пример 1.1.1. *Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција тада је:*

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n$$

Односно ако погледамо мало пажљивије ми у свакој тачки домена имамо један линеаран функционал из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}$. Што значи да има смисла и разматрати пресликавање из $\mathbb{R}^n$ у $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ које није *диференцијал* неке функције, али како су оба простора нормирана и векторска, можемо захтевати извесну глаткост.

Дефиниција 1.1.1. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Скуп диференцијалних 0-форми у ознаци $\Omega^0(\mathcal{U})$ је скуп свих глатких функција $C^\infty(\mathcal{U})$ на $\mathcal{U}$.*

Дефиниција 1.1.2. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Диференцијална 1-форма је пресликавање $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ задато са:*

$$\alpha(x) = P_1(x)dx_1 + ... + P_n(x)dx_n$$

где су $P_1, ..., P_n$ глатке функције (или функције класе бар $\mathbf{C}^1(\mathcal{U})$). Скуп свих 1-форми на $\mathcal{U}$ означавамо са $\Omega^1(\mathcal{U})$.

Напомена 1.1.1. *Као што смо нагласили, не мора свака 1-форма бити диференцијал неке функције, форме које пак то испуњавају су* ***тачне*** *форме. Односно диференцијал функције нам дефинисе преслиаквање:*

$$d : \Omega^0(\mathcal{U}) \to \Omega^1(\mathcal{U})$$

Које није "на" што ћемо ускоро и видети.

Задатак 1. *Испитати да ли су следећ 1-форме тачне:*

1) $\alpha(x, y) = ydx - xdy$

2) $\alpha(x, y) = xdx + ydy$

3) $\alpha(x, y) = \frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}$

Решење. 1) Претпоставимо да је форма тачна, тј. да постоји функција f таква да је $df = \alpha$. Одатле добијамо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \quad (2)$$

Из (1) добијамо да је $f(x, y) = xy + g(x)$ за неку функцију $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Диференцирањем функције f по y добијамо да је

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

што нам даје контрадикцију са (2).

2) Истим разматрањем као у првом делу добијамо једноставан систем парцијалних једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y \quad (2)$$

Из (1) добијамо да је $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$, а потом диференцирањем по y добијамо:

$$g'(y) = \frac{\partial f}{y}(x, y) = y \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Односно за било коју од функција:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$$

важи да је $df = \alpha$ тј. α јесте тачна форма.

3) Аналогно као у другом задатку се добије да је α диференцијал функције:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$\square$

Још увек можда није сасвим јасно какве диференцијалне форме имају везе са интеграцијом. Ако посматрамо 1-форму на $\mathbb{R}$ намеће се следећа дефиниција.

Дефиниција 1.1.3. *Нека је $I = [a, b]$ и нека је $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$, тј. $\alpha(x) = f(x)dx$*

$$\int_I \alpha := \int_a^b f(x)dx$$

1.2 Спољашњи производ и к-форме

Када су дефинисане 1-форме, желимо да дефинишемо и 2-форме, 3-форме .... и к-форме. За почетак желимо да уведемо спољашње множење базних елемената (не заборавимо диференцијална форма је у свакој тачки елемент $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ чија је база $\{dx_1, ..., dx_n\}$).

Дефиниција 1.2.1. *Нека су dx_i и dx_j , $i, j \in \{1, ..., n\}$ елементи базе за $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тада је спољасјњи производ dx_i са dx_j:*

$$dx_i \wedge dx_j(\xi, \eta) := \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix}.$$

Општије, нека су $dx_{i_1}, ..., dx_{i_k} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тада је

$$dx_{i_1} \wedge .... \wedge dx_{i_k}(\xi_1, ..., \xi_k) := \begin{vmatrix} \xi_{1_{i_1}} & \xi_{1_{i_2}} & \xi_{1_{i_3}} & \cdots & \xi_{1_{i_k}} \\ \xi_{2_{i_1}} & \xi_{2_{i_2}} & \xi_{2_{i_3}} & \cdots & \xi_{2_{i_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{k_{i_1}} & \xi_{k_{i_2}} & \xi_{k_{i_3}} & \cdots & \xi_{k_{i_k}} \end{vmatrix}$$

Оно што можемо да приметимо је да из линеарности детерминанте по врстама имамо да је $dx_{i_1} \wedge .... \wedge dx_{i_k}$ к-линеарно пресликавање. Како је детерминанта антисиметрична односно заменом места две суседне врсте се мења знак, имамо да је и наш функционал антисиметричан.

Пример 1.2.1. $dx \wedge dx = 0$

Скуп свих антисиметричних к-линеарних функционална се означава са $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$.
То је векторски простор над $\mathbb{R}$ са базом $\{dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ а одатле следи да је димензије $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Дефиниција 1.2.2. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Диференцијална к-форма је глатко пресликавање $\alpha : \mathcal{U} \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$, тј.*

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}.$$

где су $P_{i_1 \ldots i_k}$ глатке функције. Скуп свих к-форми означавамо са $\Omega^k(\mathcal{U})$

Напомена 1.2.1. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ тада је $\Omega^k(\mathcal{U}) = 0$, ово следи из чињенице да је детерминанта која има две исте врсте (или колоне) мора бити нула. Наиме како је $m > n$ сваки базни елемент је облика $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ па онда међу бројевима $i_1, ..., i_m$ мора бити једнаких.*

Како је спољашњи производ дефинисан на бази он може по линеарности да се продужи на цео простор. Аналогно можемо дефинисати спољашњи (клинасти) производ два базна функционала из $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ и $\bigwedge^l(\mathbb{R}^n)$:

$$(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) \wedge (dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_l}) := dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_l}$$

А тиме имамо и добро дефинисан производ између произвољне две форме:

Дефиниција 1.2.3. *Нека су $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ и $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$. Клинасти (спољашњи) производ $\wedge : \Omega^k(\mathcal{U}) \times \Omega^k(\mathcal{U}) \to \Omega^{k+l}(\mathcal{U})$ је:*

$$(\alpha\wedge\beta)(x) := \left(\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} P_{i_1\dots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{1\leq j_1<\dots<j_l\leq n} Q_{j_1\dots j_l}(x)dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_l}\right)$$

Лема 1.2.1. *Нека су $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ и $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$. Тада је:*

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$$

Дефинишимо сада нешто врло природно, наиме приметимо да су све н-форме на $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ облика $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Интеграл форме α по ордан-мерљивом скупу $D \subset \mathcal{U}$ је:

$$\int_D \alpha := \int_D f(x)dx_1\cdots dx_n$$

Задатак 2. *Израчунати $(xdx + ydy) \wedge (ydx + xdy)$*

Решење.

$$\begin{aligned}(xdx + ydy) \wedge (ydx + xdy) &= xydx\wedge dy + y^2dy\wedge dx + x^2dx\wedge dy + xydy\wedge dy\\ &= (x^2-y^2)dx\wedge dy\end{aligned}$$

□

Задатак 3. *Нека је $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ 1-форма. Показати да важи:*

$$\alpha\wedge\alpha = 0$$

Решење. $\alpha = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\alpha &= (\sum_{i=1}^n P_idx_i)\wedge(\sum_{j=1}^n P_jdx_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n P_iP_jdx_i\wedge dx_j\\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n}(P_iP_j - P_jP_i)dx_i\wedge dx_j = 0\end{aligned}$$

□

Поставља се питање да ли ће $\alpha\wedge\alpha = 0$ за произвољну к-форму α.

Задатак 4. *Нека је $\alpha = dx_1\wedge dy_1 + dx_2\wedge dy_2$ 2-форма на $\mathbb{R}^4$. Израчунати $\alpha\wedge\alpha$.*

Решење.

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\alpha &= (dx_1\wedge dy_1 + dx_2\wedge dy_2)\wedge(dx_1\wedge dy_1 + dx_2\wedge dy_2)\\ &= dx_1\wedge dy_1\wedge dx_1\wedge dy_1 + dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2 +\\ &+ dx_2\wedge dy_2\wedge dx_1\wedge dy_1 + dx_2\wedge dy_2\wedge dx_2\wedge dy_2\\ &\overset{(1)}{=} dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2 + dx_2\wedge dy_2\wedge dx_1\wedge dy_1\\ &= 2dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2\end{aligned}$$

Једнакост (1) важи јер је $dx_1\wedge dy_1\wedge dx_1\wedge dy_1 = dx_2\wedge dy_2\wedge dx_2\wedge dy_2 = 0$ због антисиметричности. □

1.3 Спољашњи диференцијал

Познато нам је од раније да за непрекидно диференцијабилне функције важи следећа формула:

$$\int_a^b df(x) = f|_a^b \quad (1)$$

Желимо да уопштимо ту формулу на више димензија, али за то нам је потребно да видимо које објекте интегралимо (диференцијалне форме) и по чему интегралимо (отворени скупови у $\mathbb{R}^n$ и њихове границе који су "површи"у више димензија. За поцхетак треба да уопштимо диференцијал из Напомене 1.1 који је за сада дефинисан на функцијама и који очигледно учествује у формули (1), па је за очекивати да учествује и у њеном уопштењу.

Дефиниција 1.3.1. *Нека је $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ к-форма. Спољашњи диференцијал је пресликавање $d : \Omega^k(\mathcal{U}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{U})$ дефинисано са:*

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} dP_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

где је $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Јасно је да за $k = 0$ се уклапа у досадашњи појам диференцијала, он има одређена својства која издвајамо следећим тврђењем.

Тврђење 1.3.1. *Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ и $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$ произвољне форме. Тада важи:*

1) $d(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1 d\alpha_1 + \lambda_2 d\alpha_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ *(Лајбницово правило)*

3) $d(d\alpha) = 0$

Задатак 5. *Нека је $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$. Израчунати $d\alpha$.*

Решење.

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(Pdx + Qdy + Rdz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= P'_y dy \wedge dx + P'_z dz \wedge dx + Q'_x dx \wedge dy + Q'_z dz \wedge dx + R'_x dx \wedge dz + R'_y dy \wedge dz \\ &= (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

□

Упоредимо овај резултат са језиком Векторских поља, да се подсетимо, векторско поље је функција $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ класе бар $C^1(\mathcal{U})$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$.
За векторска поља у $\mathbb{R}^3$ имамо дефинисане операторе rot који векторском пољу додељује ново векторско поље и то на следеи начин:

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$$

Наиме, сваком векторском пољу $F = (P, Q, R)$ можемо да придружимо 1-форму $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ (и на аналоган начин свакој 1-форми можемо да придружимо векторско поље), исто то важи и за 2-форме (приметимо да је то из разлога што је простор антисиметричних билинеарних преслиавања димензије $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$, простор свих линеарних функционала на $\mathbb{R}^3$ је такође димензије 3, а 1-форме и 2-форме су глатка пресликавања у поменуте просторе, док је векторско поље глатко пресликавање у $\mathbb{R}^3$ што нам сада разјашњава поменуте изоморфизме векторских простора функција и диференцијалних форми). Тако да ако означимо α_F 1-форму придружену векторском пољу имамо да је:

$$d\alpha_F = \alpha_{rotF}$$

Слично, 0-форме су и дефинисане као функције и важи:

$$df = \alpha_{gradf}$$

Задатак 6. *Нека је* $\alpha = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. *Израчунати* $d\alpha$.

Решење.

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) \\ &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= (P'_x + Q'_y + R'_z) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

□

Ако се осврнемо опет на језик векторских поља, где имамо оператор div, који векторском пољу F додели функцију $divF$ на следећи начин:

$$div(P, Q, R) = P'_x + Q'_y + R'_z$$

Нека је $\alpha_F = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ 2-форма придружена векторском пољу F, из претходног задатка видимо да важи:

$$d\alpha_F = divF dx \wedge dy \wedge dz$$

Задатак 7. *Наћи спољашњи извод диференцијалне форме*

$$\alpha = e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx + e^{x+y} \sin x dy$$

Решење.

$$\begin{aligned}
& d(e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx + e^{x+y}\sin x dy) = \\
& = d(e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx) + d(e^{x+y}\sin x dy) \\
& = (e^{x+y}\cos x dx + e^{x+y}(\sin x + \cos x)dy) \wedge dx + \\
& + (e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx + e^{x+y}\sin x dy) \wedge dy \\
& = e^{x+y}(\sin x + \cos x)dy \wedge dx + e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx \wedge dy \\
& = -e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx \wedge dy + e^{x+y}(\sin x + \cos x)dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

□

Форма из претходног задатка испуњава услов $d\alpha = 0$, такве форме се називају *затворене.* Слично као за 1-форме, за к-форму β кажемо да је *тачна* ако постоји к-1 форма α тдј. $d\alpha = \beta$. Из својства $d(d\alpha) = 0$ спољашњег диференцијa видимо да је свака тачна форма затворена, за 1-форме важи знамо нешто више уколико је скуп $\mathcal{U}$ довољно леп.

Тврђење 1.3.2. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ просто-повезана област, тада је свака затворена 1-форма тачна.*

Просто повезану област у равни замислимо бар за сада као скуп који нема рупе (прстен није просто-повезан док диск и раван јесу).

1.4 Повлачење форме (*pullback* форме)

Када смо радили вишеструке интеграле смена промењљиве нам је била од великог значаја. Сада желимо да видимо како можемо форму са једног скупа помоћу неког пресливања да пребацимо на други. Када то уведемо, теорема о смени промењљиве записати много елегантније.

Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \quad C^1$ пресликавање (различитост димензије домена и кодомена није грешка!). Размотримо прво да ли је природно да форму пошаљемо са $\mathcal{U}$ у $\mathbb{R}^m$ или да је повучемо из кодомена на домен (наравно одговор је већ јасан из наслова лекције али дајмо и неко смисленије образлоење).

Погледајмо једноставан пример, константну диференцијалну форму dx_1 на $\mathcal{U}$ у шта би се она сликала помоћу φ ? Много би било смисленије да форми dy_1 из кодомена доделимо $d\varphi_1$ где је φ_1 пројекција пресликавања φ на прву координату, и тиме заиста добијамо 1-форму на $\mathcal{U}$ која зависи од φ!

Дефиниција 1.4.1. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \quad C^1$ пресликавање и $\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} P_{i_1 \cdots i_k}(y) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ к-форма. Тада је pullback форме α пресликавањем φ у означи $\varphi^*\alpha$:*

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} P_{i_1 \cdots i_k} \circ \varphi(x) d(\pi_{i_1} \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(\pi_{i_k} \circ \varphi)$$

Односно имамо пресликавање $\varphi^* : \Omega^k(\varphi(\mathcal{U})) \to \Omega^k(\mathcal{U})$, пре него што видимо нека својства урадимо неки пример.

Задатак 8. *Нека је* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 *функција. Израчунати* f^*dy

Решење.

$$f^*dy = 1 \circ f(x)df(x) = f'(x)dx$$

□

Добили смо први извод функције који се у Римановом интегралу појављује при смени променљиве и то није случајно!

Задатак 9. *Нека је* $f(x) = \sqrt{x-1}$ *функција и* $\alpha = \frac{2ydy}{y^2+1}$ *1-форма на* $\mathbb{R}$. *Израчунати* $f^*\alpha$.

Решење.

$$f^*\alpha(x) = \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}^2+1}d(\sqrt{x-1}) = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1+1}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = \frac{dx}{x}$$

□

Приметимо да је ово било заправо увођење смене $x = y^2 + 1$ у интегралу

$$\int \frac{2ydy}{y^2+1}$$

Задатак 10 (Поларне координате)**.** *Нека је* $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *пресликавање из* $\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$ *у* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [0, +\infty)$. *Израчунати* $f^*(dx \wedge dy)$

Решење.

$$\begin{aligned} f^*(dx \wedge dy) &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)dr \wedge d\theta = rdr \wedge d\theta \end{aligned}$$

□

Задатак 11. *Нека је* $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}, \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ *дифеоморфизам. Израчунати* $\varphi^*(ds \wedge dt)$

Решење.

$$\begin{aligned} \varphi^*(ds \wedge dt) &= (d\varphi_1) \wedge (d\varphi_2) \\ &= (\varphi'_{1x}dx + \varphi'_{1y}dy) \wedge (\varphi'_{2x}dx + \varphi'_{2y}dy) \\ &= \varphi'_{1x}\varphi'_{2y}dx \wedge dy + \varphi'_{1y}\varphi'_{2x}dy \wedge dx \\ &= (\varphi'_{1x}\varphi'_{2y} - \varphi'_{1y}\varphi'_{2x})dx \wedge dy = det(J_\varphi)\ dx \wedge dy \end{aligned}$$

□

Односно добили смо да се при *pullback*-у стандардне форме оријентације у равни $(ds \wedge dt)$ при дифеоморфизму појављује Јакобијан који баш учествује у смени променљиве код двоструког интеграла!

Важи и више, што може да се извуче као последица својстава *pullback*-а:

Тврђење 1.4.1. *Нека је* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ *и* $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. *Тада за произвољне форме* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ *и* $\beta \in \Omega^l(\mathcal{U})$ *важи:*

1) $\varphi^*(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = \lambda_1 \varphi^* \alpha_1 + \lambda_2 \varphi^* \alpha_2 \ , \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^* \alpha)$

3) $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^* \alpha) \wedge (\varphi^* \beta)$

4) $\varphi^* \alpha(x)(\xi_1, ..., \xi_k) = \alpha \circ \varphi(x)(D\varphi(x)\xi_1, ..., D\varphi(x)\xi_k)$

5) $(\varphi \circ \psi)^* \alpha = \psi^* \circ \varphi^* \alpha$

Из својства 4) претходног тврђења, уколико посматрамо $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ и форму $\alpha = f(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ важи:

$$\varphi^* \alpha = f(\varphi(x)) det(J_\varphi(x)) \ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

И онда имамо, уколико је φ дифеоморфизам који чува оријентацију:

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} \alpha = \int_{\varphi(\mathcal{U})} f(y) dy_1 \cdots dy_n = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(x)) det(J_\varphi(x)) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{U}} \varphi^* \alpha$$