1 Неодрђеност и информација

1. Баца се фер новичић до прве појаве писма. Нека је X случајна величина која представља број потребних бацања. Наћи неодређеност случајне величине X.

2. Показати да за дискретну случајну величину X важи неједнакост $H(g(X)) \leq H(X)$, где је g произвољна неслучајна функција.

3. Струјно коло чине 22 сијалице. Ако једна прегори, остале не могу да сијају, јер је електрично коло прекинуто. На располагању имамо омметар којим можемо да измеримо отпор између сваке две тачке у струјном колу. Колики је минималан број мерења да би пронашли прегорену сијалицу?

4. Од 27 новчића 1 је фаличан и нешто лакши од осталих. На располагању имамо вагу за мерење са два таса. Колико мерења је потребно да се одреди фаличан новчић?

5. Од 27 новчића 1 је фаличан, нешто лакши или тежи од осталих. На располагању имамо вагу за мерење са два таса. Колико мерења је потребно да се одреди који новчић је фаличан, као и да ли је тежи или лакши од осталих?

* Дато је n великих кутија са великим бројем куглица у њима. Све куглице у једној кутији имају исту познату тежину w грама: $n-1$ кутија садржи идентичне куглице, али једна кутија има куглице које су за 1 грам теже од осталих. Све куглице су исте величине и тежа се може идентификовати само мерењем. На располагању нам је прецизна вага која може да мери произвољан број куглица са прецизношћу бољом од 1 грам. Колико је најмање мерења потребно да се утврди у којој кутији се налазе теже куглице?

6. Дата је заједничка расподела

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

Наћи $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $H(X,Y)$ и $I(X;Y)$ и представити их Веновим дијаграмом.

* Коцкица се баца једном. Ако падне 1,2,3 или 4 баца се новчић једном, а иначе се баца два пута. Наћи информацију о броју који је пао на коцкици на основу броја палих глава.

7. Нека су X_1 и X_2 дискретне случајне величине, које узимају различите вредности и X случајна величина дефинисана као

$$X = \begin{cases} X_1, \text{ са вероватноћом } \alpha \\ X_2, \text{ са вероватноћом } 1-\alpha \end{cases}$$

Наћи ентропију $H(X)$ у функцији од $H(X_1)$, $H(X_2)$ и α.

8. Показати да је неодређеност расподеле вероватноће $(p_1, ..., p_i, ..., p_j, ..., p_m)$ мања од неодређености расподеле $(p_1, ..., \frac{p_i+p_j}{2}, ..., \frac{p_i+p_j}{2}, ..., p_m)$.

* Доказати помоћу Јенсенове неједнакости да је $I(X;Y) \geq 0$.

* (а) Показати да је $\log x \leq x - 1, \quad x > 0$.

б) Користећи неједнакост из а) показати да је $KL(p||q) \geq 0$.

9. Показати да за случајне величине X, Y и Z важе следеће неједнакости и наћи услове при којима важе једнакости.
а) $H(X,Y|Z) \geq H(X|Z)$
б) $I(X,Y;Z) \geq I(X;Z)$
в) $H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$
г) $I(X;Z|Y) \geq I(Z;Y|X) - I(Z;Y) + I(X;Z)$

10. Наћи пример случајних величина X, Y и Z тако да важи
а) $I(X;Y|Z) < I(X;Y)$,
б) $I(X;Y|Z) > I(X;Y)$.

11. Нека су X и Y случајне величине које узимају вреднсоти $x_1, ..., x_r$ и $y_1, ..., y_s$, респективно и нека је $Z = X + Y$.
а) Показати да важи $H(Z|X) = H(Y|X)$.
б) Ако су X и Y независне, тада важи
$H(Y) \leq H(Z)$ и $H(X) \leq H(Z)$.
в) Наћи пример (зависних) случајних променљивих за које важе неједнакости $H(X) > H(Z)$ и $H(Y) > H(Z)$.
г) Под којим условом је $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

12. Играчи A и B играју карте. Побеђује онај играч који први победи у 4 партије. Нека је X случајна величина која представља исходе ове игре и Y случајна величина која представља број одиграних партија. Ако претпоставимо да ирачи A и B имају једнаке шансе да добију сваку партију и да су партије међусобно независне, израчу- нати $H(X)$, $H(Y)$ $H(Y|X)$ и $H(X|Y)$.

13. У кутији се налази r црвених, w белих и b црних куглица. Да ли већу неодређеност има извлачење k куглица са понављањем или без понављања?

* Ако је $Z = f(Y)$ онда је $X \to Y \to Z$ ланац Маркова. Показати.

* Ако је $X \to Y \to Z$ ланац Маркова, онда $I(X;Y) \geq I(X;Z)$. Показати.

14. Ако је $X_1 \to X_2 \to ... \to X_n$ ланац Маркова, односно ако важи једнакост

$$p(x_1, ..., x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)...p(x_n|x_{n-1}),$$

упростити израз $I(X_1; X_2, ..., X_n)$.

15. Доказати да је условна неодређеност $H(X_0|X_n)$ неопадајућа по n за сваки ланац Маркова.

* Ако је $I(X;Z|Y) = 0$, показати да је $I(X;Y) \geq I(X;Z)$. Под којим условима важи једнакост?

16. Нека случајна величина X узима три могуће вредности $\{a, b, c\}$. Посматрајмо две расподеле вероватноће ове случајне величине

	$p(x)$	$q(x)$
a	1/2	1/3
b	1/4	1/3
c	1/4	1/3

Израчунати $H(p)$, $H(q)$, $KL(p||q)$ и $KL(q||p)$.

17. Претходни задатак говори да је у општем случају $KL(p||q) \neq KL(q||p)$. Наћи пример две расподеле вероватноће p и q тако да једнакост $KL(p||q) = KL(q||p)$ важи.

18. Нека су X, Y и Z случајне величине са заједничком расподелом $p(x, y, z)$. Кулбак-Лајблерово растојање између заједничке расподеле и производа одговарајућих маргиналних је

$$KL(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) = E\left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)}\right]$$

Изразити Кулбак-Лајблерово растојање преко неодређености. Када је ово растојање једнако нули?

19. Посматрајмо низ од n бинарних случајних величина $X_1, X_2, ..., X_n$. Сваки низ са парним бројем јединица има вероватноћу $2^{-(n-1)}$ и сваки низ са непарним бројем јединица има вероватноћу 0. Наћи информације:

$$I(X_1; X_2), I(X_2; X_3|X_1), ..., I(X_{n-1}; X_n|X_1, ..., X_{n-2}).$$

20. Нека је $X_1 \to X_2 \to X_3$ ланац Маркова такав да $X_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, $X_2 \in \{1, 2, ..., k\}$ и $X_3 \in \{1, 2, ..., m\}$. Показати да је $I(X_1; X_3) \leq \log k$.

21. Нека су X, Y, Z три случајне величине са Бернулијевом расподелом са параметром $\frac{1}{2}$ које су независне у паровима.
а) Одредити минималну вредности неодређености $H(X, Y, Z)$.
б) Навести пример случајних величина за које се постиже минимум.

22. Под којим условима важи једнакост $H(X|g(Y)) = H(X|Y)$?

23. а) Имамо на располагању "фер" новчић. Одредити заједничку информацију између горње и доње стране.
б) Имамо на располагању "фер" коцкицу. Одредити заједничку информацију између горње стране и бочних страна коцкице.

24. Упоредити изразе:
а) $H(X)$ и $H(5X)$
б) $I(g(X); Y)$ и $I(X; Y)$
в) $\frac{H(X,Y)}{H(X)+H(Y)}$ и 1

25. Користећи Венове дијаграме можемо приметити да се заједничка информација три случајне величине X, Y и Z може дефинисати као

$$I(X; Y; Z) = I(X; Y) - I(X; Y|Z).$$

Израз $I(X; Y; Z)$ не мора бити ненегативан. Наћи X Y и Z за које је $I(X; Y; Z) < 0$ и показати да важе следеће једнакости:

$$I(X; Y; Z) = H(X, Y, Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X; Y) + I(Y; Z) + I(Z; X)$$

$$I(X; Y; Z) = H(X, Y, Z) - H(X, Y) - H(Y, Z) - H(Z, Y) + H(X) + H(Y) + H(Z)$$

26. Претпоставимо да имамо n новичића међу којима постоји један фаличан, који је тежи или лакши од осталих. На располагању имамо теразије које могу имати три исхода. Нека је k најмањи број мерења потребних да се утврди који новчић је фаличан као и да ли је тежи или лакши.
а) Показати да важи $3^k \geq 2n$.
б) На који начин се 12 новчића може декларисати помоћу 3 мерења?

27. Нека су $X_1, X_2, ...$ независне једнако расподељене случајне величине са функцијом расподеле $p(x)$. Наћи

$$\lim_{n\to\infty} [p(X_1, X_2, ..., X_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

28. Нека су $X_1, X_2, ...$ независне једнако расподељене случајне величине расподелом

$$X = \begin{cases} 1, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{2} \\ 2, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{4} \\ 3, \text{ са вероватноћом } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Наћи граничну вредност израза

$$(X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}.$$

* Нека су (X_i, Y_i) iid са заједничком расподелом $p(x, y)$. Формирамо количник веродостојности за тестирање хипотезе да су X и Y независне. Наћи граничну вредност за

$$\frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^{n} \frac{p(X_i)p(Y_i)}{p(X_i, Y_i)} \quad .$$

29. Бацају се фер коцкица и фер новчић независно. Нека је X вредност на коцкици, а Y узима вредност нула ако је пало писмо и 1 ако је пала глава. Нека је $Z = X + Y$, наћи $H(Z)$ и $I(Z; X)$.

* Дефинисати преко информације довољне статистике. Показати да је статистика $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ довољна за параметар θ ако је узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из $Ber(\theta)$ расподеле.

* $\rho(x, y)$ је метрика ако за све x, y важи:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) = 0$ акко $x = y$
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

а) Испитати да ли је $\rho(X, Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$ метрика.
б) Показати да важе једнакости:

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= H(X) + H(Y) - 2I(X; Y) \\ &= H(X, Y) - I(X; Y) = \\ &= 2H(X, Y) - H(X) - H(Y) \end{aligned} \tag{1}$$

* (Јенсен-Шенонова растојање)

$$JSP(p||q) := \frac{1}{2}KL(p||m) + \frac{1}{2}KL(q||m), \quad m = \frac{1}{2}(p+q)$$

Нека је

$$X = \begin{cases} X_1, \text{ ако је } Z = 1 \\ X_2, \text{ ако је } Z = 0 \end{cases}$$

где X_1 има расподелу p, X_2 расподелу q, док је Z индикатор догађаја чија је вероватноћа $1/2$. Показати да је

$$JSD(p||q) = I(X;Y).$$

2 Теорија кодирања

1. Нека је дата случајна променљива

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix},$$

где су S_i кодиране азбуком која има D симбола. Ако су дужине кодираних речи $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$, наћи одговарајућу доњу границу за D.

2. Размотримо случајну величину

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.49 & 0.26 & 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

а) Наћи бинарни Хафманов код за X.
б) Наћи средњу дужину речи за то кодирање.
в) Наћи тројни (терцијарни) Хафманов код за X.

3. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$. Показати да је овај код такође оптималан за расподелу $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

4. Који од понуђени кодова није Хафманов код ни за једну расподелу вероватноћа?
а) $\{0, 10, 11\}$
б) $\{00, 01, 10, 110\}$
в) $\{10, 01\}$

5. Наћи бинарни и тројни (терцијарни) Хафманов код за случајну величину X чија је расподела вероватноће

$$p = (\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}).$$

Колика је средња дужина речи у оба случаја?

6. Слова А, Е, И, О, У јављају се са фреквенцијама 0.3, 0.2, 0.1, 0.25 и 0.15. Одредити оптимално бинарно кодирање и средњу дужину кодираних речи.

7. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу:
а) $\mathbf{p} = (\frac{10}{41}, \frac{9}{41}, \frac{8}{41}, \frac{7}{41}, \frac{7}{41})$
б) $\mathbf{p} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2, \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3, \ldots)$

8. Наћи услов да Хафманов бинарни код са 4 симбола и расподелом $p_1 = p_2 \geq p_3 = p_4$ има све речи дужине 2.

9. Нека Хафманов код има 5 кодних речи над азбиком $\{0, 1\}$ и нека је $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = q$. Наћи максималну могућу вредност за p_5 тако да реч која се појављује са вероватноћом p_5 има дужину 4.

10. Наћи најмању вредност q тако да бинарни Хафманов код са четири кодне речи са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 = q$ има све речи једнаке дужине 2.

11. Извор има три симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Показати да бинарни Хафманов код има средњу дужину речи $2-p_1$. Шта је одговарајући резултат ако извор има четири симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$?

12. Нека је $Y = X + Z(mod 11)$ дискретан канал без меморије, где је

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

и $X \in \{0, 1, ..., 10\}$. Ако претпоставимо да су Z и X независне, наћи капацитет канала.

13. Наћи капацитет канала са датом матрицом условних вероватноћа.

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	1/4	3/4
$X = 1$	3/4	1/4
$X = 2$	3/4	1/4
$X = 3$	1/4	3/4

14. Наћи капацитет канала са датом матрицом условних вероватноћа.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	1/2	1/6	1/3
$X = 1$	1/3	1/2	1/6
$X = 2$	1/6	1/3	1/2

15. Наћи капацитет канала и дистрибуцију на улазу за који се он постиже.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	1/4	0	3/4
$X = 1$	0	1	0
$X = 2$	3/4	0	1/4

16. Наћи капацитет канала

	a	b	c	d
0	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$
1	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$

17. Постамрајмо 26 слова на тастатури.
а) Ако се притисне типка резултат је одговарајуће слово, одредити капацитет таквог канала.
б) Ако се притисне типка резултат је то слово или слово до њега са једнаким вероватноћама. Према томе, $A \to A$ или B,..., $Z \to Z$ или A. Шта је капацитет у том случају?

18. Наћи капацитет канала чија је матрица условних вероватноћа

	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	1	0
$X=1$	1/2	1/2

19. Наћи капацитет канала $C_1 \cdot C_2$ ако су матрице канала C_1 и C_2

	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	1/3	2/3
$X=1$	2/3	1/3

	$Z=0$	$Z=1$
$Y=0$	5/9	4/9
$Y=1$	4/9	5/9

20. Нека је C капацитет канала

	0	1
0	1/3	2/3
1	2/3	1/3

Ако је C_n капацитет n редно везаних канала $C_n = C \cdot C \cdot \ldots \cdot C$, наћи $\lim_{n\to\infty} C_n$

21. Наћи чему тежи капацитет канала C_n ако је $C_n = C \cdot C_{n-1}$, $C_1 = C$, где је C канал са матрицом

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	1/3	0	2/3
$X=1$	0	1	0
$X=2$	1/4	0	3/4

22. Наћи капацитет канала

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$
$X=0$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	$1/4$
$X=1$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$
$X=2$	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

23. Наћи капацитет канала и дистрибуцију на улазу за коју се остварује.

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$
$X=1$	$1/4$	$1/4$	$1/2$	0	0
$X=2$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	0	0
$X=3$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0	0
$X=4$	0	0	0	$1/4$	$3/4$
$X=5$	0	0	0	$3/4$	$1/4$

24. Дат је канал везе и дистрибуција на улазу.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix},$$

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	0.2	0.6	0.2
$X=1$	0.3	0.3	0.4
$X=2$	0.1	0.1	0.8

Наћи
а) шему декодовања за идеалног посматрача
б) шему декодовања за посматрача максималне веродостојности (идеалног посматрача при равномерној дистрибуцији).

25. Дат је канал C

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	1	0	0
$X=1$	0	p	$1-p$
$X=2$	0	q	$1-q$

Који услов треба да задовољавају p и q тако да идеални посматрач, за равномерну расподелу на улазу, декодира примљену вредност као ону која је послата?

* Нека је Γ канал везе који има капацитет C. Показати да је капацитет канала $\Gamma + \Gamma + ... + \Gamma$ (m пута) једнак $C + \log m$.

* Нека су Γ_1 и Γ_2 канали везе. Израчунати $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, канала Γ_1 и Γ_2 .

* Дат је бинарни понављајући код $\mathcal{K}_n$ непарне дужине $n = 2t + 1$ којим се кодирају поруке које се преносе кроз бинарни симетрични канал у коме је вероватноћа погрешног преноса $q < \frac{1}{2}$. Наћи правило максималне веродостојности δ и показати да је вероватноћа грешке тог правила

$$p_e \leq \frac{(2t+1)!}{(t!)^2}(1-q)^t q^{t+1}$$

и да тежи нули кад . Због чега ово није добар пример кода с тачке гледишта фундаменаталне теореме теорије информације?

* Дат је бинарни канал везе својом матрицом прелазних вероватноћа

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

. Због повећања поузданости 0 се кодира као 000, а 1 као 111. Нека је δ_1 правило максималне веродостојности , а δ_2 правило којим закључујемо да је послата 0, уколико примљена реч има бар две нуле, а 1 ако има бар две јединице. Које од ова два правила има већу вероватноћу грешке? (Расподела на улазу је p(0)=p, p(1)=1-p). Колика је брзина оваквог преноса? Шта се с брзином преноса и вероватноћом грешке дешава уколико кодирамо понављајућим кодом дужине n?

Кодови с једначином провере

Код ISBN је код дужине 10 чија је азбука $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X\}$. Цифра $X(= 10)$ може се јавити само као последња (цифра провере). Кодне речи (тј. исправни $ISBN$ кодови) дефинисани су на следећи начин:

$$\mathcal{K} = \{x_1, \ldots, x_10 : \sum_{i=1}^{10} i \cdot x_i =_{11} 0\}.$$

а) Проверити да ли су следећи кодови исправни ISBN-ови: 0-8987-175-4, 86-71-07006-9, 0-7028761-4 (занемарити цртице).

б) Следећи ISBN-ови су примљени без једне цифре: 1-8941□4-03-7, 86-75□9-069-9. Које цифре недостају?

в) Нека су y_1 и y_2 два исправна ISBN-а, $y_1 \neq y_2$. Показати да је Хамингово растојање $d(y_1, y_2) \geq 2$.

г) Показати да код ISBN детектује све просте грешке.

* Број банковног рачуна је десетоцифрени број $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$. Валидан број мора да задовољи једначину провере:

$$0 = \left(\sum_{i=0}^{9} 2^i a_i\right) \mod 11.$$

Показати да овако задат код детектује:

а) све просте грешке

б) све суседне транспозиције

в) све транспозиције на произвољним позицијама.

* Лични идентификациони број потребан за приступ одређеном сајту је десетоцифрени број у форми $YYMMDDKKKC$, где је C цифра провере. Цифра провере мора да задовољава услов да је број $YYMMDDKKKC$ дељив са 11. Показати да овај код детектује:

а) све просте грешке

б) све суседне транспозиције.

* Немачки поштански број је десетоцифрени број $a_1 a_2 \dots a_{10}$ са једначином провере

$$\sum_{i=1}^{10} \delta_i(a_i) \equiv 0 \mod 10,$$

где

$$\delta_1 = \delta_4 = \delta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \delta_4 = \delta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 0 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \delta_4 = \delta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Наћи које суседне транспозиције овај код не детектује.

Линеарни кодови

26. Нека је

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица провере линеарног кода. Одредити број информационих карактера, број карактера провере и кодне речи.

27. Дате су кодне речи 00010, 11001 и 11111. Одредити матрицу провере линеарног кода са највећим могућим бројем карактера провере. Колики је број број информационих, а колики број битова провере тог кода?

28. Нека је

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица провере линеарног кода. Одредити број информационих карактера, број карактера провере и кодне речи.
Ако се исправљају обрасци грешака најмање тежине у косету, наћи један начин декодирања.

29. Дате су кодне речи 0000, 1001, 1111 и 0110.
а) Наћи матрицу провере линеарног кода, број битова провере и број информационих битова.
б) Ако се исправљају обрасци грешака најмање тежине у косету, наћи један начин декодирања.

* Нека C је бинарни (5,3) код са генераторном матрицом

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Написати G у стандардном облику.

б) Наћи матрицу провере.

в) Наћи кодне речи дуалног кода $G^{\perp}$.

* Матрица провере линеарног кода над азбуком је

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Наћи кодне речи и генераторну матрицу. Колико има информационих, а колико карактера провере. Како се зове овакав код?