0.1 Увод у курс

"Essentially, all models are wrong, but some are useful"
George E.P. Box

Како се променом једне или више енезависних случајних променјљивих мења вредност зависне случајне величине? Како одредити аналитичко-математички облик одговарајуће везе? Одговор на ова, као и на низ других питања даје нам управо регресија. Овај курс биће посвећен линеарној регресији. Идеје које се овде користе могу послужити и приликом анализирања других типова регресије.

Први записи о методи најмањих квадрата могу се наћи у радовима Лежандра и Гауса, почетком 19. века. Они су овај метод користили за одређивање орбита небеских тела око Сунца. Са речју "регресија" математичари су се први пут сусрели у раду Ф. Галтона , *Regression toward mediocrity in hereditary stature* из 1855. године. Он је дошао до закључка да синови веома високих очева нису тако високи. Иако је Галтон разлог за то пронашао у генетици, његов пример иницирао је проучавање ове теме од стране статистичара и тако почиње развој ове веома значајне статистичке области.

Дефиниција 0.1.1. *Регресија је зависност једне случајне промењљиве од друге (или више њих). Регресиони модел је математички модел који описује ту зависност.*

Дефиниција 0.1.2. *Случајна величина $f(X) = E(Y|X)$ назива се регресиона функција, при чему X може бити вишедимензиона случајна величина.*

Следећа теорема оправдава облик функције регресије.

Теорема 0.1.1.

$$E(Y - E(Y|X))^2 \leq E(Y - g(X))^2$$

за сваку функцију $g(X)$, уз претпоставку да постоји математичко очкевиање на десној страни неједнакости.

Доказ. □

Регресиона функција је права линија акко случајни вектор $(X, Y)^T$ има вишедимензионална нормалну расподелу. Регресиону праву има смисла конструисати и када знамо да заједничка расподела није нормална. Тада је то права која од свих правих линија најбоље описује зависност између Y и X у смислу средњеквадратног одступања.

Регресиони модел се може предцавити у облику

$$Y = f(X) + \varepsilon,$$

где је ε случајна промењлива независна од X, најчешће са нормалном $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелом.

Уколико из нпр. графичког приказа зависности (X, Y) имамо разлога да претпоставимо да је $f(X) = aX + b$ онда се коефицијенти a, b одређују тако да се минимизира $E(Y - (aX + b))^2$.

Добија се да је

$$\begin{aligned} a &= \frac{EXY - EXEY}{DX} \\ b &= EY - aEX, \end{aligned}$$

па се коефицијенти a, b могу оценити методом замене, односно

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\bar{S}_X^2} = \hat{\rho}\frac{\bar{S}_X}{\bar{S}_Y} \\ \hat{b} &= \bar{Y} - \hat{a}\bar{X}, \end{aligned}$$

Уколико претпоставимо да X није случајна промењлива говоримо о *контролисаној регресији*.

Имајући у циду саму дефиницију регресионе функције, од сада па надаље можемо претпоставити да се ради о контролисаној регресији.

Да поновимо, главни наш задатак у овом курсу је да одговоримо на следећа питања.

Неколико питања на која ћемо дати одговор:

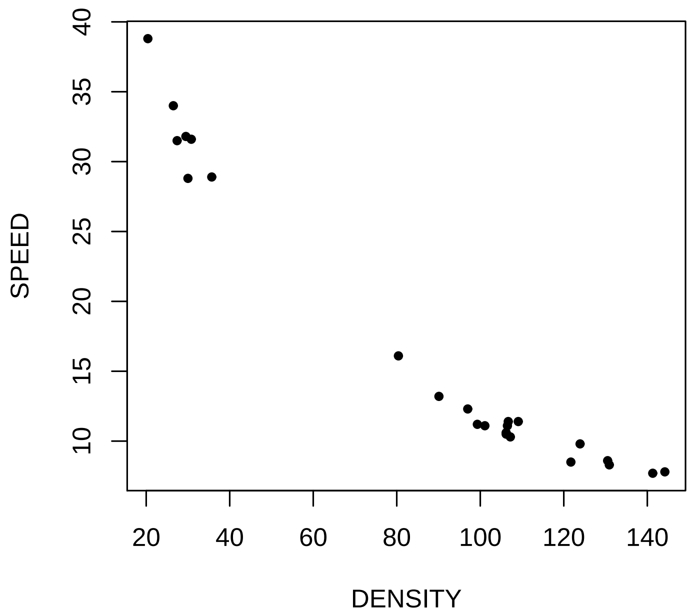
- Каква је веза између различитих обележја?
- Када одередимо облик модела како да оценимо његове параметре?
- Који су модели "допустиви" и у ком смислу?
- Како да испитамо квалитет модела?

Како изгледа цео процес бирања модела демонстрираћемо на наведеном примеру.

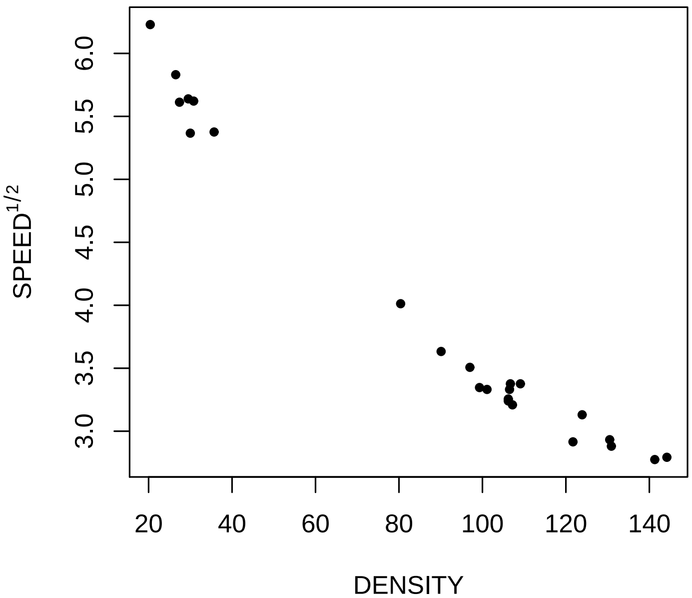
Пример 0.1.1. *У циљу истраживања у којој мери број возила на путу утиче на брзину возила сакупљани су подаци о "густини" возила (број аутомобила у једној миљи) и просечној брзини аутомобила.*

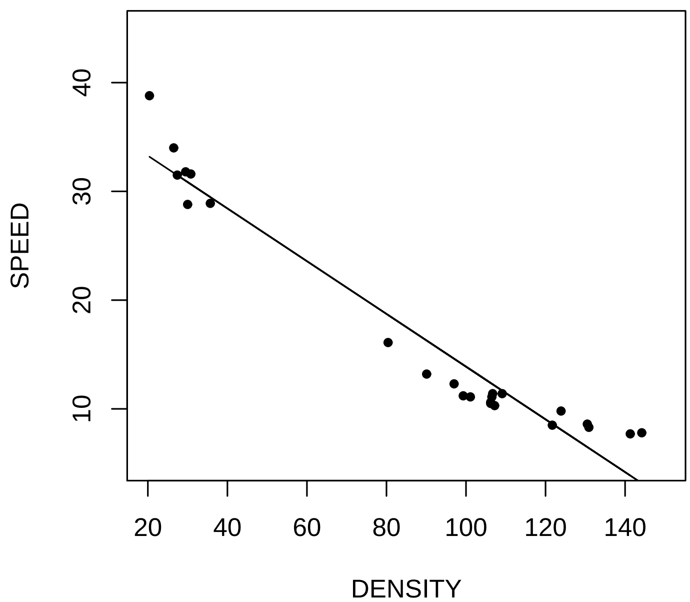
	DENSITY	SPEED
1	20.40	38.80
2	27.40	31.50
3	106.20	10.60
4	80.40	16.10
5	141.30	7.70
6	130.90	8.30
7	121.70	8.50
8	106.50	11.10
9	130.50	8.60
10	101.10	11.10
11	123.90	9.80
12	144.20	7.80
13	29.50	31.80
14	30.80	31.60
15	26.50	34.00
16	35.70	28.90
17	30.00	28.80
18	106.20	10.50
19	97.00	12.30
20	90.10	13.20
21	106.70	11.40
22	99.30	11.20
23	107.20	10.30
24	109.10	11.40

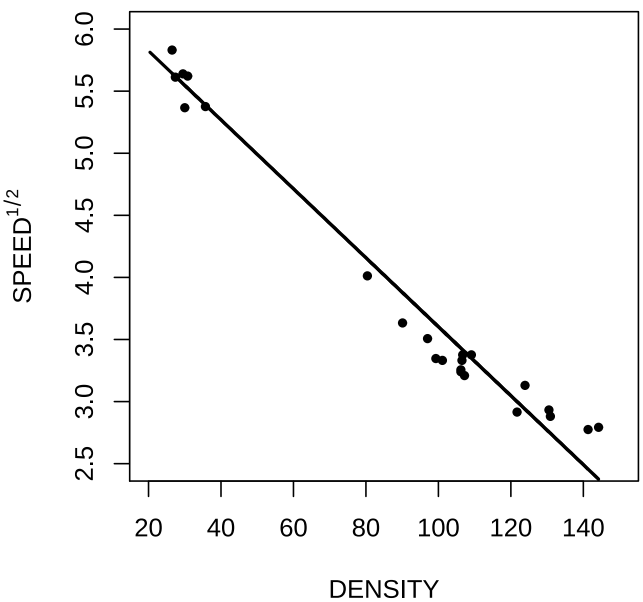
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	38.1295	1.2177	31.31	0.0000
E1.1$DENSITY	-0.2425	0.0126	-19.22	0.0000



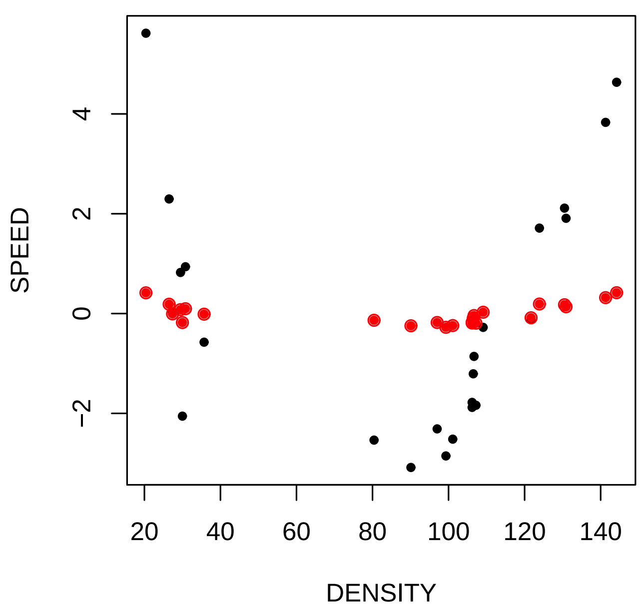
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	6.3797	0.1028	62.09	0.0000
E1.1$DENSITY	-0.0278	0.0011	-26.09	0.0000


SPEED^1/2
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
20
40
60
80
100
120
140
DENSITY

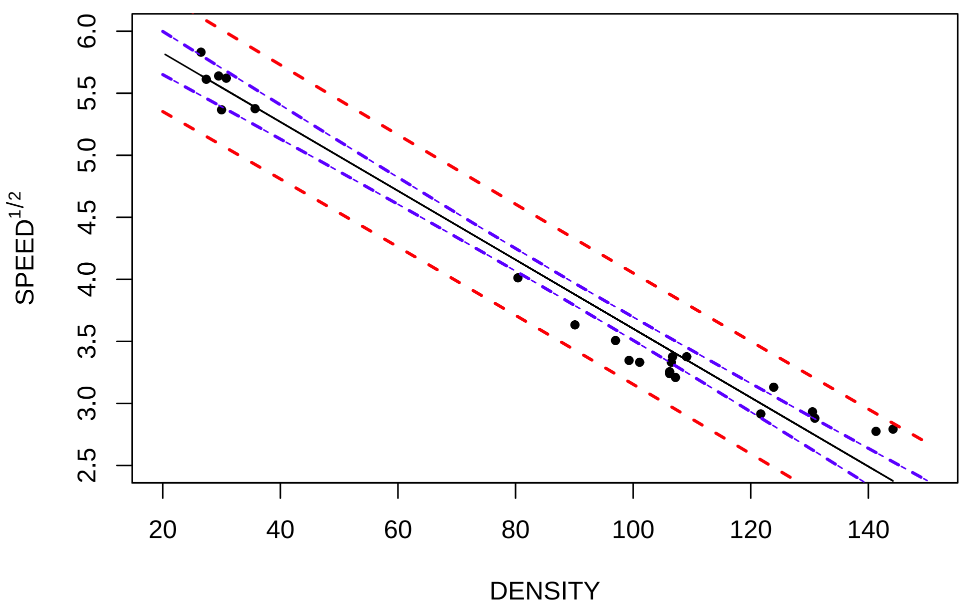

SPEED
40
30
20
10
20
40
60
80
100
120
140
DENSITY



SPEED^1/2
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
20
40
60
80
100
120
140
DENSITY



SPEED
−2
0
2
4
20
40
60
80
100
120
140
DENSITY


SPEED$^{1/2}$
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
20
40
60
80
100
120
140
DENSITY

Први корак је свакако да графички представимо податке и да уочимо неки облик зависности (ако постоји).

Са првог графика можемо закључити да са повећањем густине саобраћаја опада брзина истог, што је сасвим очекиван закључак. Најједноставнији модел који би могао да опише податке је линеарна веза, односно $y = ax + b + \varepsilon$, где је y просечна брзина аутомобила а x густина собраћаја. Јасно је да у модел морамо да укључимо и неки "шум" (ε) који би оправдао то што тачке на графику нису све колинеарне. Неке природне особине које тај шум треба да задовољава је да је 'мали', да је "центриран" око нуле, да не зависи од x и y итд. Шум заправо представља грешку модела.

Један од најпопуларнијих, најједноставнијих и слободно можемо рећи основних метода за оцену параметара модела је метод најмањих квадрата. Идеја је да параметре оценимо оним вредностима који минимизирају суму квадратних одступања оцењене од праве вредности, односно

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Добијамо да су тражени $\hat{a}$ и $\hat{b}$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$
$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}.$$

Приметимо да полазни модел можемо написати у центрираном облику $y_i = a(x_i - \bar{x}) + b + a\bar{x} + \varepsilon$. Испоставља се да је овај облик погоднији за прогнозирање јер $\hat{y}_i = \hat{a}(x_i - \bar{x}) + \bar{y}$.

Још је важно да се примети да је $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$.

У (0.1.1) једначине правих које се добијају у првом, односно другом моделу су $y = -0.24x + 38.13$, односно $y = -0.028x + 6.38$.

Када је модел добар одступања оцењених вредности од правих (резидуали) су мали. Зато је природно за меру квалитета модела узети, за початак, $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$. Главни проблем са овом мером одступања је зато што она зависи од јединице. Зато ћемо искористи сличну идеју као за увођење коефицијента корелације.

$$SSTO = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \bar{y})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = SSE + SSR$$

SSR је одступање које је објашњено моделом. Зато уводимо *коефицијент детерминације* R^2 као меру квалитета модела.

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SSTO}$$

Јасно је да ако бисмо имали перфектан модел онда би $R^2 = 1$.

У примеру 0.1.1 за први модел се добија да је $R^2 = 0.94$ док је за други модел $R^2 = 0.98$.

Може се показати да је $R = |\rho_{xy}|$.

Напомена: не треба увек (само) користити R^2 као меру квалитета модела. О томе ће бити више речи у остатку курса.

0.2 Основни појмови из линеарне алгебре

Дефиниција 0.2.1. *Векторски простор V је непразан скуп, затворен за сабирање и скаларно множење. Његови елементи називају се вектори.*

Дефиниција 0.2.2. *Вектори $v_1, ..., v_n$ су линеарно независни ако не постоји нетривијално решење једначине*

$$x_1 v_1 + \cdots x_n v_n = 0.$$

Дефиниција 0.2.3. *Вектори v_1 и v_2 су ортогонални ако је $< v_1, v_2 >= 0$.*

Приметимо да из ортогоналности следи линеарна независност а да обрнуто не важи. На пример, посматрајмо векторе $v_1 = (1, 0, 1)^T$ и $v_2 = (0, 1, 1)^T$.

Дефиниција 0.2.4. *Квадратна матрица M је ортогонална ако је $M^T M = I$*

Дефиниција 0.2.5. *Ранг $n \times p$ матрице A у ознаци $R(A)$ је максималан број линеарно независних колона(врста).*

Из саме дефиниције следи следећи низ једнакости

$$R(A^TA) = R(AA^T) = R(A) = R(A^T).$$

Дефиниција 0.2.6. *Ако је за неко $\lambda \in R$, $Ax = \lambda x$ онда се λ назива сопствена вредност матрице A, а x сопствени вектор.*

Познато је да је за квадратну матрицу A је λ решење једначине $det(A - \lambda I) = 0$ и тада је $detA = \prod \lambda_i$.

Дефиниција 0.2.7. *Траг квадратне матрице $A = [a_{ij}]$ представља збир елемената на дијагонали, односно*

$$trA = \sum_i a_{ii}.$$

За траг матрице A важе следеће једнакости (под претпоставком да је множење дефинисано):

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$;
2. Ако је A $n \times n$ матрица и P несингуларна матрица, онда је $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$;
3. Ако је A $n \times n$ матрица и M ортогонална матрица, онда је $tr(M^TAM) = tr(A)$.
4. $tr(ABC) = tr(BCA)$

Дефиниција 0.2.8. *Квадратна матрица A је симетрична ако је $A = A^T$.*

Особине симетричне $n \times n$ матрице A:

1. Постоји ортогонална матрица $C = (c_1, ...c_n)$ и дијагонална матрица $\Lambda = (\lambda_1, ...\lambda_n)$ (сопствене вредности матрице) таква да је $A = C\Lambda C^T$ (спектрална декомпозиција матрице A). Тада је $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i c_i^T$.
2. $R(A)$ је број сопствених вредности различитих од нуле;
3. $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$;
4. Ако је A несингуларна матрица онда је $tr(A^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$;

5. Постоји ортогонална трансформација $y = M^T x$ тако да је

$$x^T A x = \sum \lambda_i y_i^2;$$

6. $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$

У случају несиметричне $n \times p$ матрице A матрица ранга r постоји декомпозиција $A = ULV$ где је $U^T U = I = V^T V = I$ и L је несингуларна матрица ранга r.

Дефиниција 0.2.9. *Нека је A симетрична матрица. Тада је са $Q(x) = x^T A x$ дефинисана једна квадратна форма вектора x. Кажемо да је Q позитивно (негативно) дефинитна ако за свако $x > 0$, $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$). Ако се допушта једнакост онда је позитивно семи-дефинитна (негативно семи-дефинитна).*

Може се показати да ако је $A_{p\times p}$ позитивно дефинитна и $B_{k\times p}$ матрица ранга $k \leq p$ онда је BAB^T позитивно дефинитна.

Важи и следеће: Симетрична матрица A је позитивно дефинитна акко постоји несингуларна матрица P таква да је $A = P^T P$

Важи и следеће

$$\max_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{\max}, \tag{1}$$

$$\min_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_{\min}. \tag{2}$$

Дефиниција 0.2.10. *За матрицу P за коју је $P^2 = P$ кажемо да је идемпотента. Уколико је и симетрична онда се назива матрицом пројекције или пројектором.*

Особине пројектора:

1. $tr(P) = R(P)$;

2. P је позитивно семи дефинитна;

3. Нека су P_1 и P_2 пројектори. Ако је $P_1 - P_2$ позитивно семи-дефинитна онда је и пројектор, као и $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2$

Доказ треће особине:

Из позитивне семидефинитности $P_1 - P_2$ закључујемо да је

$$((I - P_1)y)^T (P_1 - P_2)((I - P_1)y) \geq 0.$$

Даље је $y^T (I - P_1)^T P_1 (I - P_1) y = 0$, па је

$$((I - P_1)y)^T P_2 ((I - P_1)y) \leq 0.$$

Узимајући у обзир позитивну семидефинитност P_2 је

$$((I - P_1)y)^T P_2 ((I - P_1)y) = 0,$$

односно

$$((I - P_1))^T P_2 ((I - P_1)) = 0 = (I - P_1))^T P_2 P_2 ((I - P_1)).$$

Одавде је

$$P_2 (I - P_1) = 0.$$

Дефиниција 0.2.11. *Матрица A максималног ранга има инверз A^{-1}. Уколико матрица није максималног ранга онда постоји уопштени инверз A^{-} за који важи $AA^{-}A = A$. Овај инверз не мора бити јединствен.*

0.2.1 Матрично диференцирање

Дефиниција 0.2.12. *Нека је X $n \times p$ матрица и f скаларна функција. Тада је матрично диференцирање дефинисано са*

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} := \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}}\right)$$

1. $\frac{\partial a^T x}{\partial x} = a$;
2. $\frac{\partial x^T x}{\partial x} = 2x$;
3. $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T)x$;
4. $\frac{\partial x^T A y}{\partial x} = Ay$;

0.3 Неке важне вишедименизионалне расподеле

0.3.1 Нормална расподела

Дефиниција 0.3.1. *Случајни вектор X има n-димензиона нормалну расподела $N_n(\mu,\Sigma)$ уколико је његова фунцкија густине*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2}}, \;\; x \in R^n$$

где је Σ симетрична, позитивно дефинитна коваријациона матрица а са $|\Sigma|$ је означена њена детерминанта.

Вишедимензионална нормална расподела има следеће лепе особине:

- Уколико X има $N(\mu,\Sigma)$ расnделу онда $AX+b$ има $N(A\mu+b, A\Sigma A^T)$;
- Ако случајни вектор $Z = (X^T, Y^T)^T$ има $N\left(\left(\begin{array}{c}\mu_x\\ \mu_y\end{array}\right), \left(\begin{array}{cc}\Sigma_x & \Sigma_{xy}\\ \Sigma_{xy}^T & \Sigma_y\end{array}\right)\right)$ расподелу

  онда су маргиналне расподеле за X и Y редом $N(\mu_x,\Sigma_x)$ и $N(\mu_y,\Sigma_y)$, а условне расподеле

  $X|y \sim N(\mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y-\mu_y), \Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}\Sigma_{xy}^T)$

  $Y|x \sim N(\mu_y + \Sigma_{xy}^T\Sigma_{xx}^{-1}(x-\mu_x), \Sigma_y - \Sigma_{xy}^T\Sigma_x^{-1}\Sigma_{xy})$;
- Момент генераторна функција случајног вектора X са $N(\mu,\Sigma)$ расподелом је $M_X(t) = E(e^{t^Tx}) = e^{\mu^Tt+\frac{1}{2}t^T\Sigma t}, \;\; t \in R$;
- X се може представити у облику $X = AZ + \mu$ где је $AA^T = \Sigma$ а Z има стандардну вишедимензионалну нормалну расподелу.
- Нека $X = (X_1, ..., X_n)^T$ има вишедимензиону нормалну расподелу. Тада су компоненте вектора независне акко су некорелисане (коваријациона матрица је дијагонална матрица).
- X има вишедимензиону нормалну расподелу акко за сваки вектор a (различит од нуле) a^TX има једнодимензионалну нормалну расподелу.

0.3.2 χ^2 расподела

Дефиниција 0.3.2. *Нека су $X_1, ..., X_k$ независне случајне величине са $N(\theta_1, 1)$,...,$N(\theta_k, 1)$ расподелма ,редом. Тада случајна величина*

$$Y = \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \tag{3}$$

има $\chi_k^2(\mu)$ расподелу, где је параметар положаја $\mu = \sum_{j=1}^{k} \theta_j^2$. Уколико је $\mu = 0$ параметар положаја ћемо изоставити у нотацији.

Теорема 0.3.1. *Случајна величина Y дефинисана са (3) се може представити у облику збира две независне случајне величине од којих једна има $\chi_1^2(\mu)$ а друга χ_{k-1}^2 расподелу.*

Приметимо да заправо ова теорема оправдава дефиницију χ^2 расподеле јер сугерише да расподела од Y зависи само од степени слободе и μ.

Доказ. Нека је $B = [b_{ij}]$ ортогонала матрица тако да је $b_{1j} = \theta_j \mu^{-\frac{1}{2}}$, за $j = 1, 2..., k$. Нека је $W = BX$. Тада W има $N(B\theta, BIB^T)$, односно $N(B\theta, I)$ јер је B ортогонална матрица. Одавде је јасно да су компоненте вектора W међусобно независне. Приметимо да је $EW_1 = \sum_{j=1}^{k} b_{1j}\theta_j = \mu^{\frac{1}{2}}$, и да је $EW_i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\theta_j = 0$. . Друга једнакост важи пошто је матрица B ортогонална.

$$Y = X^T X = W_1^2 + \sum_{i=2}^{k} W_i^2$$

Из ове репрезентације јасно следи тврђење теореме. □

0.3.3 Фишерова расподела

Нека $X \sim \chi_{n_1}^2(\mu)$ и $Y \sim \chi_{n_2}^2$ и независне су. Тада

$$\frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}}$$

има Фишерову $F_{n_1,n_2}(\mu)$ расподелу.

0.3.4 Студентова расподела

Нека X има нормалну $N(\theta, 1)$ расподелу и Y има χ^2_m расподелу и независне су. Тада

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}$$

има Студентову $t_m(\theta)$ расподелу, где је θ параметар положаја.

0.4 Расподела квадратне форме

Теорема 0.4.1 (Кохран). *Нека су $X_1, ..., X_n$ независне $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ случајне величине и нека је*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{j=1}^{k} Q_j,$$

где је Q_j квадратна форма дефинисана са $Q_j = X^T A_j X$, за $j = 1, 2, ..., k$, при чему је $R(A_j) = r_j$. Тада је $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$. ако и само ако

1. *$Q_1, ..., Q_k$ су независне случајне величине и*
2. *Q_j/σ^2 има $\chi^2_{r_j}$ расподелу.*

Може се формулисати и општије тврђење:

Теорема 0.4.2 (Кохран). *Нека случајни вектор X има $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2 I)$ расподелу и нека је*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{j=1}^{k} Q_j,$$

где је Q_j квадратна форма дефинисана са $Q_j = X^T A_j X$, за $j = 1, 2, ..., k$, при чему је $R(A_j) = r_j$. Тада је $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$ и $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = \theta^T \theta$ ако и само ако

1. *$Q_1, ..., Q_k$ су независне случајне величине и*
2. *Q_j/σ^2 има $\chi^2_{r_j}(\mu_j)$ расподелу, при чему је $\mu_j = \theta^T A_j \theta$*

Доказаћемо само прву теорему. Друга се доказује аналогно. Пре него што се упустиомо у доказ наводимо једну њену опште познату последицу.

Последица 0.4.1. *Узорачка средина $\bar{X}$ и поправљена узорачка дисперзија S^2 су независне сучајне величине, и $(n-1)S^2/\sigma^2$ има χ^2_{n-1} расподелу.*

Без умањења општости можемо претпоставити да је $\sigma^2 = 1$.

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n(\bar{X})^2.$$

Одавде је

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X})^2 = X^T(I - \frac{J}{n})X + X^T\frac{J}{n}X,$$

где је J $n \times n$ матрица чији су сви елементи јединице. Приметимо да лева страна једнакости има χ_n^2 расподелу. Даље, $R(I - \frac{J}{n}) = n-1$ јер је, с једне стране $R(I - \frac{J}{n}) \geq R(I) - R(\frac{J}{n})$, а с друге, из једнакости $(I - \frac{J}{n})1 = 0$ закључујемо да је $R(I - \frac{J}{n}) \leq n-1$. Како је $R(\frac{J}{n}) = 1$ следи тврђење.

Лема 0.4.1. *Нека су $x_1, ...x_n$ реални бројеви. Претпоставимо да се сума $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ може представити као збир k квадратних форми $\sum_{j=1}^{k} Q_j$ где је $Q_i = x^T A_i x$ и $R(A_i) = r_i$. Ако је $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ тада постоји ортогонална матрица M, таква да за $x = My$ важи*

$$\begin{aligned} Q_1 &= y_1^2 + \cdots y_{r_1}^2 \\ Q_2 &= y_{r_1+1}^2 + \cdots y_{r_1+r_2}^2 \\ &\cdots \\ Q_k &= y_{n-r_k+1}^2 + \cdots y_n^2 \end{aligned}$$

Доказ. Довољно је показати лему за $k = 2$. Тада је

$$Q = x^T x = x^T A_1 x + x^T A_2 x$$

Постоји ортогонална матрица M таква да је $M^T A_1 M = D_1$ где је D_1 дијагонална матрица. Без умањења општости можемо претпоставити да су од соствене вредности поређане тако да су $\lambda_1, ...\lambda_{r_1}$ различите од нуле а остале нула. Нека је $x = My$. Тада је

$$x^T x = y^T M^T M y = y^T y.$$

Даље је

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i y_i^2 + y^T M^T A_2 M y.$$

Одавде је

$$\sum_{i=1}^{r_1}(1-\lambda_i)y_i^2 + \sum_{i=r_1+1}^{n} y_i^2 = y^T M^T A_2 M y.$$

Како је $R(A_2) = n - r_1$ закључујемо да је $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{r_1} = 1$ одакле следи тврђење. $\square$

Важно је приметити да све квадратне форме које учествују у репрезентацији садрже различите y_i-ове. Независност Q_1,..., Q_k у тврдјењу Кохранове теореме је последица овога. Да бисмо доказали Кохранову теорему потребно је још да приметимо да када применимо ортогоналну трансформацију на случајан вектор са нормалном расподелом са независним компонентама добијамо опет случајан вектор са нормалном расподелом са независним компонентама. Одавде се добијају расподеле одговарајућих квадратних форми.

Теорема 0.4.3. *Нека случајни векто X има $N(\theta, \sigma^2 I)$ расподелу и нека је $Q_1 = X^T A_1 X$ и $Q_2 = X^T A_2 X$, где су A_1 и A_2 две симетричне матрице. Тада су Q_1 и Q_2 независне ако и само ако је $A_1 A_2 = 0$.*

0.5 Задаци

0.1. Нека су $X_1, ..., X_n$ независне и једнако расподељене случајне величине тако да је $EX_1 = 0$ и $DX_1 = \sigma^2 < \infty$. Нека је $Y_i = X_i - \bar{X}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Наћи коваријациону матрицу случајног вектора $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T$.

0.2. Нека су $X_1, ..., X_{n_1}$ независне са $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y_1, ..., Y_{n_2}$ независне са $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ расподелом. Наћи расподелу селедећих статистика:

а) $\frac{(\bar{X}-\bar{Y}-\delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, где је δ произвољна константа.

б) $\frac{n_1(\bar{X}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2(\bar{Y}-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$

0.3. Нека су $X_1, ..., X_{n_1}$ независне са $N(\mu_1, \sigma^2)$ и $Y_1, ..., Y_{n_2}$ независне са $N(\mu_2, \sigma^2)$ расподелом. Наћи расподелу селедећих статистика:

а) $\frac{S_1^2(n_1-1)+S_1^2(n_2-1)}{\sigma^2}$

0.4. Нека је $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ прост случајан узорак из дводимензионалне нормалне расподеле са параметрима $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$. Одредити константу C тако да статистика

$$T = C\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i - \bar{X} + \bar{Y})^2}}$$

има Студентову $t_m(\theta)$. Изразити m и θ у функцији од параметара расподеле и константе δ.

0.5. Доказати теорему 0.4.3.

Поглавље 1

Линеарни модели

1.1 Матрични запис ленеарног модела

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

где су

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

X се назива предиктор (независна променљива), а Y регресанд (зависна променљива). Случајност модела потиче од случајних грешки $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ за које се претпоставља центрираност, хомоскедастичност и некорелисаност. Дакле претпостављамо да важи:

1. $E(\varepsilon) = 0$;
2. $D(\varepsilon) = \sigma^2 I$;
3. X и ε су независни случајни вектори.

Уколико модел допушта и слободан члан онда се најчешће модел приказује у истом облуку при чему је матрица X

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^T \\ 1 & x_2^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^T \end{pmatrix}$$

и назива се *дизајн матрица.* Вектор параметара модела се може приказати у облику $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)^T$. Најприроднији начин да се оцене коефицијенти модела β је метод најмањих квадрата, односно

$$\hat{\beta} := \arg \min_{b \in R^{p+1}} \|Y - Xb\|^2.$$

Уколико је $R(X) = p$ онда је $X^T X$ инвертибилна и добија се да је

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Оцењена вредност је тада

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y = HY$$

.

Матрица H се назива hat matrix. Приметимо да је матрица H пројектор, тако да $\hat{Y}$ представља ортогоналну пројекцију вектора Y на раван генерисану са X. Резидуали модела се могу приказати у облику

$$e = Y - \hat{Y} = (I - H)Y.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} E(e) &= (I - H)E(Y) = 0 \\ Cov(e) &= \sigma^2 (I - H)(I - H)^T = \sigma^2 (I - H) \end{aligned}$$

Посматрајмо суму квадрата одступања од модела

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T e = Y^T (I - H) Y = Y^T Y - Y^T H Y.$$

Означимо са $M = (I - H) = [m_{ij}]$ Њено очекивање је

$$\begin{aligned} E(SSE) = E(\sum_{ij} m_{ij} Y_i Y_j) &= \sum_{ij} m_{ij} E(Y_i Y_j) = \sum_{ij} m_{ij} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \\ &= \sum_{i} m_{ii} E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \sum_{i} m_{ii} \\ &= \sigma^2 tr(M) = \sigma^2 (tr(I) - tr(H)) = \sigma^2 (n - tr((X^T X)(X^T X)^{-1})) \\ &= \sigma^2 (n - tr(I_{p+1})) = \sigma^2 (n - p - 1). \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је непристрасна оцена за σ^2 управо $(\sum_{i=1}^n e_i^2)/(n-p-1)$.

Резидуали и оцењене вредности су некорелисани $\sum(Y_i-\hat{Y})(\hat{Y}-\bar{Y})=0$ па је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 =& \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 \\ SSTO =& SSE+SSR \end{aligned} \tag{1.1}$$

SSE је необјашњено одступање (потиче од модела), SSR објашњено одступање а $SSTO$ укупно одступање. У матрично облику се одступања могу представити на следећи начин:

$$\begin{aligned} SSTO &= Y^T(I-\frac{J}{n})Y, \\ SSE &= Y^T(I-H)Y \\ SSR &= Y^T(H-\frac{J}{n})Y \end{aligned}$$

Даље је $R(I-\frac{J}{n})=n-1$, као и $R(I-H)=n-p-1$ јер је

$$R(I-H)=tr(I-H)=n-p-1.$$

Из формуле (1.1) је природно да о квалитету модела говоримо на основу количине објашњених одступања моделом односно да посматрамо *коефицијент детерминације* $R^2=\frac{SSR}{SSTO}=1-\frac{SSE}{SSTO}$. Видимо да је $0\leq R^2\leq 1$. У пракси је потребно да је R^2 бар 0.62. Са $R=\sqrt{R^2}$ је дефинисан вишеструки коефицијент корелације. Приметимо да кад имамо само један предиктор онда је $R=|\rho_{xy}|$.

С обзиром на то, да коефицијент детерминације увек расте са порастом броја предиктора понекад се уместо њега користи његова модификација која узима у обзир непристрасне оцене одговарајућих грешака,дефинисана са

$$R_A^2=1-\frac{\frac{SSE}{n-p-1}}{\frac{SSTO}{n-1}}.$$

У пракси је примећено да у случају малих узорака вредности R^2 могу бити велике чак и кад модел није довољно квалитета. За разлику од R^2, R_A^2 може бити негативан.

$R(X)$ не мора бити једнак баш $p+1$. На пример меримо температуру у цезијусима и фарехајтима, или бележимо број поена на предиспитним обавезама, на испиту, и укупан број поена. Може се десити и да је број променљивих већи или једнак од броја обзервација. Ако је $p+1=n$ ради се о *сатурираном* моделу, док ако је $p>n-1$ кажемо да је модеј *суперсатуриран*. У овом случају, кеофицијенти модела се не могу јединствено одредити.

Најбоље је обратити пажњу у прелиминарној анализи и уклонити променљиве које ису неопходне.

Приметимо да су резидуали ортогонални на простор генерисан са X.

$$e^T X = Y^T(I-H)X = Y^T(X - H^T X) = 0$$

Одавде је $e^T X u = 0$ за сваки вектор u.

Ако је X ортогонална матрица онда се оцена за β поклапа са вектором који би се добио када бисмо посматрали $p+1$ одговарајућих простих линеарних регресија.

Вратимо се сада особинама оцене коефицијената модела методом најмањих квадрата. Њена важна особина је садржана у следећој теореми.

Теорема 1.1.1 (Гаус-Марков)**.** *Од свих непрестрасних линеарних оцена параметра β, оцена методом најмањих квадрата има најмању дисперзију.*

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}|X) &= (X^T X)^{-1} X^T E(Y|X) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta \\ D(\hat{\beta}|X) &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} \sigma^2 \end{aligned}$$

Нека је $\tilde{\beta} = AY$. Треба показати да је $D(\tilde{\beta}|X) - D(\hat{\beta}|X) \geq 0$.
Нека је $B = (X^T X)^{-1} X^T$ и нека је $A = B + C$. Из услова непреистрасности је $E(\tilde{\beta}|X) = AX\beta = \beta$. Односно $I = AX = (B+C)X$. Како је $BX = I$ закључујемо да је $CX = 0$.
Даље је

$$D(\tilde{\beta}|X) = AD(Y|X)A^T = (B+C)(B^T + C^T)\sigma^2 = D(\hat{\beta}|X) + BC^T + CB^T + CC^T.$$

Како је

$$\begin{aligned} CB^T &= CX(X^T X)^{-1} = 0 \\ BC^T &= (X^T X)^{-1} X^T C^T = (X^T X)^{-1} (CX)^T = 0 \end{aligned}$$

следи тврђење.

Последица 1.1.1. *Уколико* $tr((X^TX)^{-1}) \to 0$*, кад* $n \to \infty$ $\hat{\beta}$ *је постојана оцена параметра* β.

Напоменимо да ћемо оцене које су најбоље линеарне непристрасне оцене означавати са BLUE (Best Linear unbiased estimate).

Слично се показују и следећа уопштења ове теореме. Прва говори о оцени линеарне функције параметара модела ($l^T\beta$) а друга о оцени више линеарних функција параметара модела ($L^T\beta$).

Теорема 1.1.2. $l^T\hat{\beta}$ *је* $BLUE$ *за* $l^T\beta$.

Теорема 1.1.3. $L^T\hat{\beta}$ *је* $BLUE$ *за* $L^T\beta$.

1.2 Тестирање линеарне хипотезе

Желимо да тестирамо нулту хипотезу $H_0 : C\beta = \gamma$, где је C $m \times (p+1)$ матрица. На пример, уколико желимо да тестирамо нулту хопотезу да нема утицаја слободног члана узећемо да је $C = (1, 0, ..., 0)$ и $\gamma = 0$. Или, уколико желимо да тестирамо нулту хипотезу да ниједан предиктор нема утицаја на Y, $C = (0, I_p)$ и $\gamma = 0$.

Претпоставимо да ε има $N(0, \sigma^2 I_n)$ расподелу. За тестирање наше нулте хипотезе користићемо тест количника веродостојности.

1.2.1 Метод максималне веродостојности

Претпоставимо да ε има $N(0, \sigma^2 I_n)$ расподелу. Тада је функција веродостојности

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(Y-\beta X)^T(Y-\beta X)}{2\sigma^2}}.$$

Одавде видимо да се оцена методом максималне веродостојности за β поклапа са оценом методом најмањих квадрата, односно $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY$. Слично, оцена за σ^2 је

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(Y - \hat{\beta}X)^T(Y - \hat{\beta}X)$$

У претходном одељку видели смо да ова оцена није непристрасна оцена за σ^2.

Максимална вредност функције веродостојности је тада

$$L(\hat{\beta}, \hat{\sigma^2}) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2n}} \sim \hat{\sigma}^{-n}$$

Како је $\hat{\beta}$ линеарна трансформација случајног вектора са нормалном расподелом, закључујемо да

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, (X^T X)^{-1}\sigma^2).$$

Да бисмо применили тест количника веродостојности неопходно је да нађемо оцену параметара уз услов $C\beta = \gamma$. Слично као у поставци проблема малопре, ово је еквивалентно са тражењем минимума $S(\beta) = \frac{(Y-\beta X)^T (Y-\beta X)}{n}$ уз услов $C\beta - \gamma = 0$. Лагранжова функција за решавање овог екстремалног проблема је

$$\mathcal{L}(\beta, a) = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) - a^T (C\beta - \gamma).$$

Систем нормлних једначина чије решење тражимо је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta}\mathcal{L}(\beta, a) &= -2X^T Y + 2X^T X\beta - C^T a^T = 0 \\
\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{L}(\beta, a) &= \gamma - C\beta = 0.
\end{aligned}$$

Добија се да је

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \hat{\beta} + (XX^T)^{-1} C^T [C(XX^T)^{-1} C^T]^{-1} (\gamma - C\hat{\beta}) \\
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{(Y - \hat{\beta}_0 X)^T (Y - \hat{\beta}_0 X)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\Big((Y - \hat{\beta}X)^T (Y - \hat{\beta}X) + (C\hat{\beta} - \gamma)^T [C(X^T X)^{-1} C^T]^{-1} (C\hat{\beta} - \gamma)\Big)
\end{aligned}$$

Максимална вредност функције веродостојности у овом случају је

$$L(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma^2}_0) \sim \hat{\sigma}_0^{-n}$$

Претпоставимо да је $H_1 : \beta X \neq \gamma$. Тада је количник веродостојности

$$\begin{aligned}
\lambda = \frac{\max\limits_{H_1} L(\beta, \sigma^2)}{\max\limits_{H_0} L(\beta, \sigma^2)} &= \frac{L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)}{L(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2)} = \Big(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\Big)^{\frac{n}{2}} \\
&= \Big(1 + \frac{(C\hat{\beta} - \gamma)^T [C(X^T X)^{-1} C^T]^{-1} (C\hat{\beta} - \gamma)}{e^T e}\Big)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Критична област за тестирање је $W = \{\lambda > c\}$.

Претпоставка о нормалном моделу је јако важна за коришћење теста количника веродстојности јер се тест статистика може приказати у погодном облику као количник две независне статистике са χ^2 расподелама.

Јасно је да $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}XY$ има нормалну $N(\beta, \sigma^2(X^TX)^{-1})$. Одавде закључујемо да

$$C\hat{\beta} - \gamma \sim N_m(C\beta - \gamma, \sigma^2 C(X^TX)^{-1}C^T).$$

Одавде, уколико важи H_0 закључујемо да

$$Q = (C\hat{\beta} - \gamma)^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}(C\hat{\beta} - \gamma) \sim \sigma^2\chi^2_m.$$

Приметимо да се, уколико важи H_0, Q може приказати у облику

$$\begin{aligned}
Q &= (C\hat{\beta} - C\beta)^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}(C\hat{\beta} - C\beta) \\
&= (C(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon)^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}C(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon \\
&= \varepsilon^T X(X^TX)^{-1}C^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}C(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon \\
&= \varepsilon^T P\varepsilon,
\end{aligned}$$

где је $P = X(X^TX)^{-1}C^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}C(X^TX)^{-1}X^T$.

Даље, применом Кохранове теореме добијамо да

$$e^Te = SSE = \varepsilon^T M\varepsilon \sim \sigma^2\chi^2_{n-p-1}$$

Да бисмо нашли расподелу тест статистике потребно је још да покажемо да је $PM = 0$ и применимо теорему 0.4.3. Из једнакости $X^TM = 0$ добијамо $PM = 0$ и закључујемо да су бројилац и имеилац у тест статистици независне случајне величине па

$$\frac{\frac{Q}{m}}{\frac{e^Te}{n-p-1}} \sim F_{m,n-p-1}. \tag{1.2}$$

Пример 1.2.1. *Претпоставимо да тестирамо нулту хипотезу* $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots \beta_p = 0$ *против комплементарне хипотезе. Тада је*

$$L(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2) \sim \Big(\frac{SSTO}{n}\Big)^{-\frac{n}{2}}.$$

Одавде, је

$$\lambda = \Big(\frac{SSTO}{SSE}\Big)^{\frac{n}{2}} = \Big(1 + \frac{SSR}{SSE}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

Применом Кохранове теореме, или теореме (0.4.3) *добија се да*

$$\frac{\frac{SSR}{p}}{\frac{SSE}{n-p-1}} \sim F_{p,n-p-1}.$$

Пример 1.2.2. *У случају да желимо да тестирамо хипотезу да је* $\beta_k = 0$ *већ смо видели како да одаберемо матрицу* C. *Тада*

$$\frac{Q}{\frac{e^T e^T}{n-p-1}} \sim F_{1,n-p-1}.$$

У овом посебном случају овај тест са Студентовом тест статистиком коју ћемо представити у наредном поглављу.

1.2.2 Интервал поверења за β

Из особина нормалне расподеле и Кохранове теореме статистике, за $\hat{\sigma} = \frac{1}{n-p-1} e^T e$ је

$$\frac{(\hat{\beta}-\beta)^T X^T X(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{p+1} \qquad \frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p-1}$$

и независне су. Одавде је

$$\frac{(\hat{\beta}-\beta)^T X^T X(\hat{\beta}-\beta)}{(p+1)\hat{\sigma}^2} \sim F_{p+1,n-p-1}.$$

Зато интервали поверења представљају елипсоиде у више димензија.

Означимо са $V_k = [(X^T X)^{-1}]_{kk}$. Како су $Y - \hat{Y}$ и $\hat{\beta}$ некорелисани (у односу на X) онда је и $\hat{\sigma}^2$ (као функција од резидуала) некорелисано са $\hat{\beta}$ а самим тим и независно (због нормалности). $D(\hat{\beta}_k) = \sigma^2 V_k$. Због непристрасности оцене и нормалности

$$\frac{\hat{\beta}_k - \beta_k}{\sigma\sqrt{V_k}} \sim N(0,1)$$

Како $\frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ има χ^2_{n-p-1} онда

$$\frac{\hat{\beta}_k - \beta_k}{\hat{\sigma}\sqrt{V_k}} \sim t_{n-p-1}$$

Пример 1.2.3. *Посматра се зависност GPA чије вредности се налазе у интервалу [0,4] од вербалног дела $SAT-$а ($SATV$) и математичког дела ($SATM$). И на једном и на дргом тесту могуће је остварити од* 200 *до* 800 *поена. Подаци су приказани у следећој табели*

GPA	*3.95*	*3.84*	*3.68*	*3.59*	*3.57*	*3.49*	*3.47*	*3.40*	*3.08*
SATV	*740*	*760*	*660*	*760*	*760*	*660*	*710*	*710*	*570*
SATM	*790*	*710*	*750*	*740*	*700*	*670*	*730*	*790*	*760*

```
summary(lm(GPA~SAT+SATM))

Call: lm(formula = GPA~SAT4 + SATM)
Residuals:    Min       1Q       Median    3Q       Max
           -0.2055   -0.1368   -0.1090   0.1265   0.2585
Coefficients:
                Estimate    Std. Error   t value   Pr(> |t|)
(Intercept)     1.2220434   1.6127365    0.758     0.4773
SAT             0.0028666   0.0011339    2.528     0.0448 *
SATM            0.0004406   0.0017987    0.245     0.8146
---
Signif. codes:
0 ***      0.001 **      0.01 *      0.05 .      0.1    1
Residual standard error: 0.2038 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5158,
Adjusted R-squared: 0.3544
F-statistic: 3.196 on 2 and 6 DF, p-value: 0.1135
```

У R-у је тестирање нулте хипотезе да ли су сви коефицијенти модела уз предикторе нула је стандардна процедура и део уграђене функције lm. На основу табеле изнад можемо закључити да резултати на $SATM$ не утичу на GPA.

Лема 1.2.1 (Бонферонијеве неједнакости)**.** *Нека су $A_1, ..., A_k$ догађаји дефинисани на истом простору вероватноће. Тада је*

$$1 - P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{k} P(A_j^c)$$

Претпоставимо да догађај A_j одговара j-тој хипотези коју тестирамо. Из ове леме закључујемо да уколико желимо да ограничимо вероватноћу грешке прве врсте за неколико хипотеза које одједном тестирамо, довољно је да ограничимо вероватноћу грешке прве врсте, за сваку појединачну хипотезу, са $\frac{\alpha}{k}$.

Пример 1.2.4. *Желимо да направимо интервале поверења за линеарне комбинације коефицијената модела $a_1^T\beta,\ a_2^T\beta, ..., a_l^T\beta$. Један начин је да формирамо одговарајуће елипсоиде користећи статистику* (1.2). *С друге стране, $a_i^T(\hat{\beta}-\beta) \sim N(0, a_i^T(X^TX)^{-1}a_i\sigma^2)$, односно*

$$\frac{a_i^T(\hat{\beta}-\beta)}{\sqrt{a_i^T(X^TX)^{-1}a_i\hat{\sigma}^2}} \sim t_{n-p-1}$$

1.2.3 Интервали предвиђања

Нека је x_0 "тачка" у којој вршимо предвиђање. Тада је $\hat{Y}_0 = x_0^T\hat{\beta}$. Одавде је

$$E(\hat{Y}_0|X) = x_0^TE(\hat{\beta}|X) = x_0^T\beta$$
$$D(\hat{Y}_0|X) = x_0^T(X^TX)^{-1}x_0\sigma^2.$$

Из особина нормалне расподеле закључујемо да

$$\hat{Y}_0 \sim N(x_0^T\beta, x_0^T(X^TX)^{-1}x_0\sigma^2),$$

па резоновањем као у претходном поглављу закључујемо да

$$\frac{\hat{Y}_0 - x_0^T\beta}{\sqrt{x_0^T(X^TX)^{-1}x_0\hat{\sigma}^2}} \sim t_{n-p-1}.$$

Сада се лако могу конструисати интервали поверења за очекивану предвиђену вредност у тачки x_0.

Нека Y_0 вредност у x_0. Тада је $Y_0 = x_0\beta + \varepsilon_0$, где је ε_0 независно од $Y_1, ..., Y_n$. Одавде је

$$E(\hat{Y}_0 - Y_0) = x_0\beta - x_0\beta = 0$$
$$D(\hat{Y}_0 - Y_0) = D(\hat{Y}_0) + D(Y_0) = \sigma^2(1 + x_0^T(X^TX)^{-1}x_0).$$

Одавде закључујемо да

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sqrt{\sigma^2(1 + x_0^T(X^TX)^{-1}x_0)}} \sim N(0,1),$$

одакле је

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + x_0^T(X^TX)^{-1}x_0)}} \sim t_{n-1-p}.$$

1.3 Категорички предиктори

Посматрајмо следећи линеарни модел

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2...n \tag{1.3}$$

$$X_{i1} = \begin{cases} 1, & \text{за } i = 1, ..., n_1 \\ 0, & \text{за } i = n_1 + 1, ..., n \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

где $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Означимо се $\mu_1 = \beta_0$ и $\mu_2 = \beta_0 + \beta_1$. Тада модел (1.3) се може представити у облику

$$Y_i = \begin{cases} \mu_1 + \varepsilon_i, & \text{за } i = 1, ..., n_1 \\ \mu_2 + \varepsilon_i, & \text{за } i = n_1 + 1, ..., n \end{cases}$$

Тестирање нулте химпотезе $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ је еквивалентно тестирању хипотезе $H_0 : \beta_1 = 0$

Пример 1.3.1. *Услуге јавног превоза у једној држави пружају државне агенције, али и приватне, како профитне тако и непрофитне агенције. У циљу утврђивања да ли се квалитет услуге коју оружају ова три типа агенција, разликује, направљена је одговарајућа скала којом се мери квалитет услуге и извршено анкетирање. Резултати су следећи:*

Државне агенције: 61.59 79.19 68.89 72.16 70.66 63.17 53.66 68.69 68.75 60.52 68.01 73.06 55.93 74.88 62.55 69.90 66.61 63.80 45.83 64.48 58.11 73.24 73.24 69.94

Приватне непрофитне агенције: 76.77, 68.33, 72.29, 69.48, 59.26, 67.16, 71.83, 64.63, 78.31, 61.48

Приватне агенције: 71.77,82.92, 72.26, 71.75, 67.95, 71.90

Увели смо помоћне променљиве L_2 *и* L_2 *тако да пар* $(L_1, L_2) = (0, 0)$ *означава државне агенције,* $(0, 1)$ *приватне непрофитне агенције а пар* $(1, 1)$ *приватне профитне агенције.*

```
Call: lm(formula = skala ~L1 + L2)
Residuals:
    Min        1Q      Median     3Q       Max
 -20.2892  -3.7579  -0.0666  4.0008  13.0708
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> |t|)	
(Intercept)	66.119	1.421	46.524	<2e-16	***
L1	4.138	3.595	1.151	0.257	
L2	2.835	2.621	1.082	0.286	

—

*Signif. codes: 0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1 1*

Residual standard error: 6.962 on 37 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.1219, Adjusted R-squared: 0.0744

F-statistic: 2.567 on 2 and 37 DF, p-value: 0.09033

Видимо да са нивоом значајности 0.05 *не можемо одбацити хипотезу да су коефицијенти* β_1 *и* β_2 *безначајни. У моделу је просечна вредност оцене за државне агенције узета за референти ниво, па* 66.119 *представља просечну вредност оцене државних агенција. Повећања оцене (у односу на референти ниво) за* 4.138 *за приватној непрофитне агенције и* 4.138 + 2.835 *за приватне профитне агенције, нису значајна.*

Наравно, у моделу поред категоричких могу постојати и нумеричке променљиве.

Подаци су преузети из књиге [4] па ћемо задржати оригиналне ознаке.

Ознака	Значење
Price	цена куће у хиљадама долара
BDR	број спаваћих соба
FLR	површина спрата
FP	број камина
RMS	број соба
ST	број олујних прозора
LOT	удаљеност од пута у стопама
TAX	годишње таксе
BTH	број купатила
CON	од цигле (1), остало (0)
GAR	0-нема, m уколико је за m аутомобила
CDN	да ли су потребна додатна улагања (1, за да)
L1	1 уколико је у зони A , 0 иначе
L2	1 уколико је у зони B, 0 иначе

Подаци су сакупљени о кућама које се налазе у 3 зоне A, B, C па је припадност зони кодирана са две помоћне променљиве $L1$ и $L2$.

Пример 1.3.2. *Направићемо модел у коме су сви параметри једне некретнине укључени у цену.*

	Price	BDR	FLR	FP	RMS	ST	LOT	TAX	BTH	CON	GAR	CDN	L1	L2
1	53.00	2.00	967.00	0.00	5.00	0.00	39.00	652.00	1.50	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00
2	55.00	2.00	815.00	1.00	5.00	0.00	33.00	1000.00	1.00	1.00	2.00	1.00	1.00	0.00
3	56.00	3.00	900.00	0.00	5.00	1.00	35.00	897.00	1.50	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00
4	58.00	3.00	1007.00	0.00	6.00	1.00	24.00	964.00	1.50	0.00	2.00	0.00	1.00	0.00
5	64.00	3.00	1100.00	1.00	7.00	0.00	50.00	1099.00	1.50	1.00	1.50	0.00	1.00	0.00
6	44.00	4.00	897.00	0.00	7.00	0.00	25.00	960.00	2.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00
7	49.00	5.00	1400.00	0.00	8.00	0.00	30.00	678.00	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00
8	70.00	3.00	2261.00	0.00	6.00	0.00	29.00	2700.00	1.00	0.00	2.00	0.00	1.00	0.00
9	72.00	4.00	1290.00	0.00	8.00	1.00	33.00	800.00	1.50	1.00	1.50	0.00	1.00	0.00
10	82.00	4.00	2104.00	0.00	9.00	0.00	40.00	1038.00	2.50	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00
11	85.00	8.00	2240.00	1.00	12.00	1.00	50.00	1200.00	3.00	0.00	2.00	0.00	1.00	0.00
12	45.00	2.00	641.00	0.00	5.00	0.00	25.00	860.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
13	47.00	3.00	862.00	0.00	6.00	0.00	25.00	600.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
14	49.00	4.00	1043.00	0.00	7.00	0.00	30.00	676.00	1.50	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
15	56.00	4.00	1325.00	0.00	8.00	0.00	50.00	1287.00	1.50	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
16	60.00	2.00	782.00	0.00	5.00	1.00	25.00	834.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
17	62.00	3.00	1126.00	0.00	7.00	1.00	30.00	734.00	2.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
18	64.00	4.00	1226.00	0.00	8.00	0.00	37.00	551.00	2.00	0.00	2.00	0.00	0.00	1.00
19	66.00	2.00	929.00	1.00	5.00	0.00	30.00	1355.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00
20	35.00	4.00	1137.00	0.00	7.00	0.00	25.00	561.00	1.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	38.00	3.00	743.00	0.00	6.00	0.00	25.00	489.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22	43.00	3.00	596.00	0.00	5.00	0.00	50.00	752.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	46.00	2.00	803.00	0.00	5.00	0.00	27.00	774.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
24	46.00	2.00	696.00	0.00	4.00	0.00	30.00	440.00	2.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
25	50.00	2.00	691.00	0.00	6.00	0.00	30.00	549.00	1.00	0.00	2.00	1.00	0.00	0.00
26	65.00	3.00	1023.00	0.00	7.00	1.00	30.00	900.00	2.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00

```
m.1=lm(Price ~BDR+FLR+FP+RMS+ST+LOT+BTH+TAX+CON+GAR+
CDN+L1+L2)
summary(m.1)

Call:
lm(formula = Price ~ BDR + FLR + FP + RMS + ST + LOT + BTH +
TAX + CON + GAR + CDN + L1 + L2)

Residuals:
    Min       1Q    Median      3Q      Max
 -6.3317  -1.9256   0.0523   2.0601   5.2610

Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)   17.3117      7.1741     2.41    0.0327  *
        BDR   -5.7705      2.3091    -2.50    0.0280  *
        FLR    0.0199      0.0063     3.13    0.0086  **
         FP    4.3614      3.6952     1.18    0.2608
        RMS    2.2832      1.8434     1.24    0.2392
         ST    9.7552      2.3916     4.08    0.0015  **
        LOT    0.3223      0.1312     2.46    0.0302  *
        BTH    1.3046      2.7558     0.47    0.6444
        TAX   -0.0026      0.0049    -0.54    0.5999
        CON    2.6105      2.7138     0.96    0.3551
        GAR    3.8306      1.6615     2.31    0.0398  *
        CDN   -0.7758      2.6041    -0.30    0.7709
         L1    1.7716      3.0257     0.59    0.5691
         L2    6.8935      2.9073     2.37    0.0353  *
  - - -
Signif. codes: 0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Residual standard error: 4.435 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9404, Adjusted R-squared: 0.8758
F-statistic: 14.56 on 13 and 12 DF, p-value: 2.227e-05
```

Видимо да неки од атрибута некретнине стварно утичу на цену исте. Али, уколико желимо да видимо како утиче зона у којој је кућа смештена, то не можемо закључити из ове табеле. Требало би фора-мално тестирати нулту хипотезу да су коефицијенти уз L_1 *и* L_2 *нула против алтернативе да је један од коефицијената различит од нуле. За то можемо користити тест статистику* (1.2). *За то тестирање користићемо функцију* anova *чији су аргументи два модела, први код* *кога су коефицијенти L_1 и L_2 различити од нуле и други у коме то нису (у нашем случају модел m.1).*

```
m.2=lm(Price BDR+FLR+FP+RMS+ST+LOT+BTH+TAX+CON+GAR+
CDN,data=E2.2)
anova(m.1,m.2)


Analysis of Variance Table

Model 1: Price~ BDR + FLR + FP + RMS + ST + LOT + BTH + TAX
+ CON + GAR + CDN + L1 + L2
Model 2: Price~BDR + FLR + FP + RMS + ST + LOT + BTH + TAX +
CON + GAR + CDN

     Res.Df    RSS   Df  Sum of Sq     F   Pr(>F)
1        14  359.02
2        12  236.00   2     123.02  3.13   0.0807
```

На основу ових резултата закључујемо да са тестом нивоа значајности 0.05 нећемо одбацити нулту хипотезу, да су повећања унутар различитих зона значајна.

1.4 Провера коректности модела

На крају сваког моделирања треба испитати да ли су претпоставке модела задовољене. Један део модела је детерминистички а други чине случајне грешке за које смо претпоставили да важе неки услови. Сада те услове треба проверити. Подсетимо се, претпоставили смо да су случајне грешке међусобно некорелисане, центриране и једнако расподељене са $N(0, \sigma^2)$ расподелом. Саставни део анализе модела је и да се утврди да ли су неке тачке *атлајери*-тачке које не припадају моделу и да ли те тачке утичу на модел. Тиме ћемо се бавити у овом поглављу.

1.4.1 Аутлајери, тежинске и утицајне тачке

Показали смо да је $e = (I - H)\varepsilon$, односно $Cov(e) = (I - H)\sigma^2$. Јасно је да је $D(e_i) = \sigma^2(1 - h_i)$, где је $h_i = H_{ii}$. Број h_i се назаива моћ, тежина (*leverage*) тачке. Што је веће h_i дисперзија i-тог резидуала ће бити мања па ће права бити ближа Y_i. Може се показати да је $h_i = x_i^T (XX^T)^{-1} x_i$.

Приметимо још и следеће, што је h_i мање реиздуали ће се понашати више као стварна грешка. Тачке за које је $h_i > \frac{2(p+1)}{n}$ називамо *тежинским* тачкама и испитујемо њихов утицај на одређивање параметара модела.

Поред овог правила за идентификовање тежинских тачкама, у случају да имамо узорак знатно већи од броја непознатих параметара, можемо усвојити и следеће: тачке за које је $h_i > 0.5$ сматрамо да имају велику тежину, а оне за које је $h_i \in [0.2, 0.5]$ средње тежинским тачкама. Уместо резидула често ћемо посматрати стандардизоване резидуале (internally studentized)

$$e_i^s = \frac{e_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_i}},$$

као и студентизоване резидуале (externally studentized) дефинисане са

$$e_i^\star = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1-h_i}},$$

где је $\hat{\sigma}_{(i)}$ непристрасна оцена дисперзије када се из модела избаци i-та обзервација.

Може се показати да за следеће мере утицаја важи

$$DFBETA_i = \hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)} = \frac{(XX^T)^{-1}x_i e_i}{1-h_i}$$
$$DFFIT_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i,(i)} = \frac{h_i e_i}{1-h_i},$$

при чему је $\hat{y}_{i,(i)}$ је прогноза i-те вредности када је из модела искључена i-та обзервација.

Тада су резудали модела у i-тој обзервацији (уочимо да се овде ради о грешци прдвиђања)

$$e_{i,(i)} = y_i - \hat{y}_{i,(i)} = \frac{e_i}{1-h_i}$$
$$D(e_{i,(i)}) = \frac{D(e_i)}{(1-h_i)^2} = \frac{\sigma^2}{1-h_i}.$$

Приметимо да што је h_i веће, $e_{i,(i)}$ ће бити веће у односу на полазни резидуал e_i. Дисперзија овог резидуала се може приказати и у облику

$$D(e_{i,(i)}) = \sigma^2(1 + X_i^T(X_{(i)}X_{(i)})^{-1}X_i),$$

где је $X_{(i)}$ дизајн матрица без i-те обзервације. Сада важи

$$\frac{e_{i,(i)}}{\frac{\hat{\sigma}_{(i)}}{\sqrt{1-h_i}}} = \frac{\frac{e_i}{1-h_i}}{\frac{\hat{\sigma}_{(i)}}{\sqrt{1-h_i}}} = e_i^\star \sim t_{n-p-2}$$

Како је

$$(n-p-1)\hat{\sigma}^2 = (n-p-2)\hat{\sigma}^2_{(i)} + \frac{e_i}{1-h_i},$$

Екстерно студентизоване резидуале можемо приказати у облику

$$e_i^\star = e_i\Big(\frac{n-p-2}{\hat{\sigma}^2(1-h_i)(n-p-1)-e_i^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

што нам омогућује да их израчунамо, не радећи регресију без изостављене обзервације, поново.

Сада се може дефинисати једноставан тест за одређивање аутлајера заснован на томе да екстерно студентизоване резудале карактерише велика апосолутна вредност. Наиме, тест статистика ће нам бити баш $e_i^\star$ која, ако је модел коректан, тј. ако i-та обзервација се уклапа у модел чак и кад је изоставимо док формирамо исти, има Студентову t_{n-p-2} расподелу. Уколико тестирамо k тачака, треба критичну област да смањимо тако да је вероватноћа сваке $\frac{\alpha}{k}$.

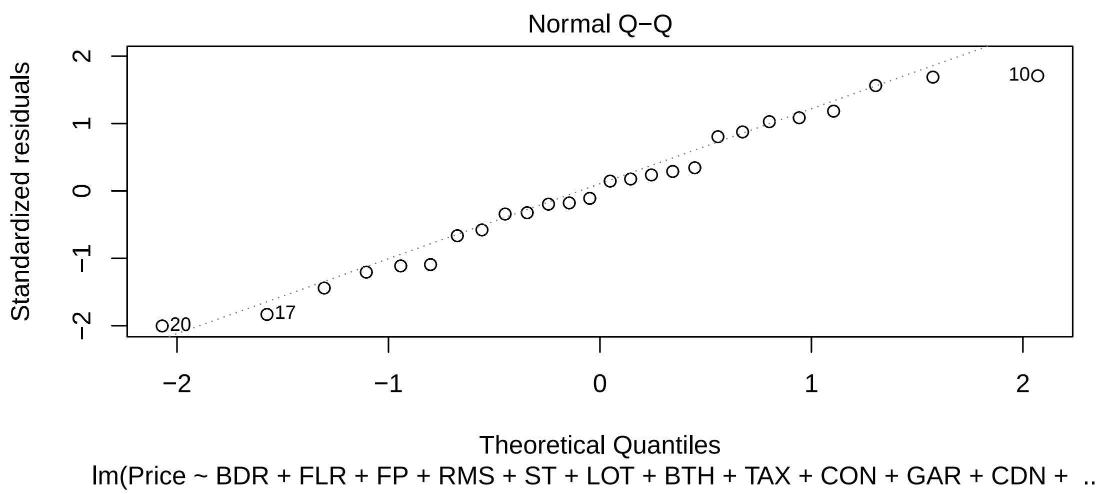
Утицајне тачке су оне чијим изостављањем би се модел значајно променио. Једна од мера утицаја је и Куково растојање. Оно је дефинисано са

$$D_i = \frac{(\hat{\beta}-\hat{\beta}_{(i)})^T X^T X(\hat{\beta}-\hat{\beta}_{(i)})}{(p+1)\hat{\sigma}^2} = \frac{(\hat{Y}_i-\hat{Y}_{(i)})^T(\hat{Y}_i-\hat{Y}_{(i)})}{(p+1)\hat{\sigma}^2} = \frac{e_i^2 h_i}{(p+1)\hat{\sigma}^2(1-h_i)^2}$$
$$= \frac{(e_i^s)^2}{p+1}\cdot\frac{h_i}{1-h_i}.$$

Видимо да је у ово растојање инкорпорирано и одступање од модела и тежина сваке тачке. Договор је да се тачке за које је Кукокво растојање веће од 1 сматрају утицајним, али да треба обратити пажњу и на оне са растојањем већем од 0.5. До закључка се може доћи поређењем са квантилима Фишерове $F_{p+1,n-p-1}$. Све што је веће од 50% квантила се може сматрати великим растојањем.

1.4.2 Проверавање номалности

-*QQplot*



-тестови нормалности (неки од тестова заснован на емпиријској функцији расподеле: Колмогоров-Смирнов, Андерсон-Дарлинг (AD)), Крамер-вон Мисесов (CM) итд, Шапиро Вилк (SW)...) Водити рачуна да су неки од тестова дизајнирани за просте хипотезе па уколико се користе за сложене хипотезе треба прво оценити расподелу под нултом хипотезом.

Укратко ћемо приказати неке тестове. Претпостављамо да су сви тестови предвиђени за прост случајан узорак обима n.

KS **тест** Тест статистика је $KS = \sup_t |F_n(t) - F_0(t)|$. Критична област за тестирање је $\{KS > c\}$.

AD **тест** Тест статистика је $AD = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x)-F_0(x))^2}{F_0(x)(1-F_0(x))}dx$. Критична област за тестирање је $\{AD > c\}$.

CM **тест** Тест статистика је $CM = n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x) - F_0(x))^2dx$. Критична област за тестирање је $\{CM > c\}$.

SW **тест** Тест статистика је $W = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}}{s}$ где су a_i очекиване вредности статистика поретка стандардне нормалне расподеле. Критична област за тестирање је $\{W < c\}$.

Пример 1.4.1. *Тестираћемо да ли резидуали имају приближно нормалну расподелу.*

```
shapiro.test(m.1$residuals)


Shapiro-Wilk normality test
data: m.1$residuals
W = 0.98193, p-value = 0.9119
```

Тестираћемо стандардизоване резидуале модела $m.1$.

```
standardizovaniReziduali=m.1$residuals/sqrt(1-
influence(m.1)$hat)/summary(m.1)$sig

ks.test(standardizovaniReziduali,"pnorm",0,1)

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: standardizovaniReziduali
D = 0.097172, p-value = 0.9469
alternative hypothesis: two-sided


goftest::ad.test(standardizovaniReziduali,"pnorm",0,1)

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: Normal distribution
data: standardizovaniReziduali
An = 0.27609, p-value = 0.9546


goftest:: cvm.test(standardizovaniReziduali,"pnorm",0,1)

Cramer-von Mises test of goodness-of-fit
Null hypothesis: Normal distribution
data: standardizovaniReziduali
omega2 = 0.034875, p-value = 0.9603


shapiro.test(standardizovaniReziduali)


Shapiro-Wilk normality test

data: standardizovaniReziduali
W = 0.97035, p-value = 0.6323
```

Уколико је модел коректан стандардизовани резидуали не би требало да буду корелисани и сви би требало да имају исту диспрезију. Под претпоставком да је наша претпоставка о моделу тачна стандардизовани резидуали ће имати t_{n-p-1}.

У случају да нормалност није задовољена, под неким условима, тестирања се могу радити као и до сада.

1.4.3 Провера хомоскедастичности

-Најједноставније је да се дође до закључка из графика оцењене вредности-резидуали. Постоји неколико статистичких тестова за проверу хомоскедастичности али се на томе нећемо задржавати. Приказаћемо само Бројш-Паганов тест.

Главна идеја која стоји иза овог теста је успостављање линеране везе између квадрата оцењених резидуала e_i^2 и предиктора. Онда нулта хопотеза хомоскедастичности постаје хипотеза да су сви коефицијенти уз предикторе једнаки нула. Алтернативна хипотеза је да је бар један коефицијент уз предикторе различит од нуле.

Тест статистика је $T = nR^2$ где је R^2 коефицијент детерминације за тај помоћни модел. Показано је да ако важи нулта хипотеза онда T има приближно χ_p^2. Главна мана овог теста је што се ова расподела мења уколико резидуали нису нормално расподељени. Зато је Кроенкер (у [2]) предложио модификацију овог теста за коју је показао да је робусна на расподелу резидуала. Управо та верзија је подразумевана у R-овској функцији bptest из пакета lmtest.

Када се утврди хетероскедастичност можемо урадити две ствари. Прва, када дисперзија зависне промењливе зависи од очекиване вредности, је да извршемо неку трасформацију зависне промењливе. Друга могућност је да се приступи тежинској регресији.

Трансформације промењливих

Нека је $f(y)$ трансформација зависне промењливе. Означимо са $m = E(Y)$. Тада је

$$\begin{aligned} f(Y) &\approx f(m) + (Y-m)f'(m) \\ D(f(Y)) &\approx (f'(m))^2 D(Y). \end{aligned}$$

Да би стабилизовали дисперзију потребно је да је

$$f'(m) = \frac{c}{\sqrt{D(y)}}.$$

Ако је $D(Y) \sim m$ онда је $f(y) = \sqrt{y}$. Ако је $D(Y) \sim m^2$ онда је $f(y) = \log y$.

О каквој се зависности дисперзије од очекивања тиче можемо видети са графика $|e| \sim \hat{Y}$.

1.4.4 Тежинска регресија

Претпоставимо да је $D(Y_i) = \frac{\sigma^2}{w_i}$ где је w_i позната константа. Тада ћемо посматрати модел

$$Y_i\sqrt{w_i} = \beta_0\sqrt{w_i} + \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\sqrt{w_i} + \varepsilon_i\sqrt{w_i}, \quad j = 1, 2..., n.$$

Поставља се питање како одабрати одговарајуће тежине. Уколико је $D(\varepsilon_i) \sim x_i^2$ онда је најбоље узети да је $w_i = \frac{1}{x_i}$. Уколико је за Y_i извршено n_i мерења $D(Y_i) = \frac{\sigma^2}{n_i}$ одакле је $w_i = n_i$.

1.4.5 Провера некорелисаности

До сада смо увек претпостављали да су грешке модела некорелисане. То би требало и проверити. Дурбин-Вотсонов тест се често користи за тестирање некорелисаности. Тест статистика је

$$D = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Уколико су резидуали некорелисани тест статистика има приближну вредност 2. Вредности између 2 и 4 упућују на негативну корелисаност, а вредности између 0 и 2 на позитивну корелисаност.

Генерализовани метод најмањих квадрата

Генерализовани метод најмањих квадрата је заправо уопштење тежинске регресије.

Претпоставимо да је $Cov(e) = \Sigma\sigma^2$ где је Σ симетрична, позитивно дефинитна матрица, тада је оцена за β генерализованом методом најмањих квадрата дата са

$$\hat{\beta}_{GL} = (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}Y$$

Даље, постоји ортогонална матрица M таква да је $\Sigma = MDM^T$ где је D дијагонална матрица. Нека је $S = M\sqrt{D}$. Тада је

$$\begin{aligned} S^{-1}Y &= S^{-1}X\beta + S^{-1}\varepsilon \\ D(S^{-1}\varepsilon) &= \sigma^2 I \end{aligned}$$

Када је Σ непознато постоје разне методе за оцену исте. О томе се може више сазнати у [4].

1.5 Још неке трансформације зависне промењљиве и предиктора

1.5.1 Трансформације зависне промењљиве

Бокс Коксова траснормација

Поред оних које смо напоменули, за стабилизацију дсиперзије, вероватно су највише коришћене Бокс-Коксове трансформације.

$$Y_i^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Y_i^\lambda - 1}{\lambda} & \text{за } \lambda \neq 0 \\ \log Y_i & \text{за } \lambda = 0. \end{cases}$$

Поставља се питање како да одаберемо λ. Оценићемо га методом максималне веродостојности, под претпоставком да $Y_i^{(\lambda)}$ има нормалну расподелу. Функција веродостојности је

$$L(\lambda, \sigma|Y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{(Y^{(\lambda)} - X\beta)^T (Y^{(\lambda)} - X\beta)}{2\sigma^2}} \Big(\prod_{i=1}^{n} Y_i\Big)^{\lambda - 1}.$$

$$\log L(\lambda, \sigma|Y) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{(Y^{(\lambda)} - X\beta)^T (Y^{(\lambda)} - X\beta)}{2\sigma^2} + (\lambda - 1)(\prod_{i=1}^{n} Y_i) \tag{1.6}$$

Оцене за β и σ^2 се добијају као и до сада, а λ је она вредност која максимизира функцију

$$-\frac{(Y^{(\lambda)} - X\beta)^T (Y^{(\lambda)} - X\beta)}{2\sigma^2} + (\lambda - 1)(\prod_{i=1}^{n} Y_i).$$

С обзиром на то да модел ипак треба да буде интерпретабилан, треба узети негу смислену вредност за λ, а опет "довољно блиску" са оцењеном вредности. Коришћењем Вилксове теореме добија се да $2(\log L(\hat{\lambda}) - \log L(\lambda_0))$ има граничну χ_1^2 расподелу.

Јасно је да се ова трансформација може примењивати само уколико је зависна променљива позитивна. Уколико то није случај, а знамо да је $Y_i > -a$, за неко $a > 0$ онда се може применити трансформација

$$Y_i^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(Y_i+a)^\lambda - 1}{\lambda} & \text{за } \lambda \neq 0 \\ \log(Y_i + a) & \text{за } \lambda = 0. \end{cases}$$

Уколико је a непознато може се одредити методом максималне веродостојности максимизирањем функције (1.6). Тада $2(\log L(\hat{\lambda}) - \log L(\lambda_0))$ има граничну χ_2^2 расподелу.

Мултипликативни модели

У економији се често срећу модели код којих је случајна грешка мултипликативна, односно

$$Y_i = E(Y_i|X)\varepsilon_i, \quad i = 1, 2..., n, \tag{1.7}$$

где је

$$E(Y_i|X) = A \prod_{j=1}^{p} X_{ij}^{\beta_j} \quad i = 1, 2..., n.$$

Одавде је природна претпоставка да су случајне грешке независне од предиктора и да је $E(\varepsilon_i) = 1$. Логаритмовањем (1.7) добијамо модел

$$\log(Y_i) = \log A + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(X_{ij}) + \log(\varepsilon_i), \quad i = 1, 2..., n. \tag{1.8}$$

Добили смо класичан линеарни модел. Међутим из претпоставке $E\varepsilon_i = 1$ не можемо закључити да је $E(\log(\varepsilon_i)) = 0$. Шта више, то често не важи. Уколико $\log(\varepsilon_i)$ има $N(m, \sigma^2)$ расподелу $E(\varepsilon_i) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$. Одавде добијамо да је $E(\log(\varepsilon_i)) = m = -\frac{\sigma^2}{2}$. Зато је модел (1.8) боље приказати у облику

$$\log(Y_i) = \big(\log A - \frac{\sigma^2}{2}\big) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(X_{ij}) + \log(\varepsilon_i) + \frac{\sigma^2}{2}, \quad i = 1, 2..., n.$$

Како је $D\big(\log(\varepsilon_i) + \frac{\sigma^2}{2}\big) = D(\log(\varepsilon_i)) = \sigma^2$, услови теореме Гаус-Маркова су задовољени тако да се параметри $\beta_1, ..., \beta_p, \sigma^2$ и $\beta_0 = \log A - \frac{\sigma^2}{2}$ могу оценити методом најмањих квадрата.

1.6 Полиномијална регресија

Полиномни регресиони модели су једна врста уопштених линеарних модела. Код ових модела регресиона функција садржи квадрате, или веће степене, предиктора. Један пример таквог модела би био следећи:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \varepsilon.$$

Наравно, не мора бити укључен само један предиктор већ и више њих, као и чланови интеракције између њих, на пример

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_1 X_2 + \beta_4 X_2 + \beta_5 X_2^2 + \varepsilon.$$

Треба имати у виду да увек треба одабрати полином што мањег степена. Постоје две стратегије, почети од полинома малог степена па додавати чланове вишег реда док се не добију "статистички беззначајни коефицијенти", или кренути од полинома веће степена па смањивати док се не добије значајан коефицијент уз предиктор(е) највеће степена.

Мане ове врсте регресије:

1. Број променљивих значајно расте за повећавањем степена полинома.
2. Екстраполација није добра.
3. Матрица $X^T X$ постаје "заражена" са повећавањем степена полинома, односно рачунање инверза матрице није поуздано. О томе ће бити више речи у наредном поглављу.
4. Оцене коефицијената могу бити веома корелисане.

Неки од проблема, посебно корелисаност оцена, се могу решити центрирањем предиктора, тј. када се у модел, уместо $X_1, .., X_p$ уврсте центриране променљиве $X_1 - \bar{X}_1, .., X_p - \bar{X}_p$.

1.7 Мултиколинеарност

До сада само претпостављали да је дизајн матрица максималног ранга, тј. да су сви предиктори линеарно независни. Наравно, у пракси се то увек не догађа. Често је да између њих не постоји баш линеарна зависност али су веома корелисани. У ове две ситуације кажемо да тада постоји проблем мултиколинеарности. Неки од разлога због ког се то дешава су следећи:

- **Превише предиктора у моделу (више од обзервација).** Овај проблем се јавља често у медицинским истраживањима у којима има премало пацијената у истраживању.

- **Непрецизна формулација модела.** Беспотребно убацивање већих степена предиктора или сабирака који се односе на њихову интеракцију. На пример, уколико имамо два предиктора X_1 и X_2 можда је $X_1 X_2$ непотребно убацити у модел.

- **Убацивање у модел предиктора између којих природно постоји линеарна веза.** На пример, убацити у модел предикторе БРУТО плата, НЕТО плата и ТАРА плата.

- **Узорак на коме се врше обзервације је условљен неким ограничењима у популацији.** Узорковање вршимо из "потпопулације" на којој су предиктори веома корелисани.

Ако између предиктора постоји линеарна зависност, матрица $X^T X$ није инвертибилна и онда оцена за β није јединствена. У овом поглављу видећемо да је такву ситуацију лако детектовати, док је то код предиктора код којих постоји приближна линеарна зависност знатно теже. Велике дисперзије оцена често су један од индикатора приближне мултиколинеарности. Због тога се може десити "лажно" прихватање нулте хипотезе да коефицијенти уз предикторе нису значајни. Такође, очекује се да се, уколико се неки податак само мало промени, добију знатно различите оцене коефицијената.

Најчешћи показатељ мултиколинеарности је фактор инфлације дисперзије *(variance inflation factor)* $VIF_j = \frac{1}{TOL_j}$, где је $TOL_j = 1 - R_j^2$ толеранција, а R_j^2 коефицијент детерминације модела у коме је зависна променљива X_j а независне све остале. Јасно је да вредност VIF_j-а блиска јединици говори да X_j није у линеарној вези са осталим предикторима. Сматра се да проблем мултиколинеарности постоји уколико је $VIF_j > 5$. Једно решење проблема је да се избаце неки предиктори, али се ту може направити грешка приликом њиховог избора.

1.8 Анализа главних компоненти

Проблем који се јавља у интерпретацији модела последица је његове осетљивости на различите мерне скале полазних предиктора. Најједноставнији пример био би кад би нпр. X_1 била редовна примања у динарима, а X_2 додатна месечна примања у хиљадама динара. Мерне јединице, односно скала, свакако утичу на дисперзију па се може десити да један предиктор доминирати првом главном компонентом. Овај проблем се може решити стандардизацијом модела, када се коваријациона матрица поклапа са корелационом матрицом. Дакле стандардизован модел се може представити у облику: $S_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sqrt{(n-1)\bar{S}_i^2}}$, за $i = 1, 2, ..., p$ и $Y_{(s)} = Y - \bar{Y}$.

У даљем тексту претпостављамо да је модел стандардизован, тј. да се дизајн матрица X састоји од стандардизованих предиктора (можемо претпоставити и да нема слободног члана јер смо показали да се добија управо такав модел ако стандардизујемо и зависну променљиву.).

Један од начина да решимо проблем мултиколинеарности је да избацмо неке променљиве. Идеја је да се полазни скуп предиктора замени неким њиховим линеарним комбинацијама ($k \leq p$) који садрже скоро исту информацију као полазани скуп. Нека је $Z = XA$ линеарна трансформација предиктора, $Z_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{p1}X_p$ итд. Тада је $D(Z_i) = a_i^T \Sigma a_i$. Без умањења оштости можемо претпоставити да је максимална дисперзија, уз услов да је $|a_i| = 1$ баш $D(Z_1)$. Z_1 ћемо звати *прва главна компонента.* Без умањења оштости можемо претпоставити да је a_2 вектор за који је $|a_2| = 1$, $a_2 X_2$ је ортогонално са Z_1 и $a_2^T \Sigma a_2$ и $a_2^T \Sigma a_2$ је максимално могуће. $Z_2 = a_2^T X$ зваћемо *другом главном компонентом.* Поступак понављамо, при чему је свака од наредних главних компоненти ортогонална на све претходне.

Лема 1.8.1. *Нека је Σ коваријациона матрица случајног вектора X. Нека су $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdot \geq \lambda_p \geq 0$ њене сопствене вредности. Тада је i-та главна компонента дата са $Z_i = v_i^T X$, за $i = 1, 2, ..., p$, где је v_i i-ти сопствени вектор.*

Приметимо да је тада $D(Z_i) = \lambda_i$, као и да је за $i \neq j$ Z_i ортогонално на Z_j, $(Cov(Z) = V^T \Sigma V = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_p) = D_\lambda)$.

Лема 1.8.2. *Нека је $Z = V^T X$. Тада је*

$$\sum_{i=1}^{p} D(X_i) = \sum_{i=1}^{p} D(Z_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.$$

Доказ. Како је $D_\lambda = V^T \Sigma V$ закључујемо да је $\sum_{i=1}^{p} D(Z_i) = tr(D_\lambda) = tr(V^T \Sigma V) = tr(\Sigma)$.

□

Последица ове леме је да ротирањем координатног система нисмо променили укупан варијабилитет система, као и да је удео објашњеног вариабилитета i-том главном компонентом $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}$ за $i = 1, 2.., p$. Сматра се да треба задржати онолико компоненти колико је потребно да се објасни бар 80% целокупног варијабилитета.

Ради тумачења главних компоненти згодно је види какав утицај сваки од предиктора има на i-ту главну компоненту.

Лема 1.8.3. *Коефицијент корелације између Z_i и X_k је*

$$\rho_{Z_i,X_k} = \frac{v_{ik}\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{D(X_k)}}.$$

Даље, како је $\Sigma = VDV^T$ закључујемо и да је $D(X_k) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_{ik}^2$.

Стандардизован модел $Y = X\delta + \varepsilon$ се може приказати у облику $Y = Z\eta + \varepsilon$ где су Z главне компоненте добијене од стандардизованих предиктора.

Тада је оцена непознатог параметра η добијена методом најмањих квадрата дата са

$$\hat{\eta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y_{(s)} = D_\lambda^{-1} Z^T Y.$$

Одавде је $D(\eta_j) = \frac{\sigma^2}{\lambda_j}$. И одавде видимо да мале сопствене вредности узоркују велике дисперзије оцене коефицијената. Сада је природно да те главне компоненте избацимо. Пошто су све главне компоненте међусобно ортогоналне, избацивање једне од компоненти неће имати за последицу промену оцена других коефицијената, и оцене ће задржати особину непристрасности.

Приметимо још да $X\delta = XVV^T\delta = Z\eta$, где је $\eta = V^T\delta$, па су оцене полазног модела $\hat{\delta} = V^T D_\lambda^{-1} Z^T Y = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k v_k^T X^T Y$.

Нека је условни број (conditional number) $\eta_j = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_j}}$

Сматра се да вредности веће од 30 треба да упуте на даље испитивање тих обзервација.

Претпоставимо да смо r главних компоненти одлучили да задржимо, а преосталих $p-r$ да избацимо. Зато ћемо приказати главне компоненте приказати у облику $Z = \begin{pmatrix} Z_{(r)} \\ Z_{(p-r)} \end{pmatrix}$ где су Z_r задржане компоненте а Z_{r-p} избачене компоненте. Аналогно ћемо приказати и вектор коефицијената $\eta = (\eta_r^T \eta_{n-r}^T)^T$. Како је $Z = XV$ закључујемо да је $Z_{(r)} = XV_{(r)}$ ($V_{(r)}$ је матрица која се састоји од првих r колона матрице V, а $V_{(p-r)}$

матрица која се састоји од преосталих колона). Нови модел се може приказати у облику

$$Y = Z_{(r)}\eta_{(r)} + \tilde{\varepsilon} = Z\eta_r + \tilde{\varepsilon},$$

где је $\eta_r = \begin{pmatrix} \eta_{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$Y = X\delta_r + \tilde{\varepsilon},$$

где је $\delta_r = V_{(r)}\eta_{(r)}$.

Непознат параметар δ оценићемо са $V_{(r)}\hat{\eta}_r$. Испитајмо непристрасност оцене.

$$\begin{aligned} E(V_{(r)}\hat{\eta}_{(r)}) &= V_{(r)}E(\hat{\eta}_{(r)}) = V_r\eta_r = \begin{pmatrix} V_{(r)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{(r)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_{(r)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{(r)} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \delta = \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \delta - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{(p-r)} \end{pmatrix} \delta = \delta - V_{(p-r)}\eta_{n-r}. \end{aligned}$$

Избацивање главних компоеннти има за последицу пристрасност оцене за δ_r. Нека је $\hat{\delta}$ оцена за δ_r кад је $r = p$. Тада је

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\delta}) &= \sigma^2 V D^{-1} V^T = V \begin{pmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & D_{p-r}^{-1} \end{pmatrix} V^T \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \big(V_r D_r^{-1} V_r^T + V_{p-r} D_{p-r}^{-1} V_{p-r}^T\big) \end{aligned}$$

Први сабирак представља коваријацију оцењених параметара на основ r задржаних главних компоненти а остатак, део који је нестао елиминацијом компоненти које су биле "вишак".

Дакле, овим поступком смањујемо дисперзију оцене коефицијената али губимо непристрасност оцене.

1.9 Назубљена регресија

Енглески назив за ову регресију је *Ridge regression*.

Један од начина да се реши проблем мултиколинеарности је, као и у случају анализе главних компоненти, је да се непознат параметар δ оцени са

$$\hat{\delta}_c = (X^T X + cI)^{-1} X^T Y. \tag{1.9}$$

Константа c је мали позитиван број који утиче, с једне стране, на пристрасност оцене, а са друге повећава стабилност оцена. Овај метод се не мора применити на центриран модел. Може се показати да је

$$\hat{\delta}_c = (c(X^T X)^{-1} + I)^{-1}\hat{\delta}$$

Нађимо пристрасност оцене

$$E(\hat{\delta}_c) = (X^T X + cI)^{-1}(X^T X + cI - cI)\delta = \delta - c(XX^T + cI)^{-1}\delta.$$

Одговарајућа коваријациона матрица оцене је

$$Cov(\hat{\delta}_c) = (X^T X + cI)^{-1} X^T X (X^T X + cI)^{-1}\sigma^2.$$

Одавде се добија да је сума дисперзија појединачних компоненти

$$tr((X^T X + cI)^{-1} X^T X (X^T X + cI)^{-1}\sigma^2) = \sigma^2 tr((X^T X + cI)^{-2} X^T X)$$
$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (1 + c\lambda_i^{-1})^2}$$

Приметимо да је то мање од суме дисперзија појединачних компоненти оцене методом најмањих квадрата $\sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j}$.

ОДАБИР ПАРАМЕТРА c

Други начин да се ова оцена интерпретира је она заправо представља оцену најмањих квадрата када за параметре постоји горње ограничење, односно решава се проблем

$$\min_{\delta} (y_0 - S\delta)^T (y_0 - S\delta), \ \ ||\delta|| \leq C,$$

за неко C које се може изразити у функцији од c. Даље, тај проблем је еквивалентан тражењу минимума функције

$$(y_0 - S\delta)^T (y_0 - S\delta) + c||\delta|| \tag{1.10}$$

Важна особина ове методе је да се она **не може** користити за селекцију предиктора.

Напомена: Из израза (1.10) се може се показати да се ова оцена добија методом најмањих квадрата кад додамо у систем "вештачке предикторе" који не утичу на вредности зависне промењиве (односно за које је вредност зависне промењиве 0).

1.10 LASSO

Енглески назив за ову регресију је Least Absolute Shrinkage and Selection Operator.

За разлику од оцене назубљеном регресијом, овде је "казнена функција" је дата $L1$ нормом оцене коефицијената, односно

$$\hat{\delta}_l = \arg\min_{\delta}(y_0 - S\delta)^T(y_0 - S\delta) + c\sum_{j=1}^{p}|\delta_j|$$

Сада се може добити да је вредност неког од коефицијента 0, и то што је веће c више је таквих. Зато се овај метод **може** искористити за селекцију предиктора.

И код назубљене и ове регресије, c се најчешће бира коришћењем кросвалидације.

1.11 Задаци

1.1. Доказати теореме 1.1.2 и 1.1.3.

1.2. Посматрајмо моделе

$$Y = X\beta + \varepsilon$$
$$Y^\star = X^\star\beta + \varepsilon^\star,$$

где је

1. $E(\varepsilon) = 0$, $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$,
2. $Y^\star = \Gamma Y$, $X^\star = \Gamma X$, $\varepsilon^\star = \Gamma\varepsilon$.

Показати да се оцене коефицијената β на основу првог и другог модела, методом најмањих квадрата, поклапају, као и оцене дисперзије σ^2.

1.3. Показати да уколико важи алтернативна хипотеза количник (1.2) има померену Фишерову расподелу $F_{m,n-p-1}(\delta)$ и одредити δ.

1.4. Извести пормулу за h_{ij} у случају просте регресије, у функцији од X_i, X_j и S_x^2.

1.5. У пакету PASWR налази се база URLadress у којој је 30 обзервација о количини сачуваних података и времена конектованог на Интернет. Испитати да ли постоји линеарна веза између ових података. Формирати модел и проверити његову коретност. Графички представити одговарајуће 95% интервале поверења и предвиђања. Уколико је потребно избацити аутлајере из скупа обзервација.

1.6. Показати да у случају просте линеарне регресије, бар један елемент матрице $\frac{X^T X}{n}$ тежи нули кад n тежи бесконачности, као и да h_i тежи нули.

1.7. Претпоставите да имате линеарни модел код кога је слободан члан нула, а дизајн матрица је $X = I_n$.
а) Показати да је оцена назубљеном регресијом дата са

$$\hat{\beta}_i = \frac{y_i}{1+c},$$

где је c подешавајући параметар (види (1.9)).
б) Наћи LASSO оцену непознатих параметара.

Поглавље 2

Уопштени линеарни модели

Једна од главних претпоставка линеарних модела била је нормална расподела зависне промењљиве. Присетимо се, њену средњу вредност моделирали смо линеарним моделом.

Свакако да је та претпоставка у многим ситуацијама нереална. Често се дешава да су зависне промењљиве дискретног типа. Најједноставнији пример би била прмењљива Y која за сваку вредност предиктора узима само две вредности: 0 или 1 (категоричка промењљива са две вредности: ДА или НЕ, ИСТИНА или НЕИСТИНА, ЗА или ПРОТИВ). Дакле, условна расподела предиктора је

$$Y_i|X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\pi(X_i) & \pi(X_i) \end{pmatrix}$$

Регресиона функција је

$$E(Y_i|X_i) = \pi(X_i)$$

Јасно је, да у овој ситуацији, линеарни модел не би био адекватан. Неки од разлога су следећи.

1. Грешке модела не могу се моделирати нормалном расподелом, или неком другом абсолутно непрекидном и сметричном око нуле.

2. Дисперзија грешака модела није константна. Важи: $D(Y_i|X_i) = \pi(X_i)(1-\pi(X_i)) = D(\varepsilon_i)$.

3. С обзиром да је регресиона функција вероватноћа треба да буде задовољено да је $\pi(X_i) \in [0,1]$. За линеарну функцију то очигледно не важи.

Међутим, могуће је адекватно трнсформисану средњу вредност Y−на моделирати линеарним моделом. При избору трансформације треба имати у виду да нам треба нека монотона функција која слика $(0,1)$ у скуп $\mathbb{R}$. Као најприроднији избор за то намеће се инверз функције расподеле неке апсолутно непрекидне случајне величине са носачем $\mathbb{R}$. Дакле, претпоставићемо да је $F^{-1}(\pi(X_i)) = \beta_1 X_i + \beta_0$. За сада, ради једноставнијег записа, претпостављамо да имамо један предиктор. У зависности од избора F-а разликујемо неколико врста регресионих модела.

Пробит регерсија

Нека је $F(x) = \Phi(x)$, функција расподеле сучајне величине са $\mathcal{N}(0,1)$. Тада је $\pi(X_i) = \Phi(\beta_0^* + \beta_1^* X_i)$, односно $\Phi^{-1}(\pi(X_i)) = \beta_0^* + \beta_1^* X_i$ линеарни модел. Ова трансформација је позната под називом *пробит трансформација*.

Следећи пример је мотивациони за посматрање управо ове врсте регресије.

Пример 2.0.1. *Претпоставимо да испитујемо зависност температуре Y од влажности ваздуха X и да се проглашава ванредно стање уколико температура пређе неки критични ниво C. Нека је Y_c индикатор ванредног стања. Под претпоставком да је $Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i$, где $\{\varepsilon_i\}$ је Гаусов бели шум, моделирање EY_c се своди на пробит регресију.*

Параметри модела се могу оценити методом максималне веродостојности као што ће бити приказано у логистичком регресионом моделу.

Лог-Вејбулова регресија

$\pi(X_i) = 1 - e^{-e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}$. Одавде је $F_G^{-1}(\pi(X_i)) = \log(-\log(1 - \pi(X_i))) = \beta_0 + \beta_1 X_1$.

Ова траснформација, због своје асиметричности, се најчешће користи за моделовање малих и великих вероватноћа успеха. Позната је под називом *трансформација итерираног логаритма* (complementary log-log regression).

Логистичка регресија

$\pi(X_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}$

Одавде је $F_L^{-1}(\pi(X_i)) = \log\left(\frac{\pi(X_i)}{1 - \pi(X_i)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$. Ова трансформација је позната под називом *логит трансформација*.

Количник $\frac{\pi(X_i)}{1-\pi(X_i)}$ се назива *квота* (odds.)

Приметимо да када се зависна промењлива повећа за 1 онда се логаритам квоте повећа за β_1.

Параметре модела оцењујемо методом максималне веродостојности. Логаритам функције веродостојности је

$$
\begin{aligned}
L(\beta) &= \sum_{i=1}^{n} \big(Y_i \log\big(\frac{\pi(X_i)}{1-\pi(X_i)}\big) + \log(1-\pi(X_i))\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i(\beta_0 + \beta_1 X_i) - \sum_{i=1}^{n} \log\big(1 + e^{\beta_0+\beta_1 X_i}\big)
\end{aligned}
$$

Максимум ове функције одређује се нумерички. Нека су добијене оцене $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ за непозанте коефицијенте β_0 и β_1. Одавде је оцењена регресиона функција

$$\hat{\pi}(X_i) = \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_i}}{1 + e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_i}}$$

Оцењена логит функција је

$$\hat{\lambda}(X) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

Даље, означимо са $\hat{\pi}_i = \hat{\pi}(X_i)$, као $\omega_i = \hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)$. Тада је пондерисана средина

$$\bar{X}_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}.$$

Пондерисана сума квадратних одступања је

$$SS_\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (X_i - \bar{X}_\omega)^2.$$

Може се показати да су стандардна одступања оцена параметара ($Fleiss\ et\ al.$2003)

$$SE(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} + \frac{\bar{X}_\omega^2}{SS_\omega}}$$

$$SE(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sqrt{SS_\omega}}.$$

Коваријација оцена параметара је

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{\bar{X}_\omega}{SS_\omega}.$$

Тада је
$$\lambda(\hat{\pi}(X)) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X,$$
као
$$SE(\lambda(\hat{\pi}(X))) = \sqrt{SE(\hat{\beta})^2 + 2XCov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) + X^2 SE(\hat{\beta}_1)^2}$$
и
$$SE(\hat{\pi}(X)) = \hat{\pi}(X)(1 - \hat{P}(X))SE(\lambda(\hat{\pi}(X))).$$
Сада можемо направити и интервал поверења за $\pi(X)$.

Тестирање значајности коефицијената се може тестирати тестом количника веродостојнисти. Како

$$2\log\big(\frac{L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{L(\hat{\beta}_0}\big)$$

под нултом хипотезом има приближно χ^2_1 расподелу, можемо извршити тестирање значајности коефицијента уз предиктора на уобичајан начин.

Још један од начина да проверимо утицај сваке независне променљиве на посматрану зависну, као значај сваког коефицијента, односно да се процени да ли ће се избацивањем неког коефицијента изгубити на квалитету модела , је Валдов тест. Користи се Валдова тест статистика

$$Z = \frac{\hat{\beta}_i}{SE(\hat{\beta}_i)}, \quad i = 0, 1.$$

Ова статистика, при важењу нулте хипотезе ($\beta_i = 0$) има нормалну расподелу па се могу направити одговарајуће критичне области за тестирање и израчунати p-вредности тестова. До сад нисмо говорили о типу предиктора. Уколико је предиктор дискретна случајна величина онда можемо χ^2 тестом проверити значајност коефицијената.

Чланове узорка груписаћемо на основу вредности независне променљиве. Дакле, за свако X_i из узорка формирамо подскуп који чине они елементи узорка чија је независна компонента једнака одабраном X_i.
Нека је m_j број елемената у j-тој подгрупи посматраног узорка, $j = 1, 2...J$. У оквиру сваке подгрупе се може оценити условна вероватноћа $\pi(X_j) = P\{Y = 1|X_j\}$. Нека је n_j прој елемената у подгрупи за које је вредност зависне променљиве једнака 1. Оцена поменуте вероватноће, на основу логистичког модела је $\hat{\pi}\{Y = 1|X_j\} = \frac{1}{1+e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_j}}$. Тада је очекиван

просечан број елемената из узорка чија је вредност зависне променљиве 1, једнака:

$$\hat{n}_j = m_j\hat{\pi}_j = m_j\frac{1}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_j}}.$$

У зависности од расподељености зависне променљиве у оквиру сваке групе, као и међусобном односу група на основу те карактеристике, користе се различите статистике за проверу квалитета добијеног логистичког модела.

Пирсонови резидуали

Пирсонов j-ти резидуал је дефинисан са

$$r_j = \frac{n_j - m_j\hat{\pi}_j}{\sqrt{m_j\hat{\pi}_j(1-\hat{\pi}_j)}} = \frac{n_j - \hat{n}_j}{\sqrt{\hat{n}_j(1-\frac{\hat{n}_j}{m_j})}}.$$

Пирсонова статистика је дефинисана са

$$C = \sum_{j=1}^{J} r_j^2.$$

C има приближно χ^2_{J-2}.

Квалитет Пирсонових резидуала испољава се чињеницом да је њихова очекивана вредност 0, као и да је за сваки резидуал дисперзија иста.

Резидуали девијације

Резидуал девијације, за $n_j - \hat{n}_j \geq 0$, је дефинисан са:

$$d_j = \sqrt{2\left(n_j \ln\frac{n_j}{m_j\hat{P}_j} + (m_j - n_j)\ln\frac{m_j - n_j}{m_j(1-\hat{P}_j)}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(n_j \ln\frac{n_j}{\hat{n}_j} + (m_j - n_j)\ln\frac{m_j - n_j}{m_j - \hat{n}_j}\right)}$$

За $n_j - \hat{n}_j < 0$ за j-ти резидуал се узима $-d_j$,
за $n_j = 0$

$$d_j = -\sqrt{2m_j\left|\ln\frac{m_j}{m_j - \hat{n}_j}\right|},$$

док је за $n_j = m_j$
$$d_j = \sqrt{2m_j \left| \ln \frac{m_j}{\hat{n}_j} \right|}.$$
Тест статистика је
$$D = \sum_{j=1}^{J} d_j^2.$$

D има приближно χ^2_{J-2} расподелу. Показује се да ови резидуали брже теже нормално распоређеној случајној промењљивој, него Пирсонови резидуали.

У наредном поглављу ћемо уопштити моделе за очекивану вредност Бернулијеве расподеле које смо овде приказали.

Уопштени линеарни модели

Ови модели се састоје од следећих компоненти:

- линеарна комбинација коефицијената модела
$$\eta_j = X_j^T \beta \text{ односно } \eta_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} X_{j_i} \beta_i$$

- "линк" функције која представља трансфорамцију коју треба применити на функцију средње вредности зависне промењљиве, да би се та трансформисана промењљива могла описати линеарним моделом, односно за $\mu_j = EY_j$ и за линк функцију g важи
$$g(\mu_j) = \eta_j$$

- дисперизија зависне промењљиве се може представити у облику
$$D(Y_j) = CV(\mu_j).$$

Уколико је $g(x) = x$, $V(x) = 1$ и $C = \sigma^2$ добијамо класичан линеарни модел.
Уколико $Y_j \sim \mathcal{B}(1, \mu_j)$ расподелу и $g(x) = F_L^{-1}(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ и $V(x) = x(1-x)$ добијамо логистичку регресију.
Веома често се у пракси јавља случај када $Y_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$. Тада је $\mu_j = \lambda_j$ и $D(Y_j) = \lambda_j = \mu_j$ па је $V(x) = x$. Треба још да одредимо линк функцију.

Приметимо да за њу треба да важи да слика $(0, \infty)$ на $(-\infty, \infty)$. Зато је природан избор линк функција $g(x) = \log(x)$.

Нормална, биномна и Пуасонова расподела припадају експоненцијалној фамилији расподела. Експоненцијалној фамилији са распоршењем (расејањем) припадају све расподеле за које се функција густине (закон расподеле) може приказати у облику:

$$f(x, \theta) = e^{\frac{c(\theta)^T T(y) - d(\theta) + S(y)}{\phi(\tau)}}$$

Параметар τ се назива параметром *распршења*. Када је $\phi(\tau)$ познато ради се о класичној експоненцијалној фамилији расподела.

Примери: Бернулијева расподела, нормална расподела, Пуасонова расподела...(на часу).

Уколико је $T(y) = y$ и $c(\theta) = \theta$ кажемо да се ради о расподели у *канонском облику.* Тада је

$$\begin{aligned} EY &= -d'(\theta) = \mu \\ DY &= d''(\theta)\phi(\tau) = V(\mu)\phi(\tau). \end{aligned}$$

Најчешће је $\phi(\theta) = a\tau$ и у случају уопштеног линеарног модела подразумевамо да је $f(y_i) = e^{\frac{y_i\theta_i - d(\theta_i)}{a_i\tau} + c(y_i, a_i\tau)}$.

Непознати параметри модела се одређују, као и у случају логистичке регресије, методом максималне веродостојности.

Вратимо се одабиру линк функције. Уколико је линк функција одабрана тако да је за канонски параметар $\theta = \eta$ онда такву функцију називамо *канонском* линк функцијом. Јасно је да је у случају логистичке регресије канонска функција баш *logit* функција.

Предност одабира канонске линк функције је што је тада X^TY довољна статистика за β јер је

$$L(y, \theta) = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^T \beta - d(x_i^T \beta) - S(y_i)}{\phi(\tau)}}$$

2.0.1 Асимптотска својства МЛ оцене

- асимптотска нормалност као последица МЛЕ оцене у регуларном случају;
- може се искористити Валдова статистика дефинисана као у случају логистичке регресије;

- једна од мера квалитета модела је и *девијација* односно "мера одступања претпостављеног модела од засићеног модела." Дефинише се са $D = 2\tau(l(y, \hat{\theta}_s) - l(y, \hat{\theta}))$ где је $\hat{\theta}_s$ оцена непознатих параметара у засићеном моделу-моделу у коме су непознати параметри средњих вредности којих има n. У овом моделу немамо ограничење на те параметре у виду неке функције линеарног модела, као што је то у нашем претпостављеном моделу случај. Уколико је $\tau poznato$ онда се разлика девијација користи за тестирање значајности коефицијената модела. Наиме, уколико је H_0 : да су неких k коефицијената у моделу 0, онда $\frac{(D_0 - D_1)}{\tau}$ има χ^2_{p+1-k}. Понекад се $\frac{D}{\tau}$ назива скалираном девијацијом.

  Када је τ непознато, може се оценити са $\hat{\tau} = \frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{a_i V(\hat{\mu}_i)}$ (сума квадрата Пирсонових резидуала). Тада за тестирање значајности коефицијената можемо користити статистику

$$\frac{\frac{1}{p+1-k}(D_0 - D_1)}{\hat{\tau}}$$

  која уколико је нулта хипотеза тачна и $F_{p+1-k, n-p-1}$. Дакле, у случају просте логистичке регресије имамо два параметра и $p = 1$.

2.1 Пуасонова регресија и слични модели

Канонска линк функција је $g(t) = \log(t)$. Тада је

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log(e^{x_i^T\beta}) - e^{x_i^T\beta} + Const$$

У случају засићеног модела је

$$l(\mu) = -\sum_i y_i + \sum_i y_i \log(\mu_i) + Const$$

Одавде је оцена за μ_i баш y_i Одговарајућа девијација је

$$D(y, \hat{\mu}) = 2(l(\mu) - l(\hat{\mu})) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i \log(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}) - 2(y_i - \hat{\mu}_i) = 2\sum_i y_i \log(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}).$$

Очигледни недостатак Пуасонове регресије је ограничење да се средња вредност и дисперзија поклапају, што у пракси често није случај.

Да би се овај проблем превазишао може се користити квази-Пуасонов модел, или негативни биномни модел, у случају да је дисперзија већа од очекивања, или мешавине Пуасонове и неке друге дискретне расподеле (најчешће мешавина Пуасонове расподеле и нуле).

У квази-Пуасоновом моделу се само претпоставља да је $DY = \tau\mu$, тако да је оцена за τ већа од 1, индикација за овакве моделе.

Што се тиче негативно-биномног модела, он се за погодан избор параметра своди на Пуасонов модел, а ли с обзир да је та вредност крајња тачка интервала, услови регуларности нису испуњени па немамо уобичајну χ^2 расподелу већ мешавину исте и нуле.

Литература

[1] J. J. Faraway. *Linear models with R*. CRC press, 2014.

[2] Roger Koenker. A note on studentizing a test for heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 17(1):107–112, 1981.

[3] J. Neter, M.H. Kutner, C.J. Nachtsheim, and W. Wasserman. *Applied linear statistical models*, volume 4. Irwin Chicago, 1996.

[4] A. Sen and M. Srivastava. *Regression analysis: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.