1 Ирационалне једначине

1.1 Теоријски увод

Под ирационалним једначинама подразумевају се једначине код којих се непозната налази под знаком корена. Такве једначине могу бити сложене, па се могу решити само неке једноставнијег типа. Основна идеја при решавању ирационалних једначина јесте да се елеминише корен (пре свега, степеновањем), односно да се добије еквивалентна једначина у којој се не појављује непозната под кореном.

Степеновањем једначине не добијамо увек еквивалентну једначину, већ можемо добити једначину која поред решења полазне једначине може имати још решења. Једноставан пример за ово је једначина $\sqrt{x}=-1$ која нема реалних решења, а ако је квадрирамо добићемо једначину $x=1$ која има једно реално решење. Или једначина $x+1=\sqrt{x+7}$, која се квадрирањем своди на једначину $(x+1)^2=x+7$ чија су решења $x=2$ и $x=-3$. Међутим, провером можемо видети да $x=2$ јесте решење полазне једначине, а $x=-3$ није решење.

Област дефинисаности једначине (скуп допустивих решења) је скуп реалних бројева за који су дефинисане поткорене функције у ирационалној једначини.

Посматрајмо ирационалне једначине облика $\sqrt{a(x)}=b(x)$. Видимо да изрази $a(x)$ и $b(x)$ морају бити ненегативни. Квадрирањем добијамо следећу еквиваленцију

$$\sqrt{a(x)}=b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x)=b^2(x) \;\wedge\; a(x)\geq 0 \;\wedge\; b(x)\geq 0.$$

Неједнакост $a(x)\geq 0$ није потребно писати јер је садржана у неједнакости $a(x)=b^2(x)$. Према томе, важи следећа једноставнија еквиваленција

$$\sqrt{a(x)}=b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x)=b^2(x) \;\wedge\; b(x)\geq 0. \tag{1}$$

Ако је ирационална једначина облика $\sqrt{a(x)}=\sqrt{b(x)}$, онда важи

$$\sqrt{a(x)}=\sqrt{b(x)} \;\Leftrightarrow\; a(x)=b(x) \;\wedge\; a(x)\geq 0 \;\wedge\; b(x)\geq 0. \tag{2}$$

Можемо закључити, ирационална једначина облика $\sqrt[n]{a(x)}=b(x)$, за непаран број $n\in\mathbb{N}$, еквивалентна је једначини $a(x)=[b(x)]^n$, а за паран број $n\in\mathbb{N}$ систему $a(x)=[b(x)]^n$, $b(x)\geq 0$.

1.2 Решени задаци на припремама

1. Решити једначину $\sqrt{7-x}=x-1$. $\quad x=3$
2. Решити једначину $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=5$. $\quad x_1=9, x_2=51/4$
3. Решити једначину $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$. $\quad x=1$
4. Решити једначину $(x^2-2x-3)\sqrt{x^2-7x+6}=0$. $\quad x\in\{-1,1,6\}$
5. Решити неједначину $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}=1$.

   Ова једначина нема реалних решења
6. Решити једначину $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$. $\quad x_1=23, x_2=-17$
7. Решити једначину $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

   $x_1=1, x_2=-8/3$
8. Решити једначину $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}=2$.

   $x\in[-2,-1]$
9. Решити једначину $x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1=3x$. $\quad x_1=1,\ x_2=3+2\sqrt{2}$
10. Решити једначину $\sqrt{x-3}=x+a$, где је a реалан параметар. 1) $a>-\frac{11}{4}$, дата једначина нема решења; 2) $a=-\frac{11}{4}$, решење је $x=\frac{13}{4}$; 3) $-3\leq a\leq -\frac{11}{4}$, $x_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{-4a-11}}{2}$; 4) $a<-3$, решење је $x=\frac{1-2a+\sqrt{-4a-11}}{2}$.

1.3 Задаци за вежбу

1. Одредити рeсења једнајцине $\sqrt{x+2}=x-1$. $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
2. Решити једначину $\sqrt{x^4-4x-16}=2-x$. $x=-\sqrt{5}$
3. Решити једначину $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$. $x_1=4, x_2=11$
4. Решити једначину $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}$.
   $y=-2$
5. Решити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
   $5\le x\le 10$
6. Решити једначину $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.
   $x_1=8, x_{2,3}=8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$
7. Решити једначину $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$. $x=2$
8. Решити једначину $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$. $x=-1$
9. Решити једначину $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$. $x_1=4$
10. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$. $x=81$
11. Решити једначину $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$ $x=3$
12. Решити једначину $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.
    $x\in\left\{0,\frac{63}{65}a\right\}$ за $a\neq 0$, $x=0$ за $a=0$
13. Решити једначину $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$. $x_1=16, x_2=81$
14. Решити једначину $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$. $x=8$
15. Решити једначину $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$. $x=2^{10}$
16. Решити једначину $\sqrt{x^2-2|x|+1}=1$. $x\in\{0,2,-2\}$
17. (МФ,2011) Наћи збир свих решења једначине $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$. 3
18. (МФ,2010) Решити једначину $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$. $x=\frac{1}{4}$
19. (МФ,2009) Решити једначину $\sqrt{1-x}=-x$. $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$
20. (МФ,2014) Решити једначину $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$. $x=81$
21. (МФ,2012) Решити једначину $\sqrt{x+2}=x-1$. $x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$
22. (МФ,2008) Решити једначину $x^2+\sqrt{(x-1)^2}=1$. $x=0, x=1$
23. (МФ,2006) Решити једначину $x+1=\sqrt{x+7}$. $x=2$
24. (МФ,2004) Решити једначину $\sqrt{2x^2+1}=x^2-1$. $x=-2, x=2$
25. (МФ,2003) Решити једначину $\sqrt{x-1}=x-3$. $x=5$

2 Ирационалне неједначине

2.1 Теоријски увод

Код ирационалних неједначина је мало сложеније решавање. Квадрирање неједнакости није увек дозвољено зато што ако множимо негативним бројем мења се знак неједнакости, а ако множимо позитивним бројем знак једнакости остаје. Једноставан пример за то је тачна неједнакост $-2 < -1$, коју када квадрирамо добијамо нетачну неједнакост $4 < 1$.

Посматрајмо следеће облике неједнакости:

1° $\sqrt{a(x)} \le b(x)$

Очигледно је да мора бити $b(x) \ge 0$ и $a(x) \ge 0$, па важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \le b(x) \ \Leftrightarrow\ 0 \le a(x) \le b^2(x) \ \wedge\ b(x) \ge 0. \tag{3}$$

2° $\sqrt{a(x)} < b(x)$

Десни израз мора бити позитиван, одакле добијамо

$$\sqrt{a(x)} < b(x) \ \Leftrightarrow\ 0 \le a(x) < b^2(x) \ \wedge\ b(x) > 0. \tag{4}$$

3° $\sqrt{a(x)} \ge b(x)$

Овде немамо услов да $b(x)$ мора да буде ненегативно, па неједнакост може бити задовољена и ако је $b(x)$ негативно. Ако је $b(x) \ge 0$, потребно је да важи $a(x) \ge 0$ и $a(x) \ge b^2(x)$, а ако је $b(x) < 0$ довољно је да $a(x) \ge 0$ и неједнакост је задовољена. Према томе, важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \ge b(x) \ \Leftrightarrow\ \big(a(x) \ge b^2(x) \ \wedge\ b(x) \ge 0\big) \ \vee\ \big(a(x) \ge 0 \ \wedge\ b(x) < 0\big). \tag{5}$$

4° $\sqrt{a(x)} > b(x)$

Као и у претходном облику, овде важи

$$\sqrt{a(x)} > b(x) \ \Leftrightarrow\ \big(a(x) > b^2(x) \ \wedge\ b(x) \ge 0\big) \ \vee\ \big(a(x) \ge 0 \ \wedge\ b(x) < 0\big). \tag{6}$$

Сада ћемо посматрати неједначине у којима се јавља n-ти корен. Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) < [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$0 \le f(x) < [g(x)]^n,\ g(x) > 0.$$

Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) > [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$\big(f(x) > [g(x)]^n \ \wedge\ g(x) \ge 0\big) \ \vee\ \big(f(x) \ge 0 \ \wedge\ g(x) < 0\big).$$

2.2 Решени задаци на припремама

1. Решити неједначину $\sqrt{x^2+4x+4} \le x+6$. $\qquad x \in [-4, +\infty)$

2. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

$x \in (-\infty, -2] \cup [5, 74/13)$

3. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$.

$x \in \big(-\infty, -1/3\big] \cup [1,5]$

4. Решити неједначину $\sqrt{x^2-x-12} > 7+x$. $x \in (-\infty, -61/15)$

5. Решити неједначину $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \frac{1}{2x-1}$. $x \in (-1, 1/2) \cup (5/4, +\infty)$

6. Решити неједначину $x - 2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 2 < 0$. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 8)$

7. Решити неједначину $\sqrt{3x-1} - \sqrt{7-x} \leq 2$.

$x \in \big[1/3, \big(5+\sqrt{17}\big)/2\big]$

8. Решити неједначину $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$.

$\big(1, (1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2, +\infty\big)$

9. Решити неједначину $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$. $x \in \{-1\} \cup [2, +\infty)$

10. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+2)(x^2-8x+16)} \geq 0$.

$x \in (-2, -1] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$

2.3 Задаци за вежбу

1. Решити неједначину $\sqrt{x+78} < x+6$. $x > 3$

2. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x+2} \leq 2x-1$.

$x \in \big[\big(1+\sqrt{13}\big)/6, 1\big] \cup [2, +\infty)$

3. Решити неједначину $\sqrt{-x^2+x+6} > 1-x$. $-1 < x \leq 3$

4. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$.

$x \in \big(-\infty, -1/3\big] \cup [1,5]$

5. Решити неједначину $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$x \in \big[0, \big(3-\sqrt{5}\big)/6\big)$

6. Решити неједначину $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} > \sqrt{4x-3}$. $x > 3$

7. Решити неједначину $\frac{1}{x}(1-\sqrt{1-9x^2}) < 1$. $x \in \big[-1/3, 0\big) \cup \big(0, 1/5\big)$

8. Решити неједначину $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$.

$x \in \big(\big(\sqrt{13}-5\big)/2, 1\big]$

9. Решити неједначину $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq 0,5$.

$x \in \big(-1, 1-\sqrt{2}\,\big] \cup \big(1, 1+\sqrt{2}\,\big]$

10. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1} \leq 6\sqrt{x}$. $x \in [0, 1) \cup \big[49/25, +\infty\big)$

11. Решити неједначину $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1$. $x \in (0, 1) \cup (9, +\infty)$

12. (МФ,2013) Решити неједначину $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1$. $x \in \big[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\big)$

13. (МФ,2005) Решити неједначину $x+1 > \sqrt{5-x}$. $x \in (1, 5]$