

## Вероватноћа и статистик Б Задаци са вежби 2017/2018. (Р смер)

1. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:
  - а)  $X_1$  која има  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$  расподелу;
  - б)  $X_2$  која има биномну  $\mathcal{B}(n, p)$  расподелу;
  - в)  $X_3$  која има Пуасонову  $\mathcal{P}(\lambda)$  расподелу и доказати да ако  $X_3$  има Пуасонову  $\mathcal{P}(\lambda)$  расподелу, а  $X_4$  има Пуасонову  $\mathcal{P}(\mu)$  расподелу и независне су, онда њихов збир  $X_3 + X_4$  има Пуасонову  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$  расподелу;
  - г)  $X_5$  која има експоненцијалну  $\mathcal{E}(\lambda)$  расподелу;
  - д)  $X_6$  која има гама  $\gamma(\alpha, \beta)$  расподелу;
  - ђ)  $X_7$  чија густина расподеле је  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$ , а затим израчунати очекивање  $EX_5$  и дисперзију  $DX_5$ .
2. Доказати да линеарна комбинација  $n$  независних случајних величина са нормалном расподелом има нормалну расподелу.
3. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију  $\varphi(t)$  важи да је:
  - а)  $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$ ;
  - б)  $\varphi(t) = (1 - \beta)(1 + \alpha)^{-1}(1 + \alpha e^{-it})(1 - \beta e^{it})^{-1}, 0 < \alpha < \beta < 1$ ;
  - в)  $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$ .
4. Ако су  $Y$  и  $Z$  независне случајне величине такве да је  $X = Y + Z$ , где  $X$  има  $\mathcal{U}(0, n + 1)$ , а  $Y$  има  $\mathcal{U}(0, 1)$  распореду, одредити расподелу случајне величине  $Z$ .
5. За низ случајних величина  $(X_n)$  важи да је  $EX_n = n$ , а  $DX_n = 1$ . Ако је  $c$  фиксиран број који припада интервалу  $(0, 1)$ , израчунати вероватноћу да ће бесконачно много пута бити  $X_n < cn$  кад  $n \in N$ .
6. Нека је  $\Omega = \{\omega_k | k \in N\}$  скуп елементарних исхода неког експеримента и  $P\{\omega_k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$ . За сваки природан број  $n$  нека је  $X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, k = n; \\ 0, k \neq n. \end{cases}$ , а  $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$ . Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина  $(X_n)$ , односно низа случајних величина  $(Y_n)$ .
7. За сваки природан број  $n$  случајна величина  $X_n$  има униформну  $U[0, \frac{1}{n}]$  расподелу, а независна од ње случајна величина  $Y_n$  има закон расподеле  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Ако је  $Z_n = X_n + Y_n$ , испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина  $(Z_n)$ .
8. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан  $X_n$  има униформну  $U[0, n]$  расподелу. Ако је  $Y_n = \min\{1, X_n\}$ , испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина  $(Y_n)$ .
9. Ако низ случајних величина  $(X_n)$  конвергира у средње квадратном ка случајној величини  $X$ , онда  $EX_n \rightarrow EX$  и  $DX_n \rightarrow DX$  кад  $n \rightarrow \infty$ . Доказати.
10. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан  $X_n$  има  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  расподелу и нека је  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Доказати да низ случајних величина  $(S_n)$  конвергира у расподели ка случајној величини  $S_\infty$ , где  $S_\infty$  има униформну  $U[-1, 1]$  расподели.
11. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан  $X_n$  има:

- а) закон расподеле  $\left( \begin{array}{cc} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$ ;
- б) густину расподеле  $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$ ;
- в) закон расподеле  $\left( \begin{array}{cc} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$ .
12. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан  $X_n$  има густину расподеле  $f_{X_n}(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, x > 0$ . Испитати да ли за овај низ важи закон великих бројева.
13. Нека је низ случајних величина  $(X_n)$  такав да за сваки природан број  $n$  важи да је  $EX_n = 0$  и  $DX_n \leq C$  где је  $C$  константа која је већа од 0, и било који члан  $X_n$  зависи само од претходног  $X_{n-1}$  и следећег  $X_{n+1}$ , а независан је од осталих чланова низа. Доказати да за овај низ важи слаби закон великих бројева.
14. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподелене на сегменту  $[-0.5, 0.5]$ .
- а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.
- б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?
15. Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$ .
16. Обележје  $X$  посматране популације има нормалну  $\mathcal{N}(m, m)$  расподелу. За оцену непознатог параметра  $m$  предложене су две статистике: узорачка средина  $\bar{X}_n$  и поправљена узорачка дисперзија  $\hat{S}_n^2$ . Испитати непристрасност и постојаност тих оцена. Испитати која је оцена боља у средње квадратном смислу.
17. Нека је  $X_1, X_2, \dots, X_n$  узорка из  $\mathcal{N}(m, 1), m \in (0, 1)$  расподеле. Показати да је оцена  $T_n = \bar{X}_n I\{0 \leq \bar{X}_n \leq 1\} + I\{\bar{X}_n > 1\}$  ефикаснија од оцене  $\bar{X}_n$  и испитати њену непристрасност.
18. Нека је  $X_1, X_2, \dots, X_n$  узорка из  $\mathcal{U}[0, \theta]$  расподеле. Испитати да ли је оцена  $2\bar{X}_n$  ефикаснија од оцене  $\frac{n+1}{n} \bar{X}_n$  параметра  $\theta$ .
19. Обележје  $X$  има густину расподеле  $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, x \in (0, 1], \theta > 0$ . За оцену непознатог параметра  $\theta$  предложена је статистика  $V = \frac{n-1}{-\sum_{k=1}^n \ln X_k}$ . Испитати да ли је та оцена ефикасна.
20. Нека је  $X_1, X_2, \dots, X_n$  узорка из  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  расподеле. Одредити константу  $c$  тако да  $c \sum_{i=1}^n |X_i|$  буде непристрасна оцена  $\sigma$  и одредити њену ефикасност.
21. Наћи оцене методом момената за параметре следећих расподела:
- а) биномне  $\mathcal{B}(10, p)$ ;
- б) униформне  $\mathcal{U}[-\theta, \theta]$ ;
- в) гама  $\gamma(\alpha, \beta)$ .
22. Наћи оцену методом момената за параметре померене експоненцијалне  $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$  расподеле.
23. Нека  $X$  има фамилију расподела  $p(x; \theta) = \frac{1}{1-e^{-\theta}} \frac{e^{-\theta x}}{x!}, x \in \{1, 2, \dots\}, \theta > 0$ . Наћи оцену методом момената за  $\theta$ .
24. Обележје  $X$  има Пуасонову  $\mathcal{P}(\lambda)$  расподелу. На основу узорка обима  $n$  методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра  $\lambda$ , а затим испитати непристрасност и ефикасност тако добијене оцене.
25. Обележје  $X$  има густину расподеле  $f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$ . На основу узорка обима  $n$  методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра  $\theta$ .
26. Нека обележје  $X$  има расподелу  $\left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1 - \frac{2\theta}{3} \end{array} \right)$ .

- а) Наћи оцену методом момената за параметар  $\theta$ .  
 б) Наћи оцену методом максималне веродостојности за параметар  $\theta$ .  
 в) Испитати релативну ефикасност ове две оцене. Да ли је нека од њих ефикаснија?
27. Вероватноћа да се догађај  $A$  оствари при неком експерименту је  $p$ ,  $0 < p < 1$ . Експерименти се независно понављају или до прве појаве догађаја  $A$  или до  $N$ -тог покушаја, где је  $N \geq 1$  и унапред познат број. Број експеримената до краја серије се бележи. На основу регистрованих  $n$  бројева, тј. на основу  $n$  серија, методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра  $p$ .
28. Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра  $\theta$  на основу узорка обима  $n$  из популације чије обележје  $X$  има:
- а) униформну  $U[0, \theta], \theta > 0$ , расподелу;  
 б) униформну  $U[-\theta, \theta], \theta > 0$ , расподелу;  
 в) униформну  $U[0, \theta], \theta \geq 1$ , расподелу;  
 г) униформну  $U[0, \theta], \theta \in \mathbb{N}$ , расподелу. У овом случају испитати непристрасност и постојаност тако добијене оцене.
29. Обележје  $X$  има експоненцијалну  $\mathcal{E}(\lambda)$  расподелу, где је  $\lambda$  непознати параметар. На основу узорка (2.3, 3.4, 1.2, 2.5, 0.6) методом максималне веродостојности одредити оцену за вероватноћу  $P\{X \geq 1\}$ .
30. Обележје  $X$  има густину расподеле  $f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, x \geq \theta_1, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ . На основу узорка обима  $n$  методом максималне веродостојности одредити оцене непознатих параметара  $\theta_1$  и  $\theta_2$ .
31. Из популације чије обележје  $X$  има нормалну  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  расподелу извучен је узорак обима 10, чија је узорачка средина  $\bar{x}_{10} = 5.5$ , а узорачка дисперзија  $\bar{s}_{10}^2 = 36$ .
- а) Одредити 90% интервала поверења за непознати параметар  $m$ .  
 б) Одредити 90% једнострани (доњи, горњи) интервал поверења за непознати параметар  $\sigma^2$ , као и за непознати параметар  $\sigma$ .
32. Из популације чије обележје  $X$  има нормалну  $\mathcal{N}(m, 16)$  расподелу извучен је узорак обима 64, чија је узорачка средина  $\bar{x}_{64} = 5$ . Константовано је да је  $\beta\%$  интервал поверења за  $m$  једнак (4,6). Израчунати  $\beta$ .
33. Обележје  $X$  има униформну  $U[0, 1+\theta], \theta > 0$ , расподелу, где је  $\theta$  непознати параметар. Узет је узорак обима 200 и константовано је да је у узорку 150 елемената који су мањи од 1.
- а) Одредити 95% интервал поверења за вероватноћу  $p$ , где је  $p = \{X < 1\}$ .  
 б) На основу резултата под (а) одредити 95% интервал поверења за  $\theta$ .
34. Из популације чије обележје  $X$  има експоненцијалну  $\mathcal{E}(\lambda)$  расподелу извучен је узорак:

$I_k$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,\infty)$
$n_k$	493	378	298	211	171	45	4

Одредити 98% интервал поверења за непознати параметар  $\lambda$ .

35. У кутији је 10 куглица, црвених и белих. Тестира се (нулта) хипотеза  $H_0$  (у кутији су 2 црвене и 8 белих куглица) против (алтернативне) хипотезе  $H_1$  (у кутији су више од 2 црвене куглице), тако што се из кутије извлаче две црвене куглице једна за другом, без враћања, па ако су обе извучене куглице црвене, хипотеза  $H_0$  се одбацује, иначе се не одбацује. Израчунати праг (ниво) значајности и функцију моћи тог теста.
36. Нека је хипотеза  $H_0$  (обележје  $X$  има густину расподеле  $f_0(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$ ), а хипотеза  $H_1$  (обележје  $X$  има густину расподеле  $f_1(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1$ ). На основу узорка  $(X_1, X_2)$  треба се одредити за једну од ове две хипотезе. Предложена су два теста чије су критичне области  $W_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq k_1, x_2 \geq k_1\}$ , односно  $W_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \geq k_2\}$ , оба са истим прагом значајности  $\alpha$ , где је  $\alpha = \frac{1}{8}$ . Испитати који је тест бољи. Подразумева се да је познато да обележје  $X$  узима вредности из сегмента  $[0, 1]$ .

37. Нека је хипотеза  $H_0(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix})$ , а хипотеза  $H_1(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.42 & 0.01 & 0.01 & 0.5 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix})$ . Са прагом значајности 0.03, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе  $H_0$  против хипотезе  $H_1$  на основу узорка обима 2. Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тако одабраног теста.
38. Обележје  $X$  има нормалну  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  расподелу, где је  $\sigma^2$  непознати параметар. Са прагом значајности 0.05, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе  $H_0(\sigma^2)$  против хипотезе  $H_1(\sigma^2 = 2)$  на основу узорка обима 10.
39. Из популације чије обележје  $X$  има експоненцијалну  $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$  расподелу извучен је узорак обима  $n$ .
- Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе  $H_0(\lambda = 1)$  против хипотезе  $H_1(\lambda \neq 1)$  ( $H_1(\lambda = \lambda_1), \lambda_1 \neq 1$ ).
  - Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе  $H_0(\lambda = 1)$  против хипотезе  $H_1(\lambda \neq 1)$ .
  - Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тог теста ако је обим узорка 100, алтернативна хипотеза  $H_1(\lambda = 2)$ , а праг значајности 0.05.
40. Обележје  $X$  има густину расподеле  $f(x; \theta) = \frac{1-\theta}{x^\theta}, x \in (0, 1)$ , где је  $\theta$  непознати параметар такав да је  $\theta \in [0, 1)$ .
- Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе  $H_0(\theta = 0)$  против хипотезе  $H_1(\theta = \theta_0), \theta_0 > 0$ , на основу узорка обима  $n$ .
  - Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији тест за тестирање хипотезе  $H_0(\theta = 0)$  против хипотезе  $H_1(\theta > 0)$ .
  - Одредити функцију моћи  $M(\theta)$  тог теста ако је обим узорка 2, а праг значајности  $\alpha$ .
41. На основу узорка обима  $n$  тестирати хипотезу  $H_0$  (обележје  $X$  има нормалну  $\mathcal{N}(0, 1)$  расподелу) против хипотезе  $H_1$  (обележје  $X$  има густину расподеле  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ). Одредити најбољу критичну област ако је обим узорка 100, а праг значајности 0.05.
42. Из популације чије обележје  $X$  има нормалну  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  расподелу извучен је узорак обима 20 и констатовано је да је узорачка средина  $\bar{x}_{20} = 53.5$ , а узорачка дисперзија  $\bar{s}_{20}^2 = 45.85$ . Са прагом значајности 0.05 тестирати:
- хипотезу  $H_0(m = 60)$ ;
  - хипотезу  $H_0(\sigma^2 = 50)$  против хипотезе  $H_1(\sigma^2 < 50)$ .
43. Из две популације чија су обележја  $X$  које има нормалну  $\mathcal{N}(m_1, 6^2)$  расподелу и  $Y$  које има нормалну  $\mathcal{N}(m_2, 5^2)$  расподелу извучени су независни узорци обима 12 и 10 и констатовано је да су узорачке средине  $\bar{x}_{12} = 178$  и  $\bar{y}_{10} = 176.6$ . Са прагом значајности 0.04 тестирати хипотезу  $H_0(m_1 = m_2)$  против хипотезе  $H_1(m_1 > m_2)$ .
44. Из две популације чија су обележја  $X$  које има нормалну  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  расподелу и  $Y$  које има нормалну  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$  расподелу извучени су независни узорци обима 8 и 10 и констатовано је да су узорачке дисперзије  $\bar{s}_8^2(X) = 46$  и  $\bar{s}_{10}^2(Y) = 50$ . Са прагом значајности 0.1 тестирати хипотезу  $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ .
45. Мерен је систолни (горњи) притисак на узорку од 12 мушкараца и добијено је 130, 148, 122, 140, 132, 142, 124, 150, 170, 136, 146, 140, а на узорку од 13 жена добијене су следеће вредности 140, 150, 130, 132, 150, 138, 123, 124, 160, 138, 170, 144, 108. Сматра се да систолни притисак и код мушкараца и код жена има нормалну расподелу. Ако се претпостави да су дисперзије једнаке, са прагом значајности  $\alpha = 0.1$  тестирати хипотезу да су средње вредности притисака мушкараца и жена једнаке против алтернативе да се разликују.
46. Један лек помаже у лечењу неке болести у 80% случајева. Нови лек за ту болест је помогао у 250 од 300 случајева. Са прагом значајности 0.03 тестирати хипотезу да је нови лек ефикаснији од старог.

47. Из популације чије је обележје  $X$  извучен је узорак:

$X_k$	1	2	3	4	5	$\geq 6$
$M_k$	45	30	15	6	2	2

Са прагом значајности 0.05 тестирати хипотезу да обележје  $X$  има закон расподеле  $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k \in N$ .

48. Из популације чије је обележје  $X$  извучен је узорак:

$X_k$	[0,1]	[1.5,2.5]	(2.5,3.5]	(3.5,5]
$M_k$	52	35	9	4

Са прагом значајности 0.02 тестирати хипотезу да обележје  $X$  има експоненцијалну расподелу.