Глава 1

Комплексни бројеви

1.1 Теоријски увод

Једноставна једначина $x^2 + 1 = 0$ нема решења у скупу реалних бројева. Да би отклонили овај недостатак реалних бројева решаваћемо једначину у скупу комплексних бројева у коме се реални бројеви налазе као подскуп. Комплексни бројеви су изрази облика $x + iy$, где су x и y реални бројеви, а симбол i зовемо имагинарна јединица која има својство $i^2 = -1$.

Код комплексног броја $z = x + iy$, реалан број x је његов реални део (пише се $x = \mathrm{Re}(z)$), а реалан број y је његов имагинаран део (пише се $y = \mathrm{Im}(z)$).

За комплексан број $z = x + iy$ је њему конјугован број $\overline{z} = x - iy$.

Модул комплексног броја $z = x+iy$ је (ненегативан) број $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Под n-тим кореном броја z подразумевамо сваки комплексан број чији је n-ти степен једнак z.

С обзиром да је $i^2 = -1$, важи да је $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, затим, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, итд. Математичком индукцијом се може доказати да важи

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Модул је $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у тригонометријском облику

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја (пише се $\arg z$. Производ два комплексна броја $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ је

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi)\big),$$

где $l \in \{-1, 0, 1\}$ бирамо такво да $\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi \in (-\pi, \pi]$.

Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у поларном облику
$$z = re^{i\varphi},$$
где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја, при чему је $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Према томе, важи

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

(*Муаврова формула*) Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, онда за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи
$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.1}$$
Нека је дат комплексни број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Његови различити n-ти корени су

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}. \tag{1.2}$$

За сваки комплексан број $z = a + ib$ важи:

1° $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2a$; 2° $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i = 2bi$; 3° $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; 4° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 5° $|z^2| = |z|^2$; 6° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; 7° $|\overline{z}| = |z|$; 8° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

1.2 Задаци рађени на припремама

1. Израчунати $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ и $z_1 - z_2$ ако је $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 1 - 3i$.
   $z_1 + z_2 = 4 - i, z_1 - z_2 = 2 + 7i, z_1 \cdot z_2 = 15 - 5i.$
2. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја $z = \dfrac{7+2i}{4-3i}$.
   $\mathrm{Re}(z) = \frac{22}{25}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{29}{25}$.
3. (2005) Наћи збир реалног и имагинарног дела комплексног броја $\frac{-6-2i}{(1-i)^3}$.
   1
4. Израчунати i^{2017}. i
5. Нека је $S = i^n + i^{-n}$, где је n цео број. Које све вредности S може имати? $0, -2, 0$ и 2
6. Израчунати $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2014}$. -1
7. Израчунати $\left(\sqrt{3} - i\right)^{36}$. 2^{36}.

8. Наћи све комплексне бројеве који су конјуговани свом квадрату.

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = 0 \text{ и } z_4 = 1.$$

9. Решити једначину $z|z| + 4z + 5\overline{z} + 2i = 0$ у скупу комплексних бројева.

$-2i.$

10. Записати комплексан број $z = -\sqrt{3} - i$ у тригонометријском облику и израчунати z^{2017}.

$$z = 2\left(\cos\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)\right).$$

11. (2009) Број $(1 + i\sqrt{3})^n$ је реалан ако и само ако је (k је цео број): а) $n = 2k$; б) $n = 3k$; в) $n = 3k + 1$; г) $n = 3k + 2$; д) $n = 6k$;

$n = 3k$

12. (2013) Ако је $z + \frac{1}{z} = 1$, израчунати $z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}$. -2

13. Нека је $z = 3 - 4i$. Означити у комплексној равни тачке које одговарају комплексним бројевима:
а) z б) $\overline{z}$ в) $z - 2$ г) $z + 3i$ д) iz.

14. Одредити у комплексној равни скуп тачака које задовољавају релације:
а) $|z + i| = |z - 1|$; б) $1 < |z - i| < 2$.

Решење. а) Комплексни бројеви за које важи $|z + i| = |z - 1|$ су они који су у комплексној равни подједнако удаљени од тачака $z_0 = -i$ и $z_1 = 1$, односно налазе се на симетрали дужи која спаја тачке z_0 и z_1.
б) Комплексни бројеви унутар кружног прстена. △

15. Наћи све шесте корене броја $i - \sqrt{3}$.

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

1.3 Задаци за вежбу

1. (2004) Наћи реални део комплексног броја $(1 + i)^{24}$. 4096

2. (2006) Ако је i имагинарна јединица, а x и y реални бројеви за које важи $(2 + 3i)x + (3 + 2i)y = 1$, наћи $x - y$. -1

3. (2007) Израчунати вредност израза $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$ за $z = 2i$. 1

4. (2008) Наћи реалан број a за који важи $\frac{1+2ai}{1-ai} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. (2010) Ако су x и y реални бројеви, такви да је $(2 + i)(x + iy) = 5 - 5i$, израчунати збир $x + y$. -2

6. (2011) Израчунати $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$. $\quad 1$

7. (2012) Израчунати вредност израза $(1+i)^{2012}+(1-i)^{2012}$. $\quad -2^{1007}$

8. (2014) Израчунати реални део комплексног броја $\frac{1}{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$. $\quad \frac{1-\sqrt{5}}{16}$

9. (2016) Решити једначину $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{2}=i$, где је x реална непозната.
$x_1=-1-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}-1$

10. Израчунати $|z|$ (модул комплексног броја z), ако је $z=\frac{(2-i)(1+i)}{3-i}$.
$|z|=1.$

11. Израчунати $(1+i\sqrt{3})^9+(\sqrt{3}-i)^9$. $\quad 2^9(-1+i)$

12. Израчунати $\left(\dfrac{3}{1+i}+\dfrac{1+i}{2i}\right)^{16}$. $\quad 2^{24}$

13. Наћи вредност комплексне функције $f(z)=\left(\dfrac{z}{1-i}\right)^{20}$ у тачки $z=1+i\sqrt{3}$. $\quad 2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$

14. Ако је $z_1=(-1-i\sqrt{3})/2$ и $z_2=(-1+i\sqrt{3})/2$, израчунати $z_1^3+z_2^3$.

15. Упростити израз $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6$. $\quad$ -2

16. Средити израз $\dfrac{6\cos\frac{\pi}{6}+6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}}$. $\quad -3i.$

17. Комплексан број z има својство да је $\mathrm{Re}(z)$ четири пута већи од $\mathrm{Im}(z)$. Колико је пута $\mathrm{Re}(z^2)$ већи од $\mathrm{Im}(z^2)$? $\quad$ 1,875 пута.

18. Ако је комплексан број $z=x+iy\,(x,y\in\mathbb{R},\, i^2=-1)$ такав да је $|z|+\overline{z-1}=0$, израчунати $2x-y$. $\quad 2x-y=1$

19. Ако комплексан број z задовољава једнакост $z+2\overline{z}=12+3i$, наћи $|z|$.
$|z|=5$

20. Решити по z једначину $z+2\overline{z}=6-i$. $\quad z=2+i$

21. Решити једначину $z^5=(1-z)^5$. $\quad \dfrac{1}{2}\left(1-i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{k\pi}{5}\right),\ k\in\{0,1,2,3,4\}$

22. Дат је компексан број $z_1=2-2i$. Одредити комплексан број $z=x+iy$ који задовољава $\mathrm{Re}\,(z\cdot z_1)=18$ и $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z_1}\right)=\dfrac{1}{13}$. $\quad z=3+4i$

23. Ако је $z+\dfrac{1}{z}=1$, израчунати а) z^3; б) $z^{1000}+\dfrac{1}{z^{1000}}$. $\quad$ а) -1; б) -1

24. Израчунати z^{12}, где је z комплексан број који задовољава једначину $z^2 + z + 1 = 0$. $z = 1$.

25. Шта у равни представља скуп парова (x, y) таквих да је $z = x + iy$ и

    а) $\mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) < 1$; б) $|z| = 2$; в) $|z-1| = 1$; г) $z\cdot\overline{z} + (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 0$; д) $|z-2| + |z+2| = 4$; ђ) $|z+2| + |z-2| = 10$; е) $|z+5| - |z-5| = 8$.
    а) Полураван "испод"праве $y = 1 - x$; б) Круг са центром у $(0,0)$ полупречника 2; в) Круг са центром у $(1,0)$ полупречника 1; г) Круг са центром у $(-1,-1)$ полупречника $\sqrt{2}$; д) $z = 0$; ђ) Елипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$; е) Хипербола $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

26. Решити систем једначина: а) $\left|\dfrac{z-12i}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$;

    б) $|z+1| = |z+4| = |z-i|$.

    а) $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 6 + 17i$; б) $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

27. Решити једначину $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = 1$. $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$.

28. Колико има целих бројева n за које је $(n+i)^4$ цео број?

    $n \in \{0, -1, 1\}$.

29. Решити једначину $iz^2 - 4z + i = 0$.

    $z_{1,2} = \left(-2 \pm \sqrt{5}\right) i$

30. Записати комплексан број $z = -1 + i$ у тригонометријском облику.

    $$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

31. Наћи вредност збира $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{10}$ ако је $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. $\frac{1+i}{2-\sqrt{2}}$

32. Израчунати $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{2000}$. 0.

33. Наћи све четврте корене броја $z = -1 + i$.

34. Комплексан број $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$ записати у тригонометријском облику. $z = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

35. Комплексан број $z \neq 0$ записан је у тригонометријском облику, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Записати у тригонометријском облику број $\dfrac{1}{z}$.

    $\frac{1}{z} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1} = (re^{i\varphi})^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

36. Број $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ написати у тригонометријском облику.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

$$z_1^3 + z_2^3 = 2.$$

37. Израчунати збирове $C_n = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots\ldots + \cos n\varphi$ и $S_n = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

$C_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\dfrac{n}{2}\varphi$ и $S_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{n}{2}\varphi$. Ако је $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, онда је $C_n + iS_n = n+1$, па је $C_n = n+1$ и $S_n = 0$.

1.4 Тест

1. Реалан део комплексног броја $\frac{1}{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$ је:

   А) $\frac{(\sqrt{5}-3)\sqrt{3}}{16}$ Б) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ В) $-2-\sqrt{5}$ Г) $\frac{1-\sqrt{5}}{16}$ Д) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ Е) не знам

2. Вредност израза $(1+i)^{2018}-(\sqrt{3}-i)^{1009}$ је:

   А) Е) не знам

3. Дата је једначина
$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2=i,$$
   где је x реална непозната. Број решења ове једначине у интервалу $(0,1/2)$ је:

   А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 4 Д) бесконачно Е) не знам

4. Нека је z комплексан број за који важи $\frac{\sqrt{2}}{z+i}=-|z|$. Тада је $2z-\overline{z}$ једнако:

   А) $-1-3i$ Б) $6-i$ В) $2-3i$ Г) $1-i$

   Д) није једнозначно одређен Е) не знам