Задатак 0.1. Израчунати интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}\, dx \\
= &\left(\begin{array}{c} u = \ln x \ \Rightarrow \ du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{x}{(x^2+1)^2} \ \Rightarrow \ v = \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \left(\begin{array}{c} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{array} \right) \\
= & -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2+1}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2(x^2+1)} \\
= &\left(\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{4}\left(\ln|t| - \ln|1+t|\right)\Big|_1^{+\infty} \\
= &\frac{1}{4}\left(\ln\frac{|t|}{|1+t|}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}\left(0 - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}
$$

△

Задатак 0.2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова:
а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{13}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln(n+1)}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\frac{4n^2+3n+e}{2(n+e)^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}$.

Решење. а) Доказаћемо да је низ $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ монотоно опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{2x^4+2-4x^4}{2(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2-2x^4}{2(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

за $x > 1$, па је низ $f(n)$ монотоно опадајући за $n \geq 2$. Такође важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум, па почетни ред конвергира.

Ред не конвергира апсолутно јер је

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \sim \frac{1}{n},$$

а ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Према томе, ред условно конвергира.

б) Из неједнакости

$$\frac{13}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln(n+1)}} \geq \frac{13}{e^{\ln(n+1)}} = \frac{13}{n+1}$$

и дивергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{13}{n+1}$ следи дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{13}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln(n+1)}}$.

в) На основу граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{4n^2+3n+e}{2(n+e)^2} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{4n^2(1+\frac{3}{4n}+\frac{e}{4n^2})}{2n^2(1+\frac{2e}{n}+\frac{e}{n^2})} = \ln 2,$$

можемо зкључити да општи члан не конвергира ка нули, па ред дивергира.

г) Из граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} e\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n}}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}\cdot\frac{2n}{n^2+1}\cdot(-n)} = e\cdot e^{-2} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

(користили смо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1}\cdot(-n) = -2$) и на основу Кошијевог критеријума следи да ред конвергира ($\frac{1}{e} < 1$). △

Задатак 0.3. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

а) Доказати да за Фуријеове коефицијенте $a_n, n \geq 1$, функције f на интервалу $(-\pi,\pi)$, важи да је

$$a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\pi n^2},\ n \geq 1.$$

б) Развити функцију f у Фуријеов ред на интервалу $(-\pi,\pi)$.

в) Одредити суме редова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Решење. а)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = (f \text{ је парна}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx \\ &= \left(\begin{array}{c} u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \cos nx dx \ \Rightarrow\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\, x\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx\right) \\ &= \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

б) Функција f је парна, па је $b_n = 0$. Затим,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}$$

и Фуријеов ред је

$$S(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}\right)\cos nx.$$

в) За $x = \frac{\pi}{2}$ имамо

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \left(\ \cos\tfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}\ \right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k}\sin\frac{2k\pi}{2} + \frac{2}{(2k)^2\pi}\cos\frac{2k\pi}{2} - \frac{2}{(2k)^2\pi}\right)(-1)^k \\
&= \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k}\sin 2k\pi + \frac{1}{2k^2\pi}\cos k\pi - \frac{1}{2k^2\pi}\right)(-1)^k \\
&= \left(\ \sin 2k\pi = 0, \cos k\pi = (-1)^k\ \right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k^2\pi}(-1)^k - \frac{1}{2k^2\pi}\right)(-1)^k = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k^2\pi} - \frac{(-1)^k}{2k^2\pi}\right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi},
\end{aligned}$$

при чему је

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}_-\right) + f\left(\frac{\pi}{2}_+\right)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} = \frac{\pi}{4},$$

одакле је

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi},$$

а одавде

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2} = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Друга сума се добија из прве суме

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2} = (\text{за парно } k \text{ сабирци су нуле}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)^2},$$

па је

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

△