Математички факултет

Универзитет у Београду

Одабрани задаци из Анализе 1

Златко Лазовић

29. април 2016.

верзија 2.2

Садржај

1 Неодређени интеграли

Дефиниција 1.1. Нека је дата функција $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Функција φ је примитивна функција функције f ако је $\varphi'(x) = f(x) (\forall x \in (a,b))$.

Теорема 1.1. *Теорема: Ако је φ примитивна функција функције f, онда је и $\varphi + C$ примитивна функција функције f, за свако $C \in \mathbb{R}$.*

Дефиниција 1.2. Скуп свих примитивних функција функције f означимо са $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ или $\varphi(x) + C$.

Теорема 1.2. *Нека је φ примитивна функција функције f на неком интервалу. Онда је задовољено:*
1) $d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$;
2) $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$;
3) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, k \in \mathbb{R}$;
4) $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Таблица неодређених интеграла

1. $$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$
2. $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
3. $$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$
4. $$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
5. $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
6. $$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$
7. $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + C$$
8. $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctgx} + C$$
9. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$
10. $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\, x + C$$
11. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$
12. $$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Задатак 1.1. Решити интеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} - \frac{x\sqrt{x}}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x} - \ln|x| + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

△

1.1 Метода смене

Задатак 1.2. Решити интеграл $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} 1-3x = t \\ -3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \sqrt[3]{t}\frac{\mathrm{d}t}{-3} = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\
&= -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.3. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}a\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.4. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm 1}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{t^2\pm 1}}a\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{t^2\pm 1}}\,\mathrm{d}t = \ln|t+\sqrt{t^2\pm 1}| + C = \ln|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}| + C] \\
&= \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| - \ln|a| + C = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C_1,
\end{aligned}$$

где је $C_1 = -\ln|a| + C$. △

Задатак 1.5. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \frac{x}{a}=t \\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1-t^2}a\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.6. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \frac{x}{a}=t \\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}a\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

△

У претходним задацима доказали смо да за $a>0$ важи следеће

9'. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

10'. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

11'. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

12'. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Задатак 1.7. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left(\text{применом формуле 10', где је } a=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.8. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}} = \Big(\text{применом формуле 9', где је } a = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.9. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)} &= \left(\begin{array}{c}\ln x = t\\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\end{array}\right) = \int\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \left(\begin{array}{c}\ln t = u\\ \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}u\end{array}\right)\\ &= \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.10. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c}\sin x-\cos x = t\\ (\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\end{array}\right) = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}} = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C\\ &= \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.11. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^4}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^4} &= \left(\begin{array}{c}x^2 = t\\ 2x\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\end{array}\right) = (\text{применом формуле } 9')\\ &= \int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{2}}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C\\ &= \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.12. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2} &= \begin{pmatrix} x^4 = t \\ 4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{4}}{t^2-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right| + C \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-x^4}{\sqrt{2}+x^4}\right| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.13. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \begin{pmatrix} x^2+1 = t^2 \\ 2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = t^2-1 \end{pmatrix} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.14. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (сличан као задатак 1.13). △

Задатак 1.15. Решити интеграл $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

△

Задатак 1.16. Решити интеграл $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

△

Задатак 1.17. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.18. Решити интеграл $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} 1-3x = t \\ -3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = \frac{1-t}{3} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{1-t}{3}}{\sqrt[3]{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{-3} = -\frac{1}{9}\int \frac{1-t}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{9}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{9}\int t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C \\
&= -\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.19. Решити интеграл $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^2\sqrt[3]{1+x^2}x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 1+x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^2 = t-1 \end{pmatrix} = \int (t-1)\sqrt[3]{t}\frac{\mathrm{d}t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int (t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}t = \frac{3}{14}t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{sin^n x}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \ \text{ и } \int \mathbf{cos^n x}\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \in \{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}\}.$$

Задатак 1.20. Решити интеграл $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.21. Решити интеграл $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ (сличан као задатак 1.20). △

Задатак 1.22. Решити интеграл $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= -\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.23. Решити интеграл $\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$.

Решење. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (сличан као задатак 1.22). △

Задатак 1.24. Решити интеграл $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.25. Решити интеграл $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ (сличан као задатак 1.24). △

Задатак 1.26. Решити интеграл $\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^4 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= -\int (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,\mathrm{d}t = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.27. Решити интеграл $\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x$.

Решење. $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ (сличан као задатак 1.26). △

Задатак 1.28. Решити интеграл $\int \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$.

Решење. Користећи тригонометријску формулу $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ имамо

$$\int \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

△

Задатак 1.29. Решити интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} 2-x=t^2,\ t\geq 0 \\ -\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x = 2-t^2 \end{pmatrix} = -\int \frac{(2-t^2)^2}{t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int (4-4t^2+t^4)\,\mathrm{d}t = -8t + 8\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + C \\
&= -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.30. Решити интеграл $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{x^4 x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{pmatrix} 1-x^2=t^2, t\geq 0 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{pmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)^2 t\,\mathrm{d}t}{t} \\
&= -\int (1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t = -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.31. Решити интеграл $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x &= \int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} x^2\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 2-5x^3 = t \\ -15x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^3 = \frac{1}{5}(2-t) \end{pmatrix} = \int \frac{1}{5}(2-t)t^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}t}{-15} \\
&= -\frac{1}{75}\int (2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}})\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{75}\cdot\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{75}\cdot\frac{t^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \\
&= -\frac{2}{125}\cdot(2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200}\cdot(2-5x^3)^{\frac{8}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.32. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x+2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x-2} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}} = \\
&= \left(\ x^2+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{2}{3} = (x+\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3} = (x+\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{7}{9}\ \right) \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{3})^2-\frac{7}{9}} = \begin{pmatrix} x+\frac{1}{3}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{7}{9}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}-t}{\frac{\sqrt{7}}{3}+t}\right| + C \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}-x-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+x+\frac{1}{3}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-3x-1}{\sqrt{7}+3x+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.33. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{3}{2}+x-x^2}} \\
&= \left(\tfrac{3}{2}+x-x^2 = -(x^2-x-\tfrac{3}{2}) = -[(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2}] = -\left[(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{7}{4}\right] = \tfrac{7}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{7}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{7}{4}-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx^2+\mathrm{d}x+e}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.34. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Потребно је да трансформишемо израз $3x+2$ у $4x-3$, односно линеарну функцију у извод квадратне функције.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x+\frac{8}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x-3+3+\frac{8}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\left(\underbrace{\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \frac{17}{3}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-3x-1}}_{I_2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{4x-3}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} 2x^2-3x-1=t \\ (4x-3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln|2x^2-3x-1| + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-3x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}} \\ &= \left[x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{2} = \left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2-\tfrac{9}{16}-\tfrac{1}{2} = \left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2-\tfrac{17}{16}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16}} = \left(\begin{array}{c} x-\frac{3}{4}=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{17}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-t}{\frac{\sqrt{17}}{4}+t}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\sqrt{17}-4x+3}{\sqrt{17}+4x-3}\right| + C,\end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln|2x^2-3x-1| + \frac{\sqrt{17}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{17}-4x+3}{\sqrt{17}+4x-3}\right| + C.$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{ax+b}}{\sqrt{\mathbf{cx^2+dx+e}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.35. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Решење. Потребно је да трансформишемо израз $4-2x$ у $-3-8x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{-2+x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{-8}\int \frac{16-8x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{-8x-3+3+16}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\underbrace{\int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + 19\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}}_{I_2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} 1-3x-4x^2=t \\ (-8x-3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \\ &= 2\sqrt{1-3x-4x^2} + C,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-x^2}} \\
&= \left(\ \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}x-x^2 = -(x^2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}) = -\big((x+\tfrac{3}{8})^2-\tfrac{9}{64}-\tfrac{1}{4}\big) = \tfrac{25}{64}-(x+\tfrac{3}{8})^2 \ \right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{25}{64}-(x+\frac{3}{8})^2}} = \begin{pmatrix} x+\frac{3}{8}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{25}{64}-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{5}{8}}+C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{5}t+C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{5}+C,
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{1-3x-4x^2}+\frac{19}{2}\arcsin\frac{8x+3}{5}\right)+C.
$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{cos(ax+b)cos(cx+d)}\ \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int \mathbf{sin(ax+b)cos(cx+d)}\ \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int \mathbf{sin(ax+b)sin(cx+d)}\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.36. Решити интеграл $\int \cos 3x \cos 4x \,\mathrm{d}x$.

Решење. Коришћењем тригонометријске формуле

$$\cos\alpha+\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

добијамо

$$\int \cos 3x\cos 4x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos 7x+\cos x\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

△

1.2 Парцијална интеграција

Нека су u, v диференцијабилне функције. Тада важи

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv-\int v\,\mathrm{d}u.$$

Задатак 1.37. Решити интеграл $I=\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \arccos x \,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \arccos x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(\begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t \end{array} \right) = \int \frac{(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{-2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\sqrt{t} + \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

△

Задатак 1.38. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \arcsin x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{x} \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \left(\begin{array}{c} 1-x^2 = t^2, t \geq 0 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right) \\ &= \int \frac{-t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)t} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C, \end{aligned}$$

$$I = -\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

△

Задатак 1.39. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array} \right) = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} &= \left(\begin{array}{c} x = t^2, t \geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right) = \int \frac{2t^3\,\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C, \end{aligned}$$

$$I = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

△

Задатак 1.40. Решити интеграл $I = \displaystyle\int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = (\arcsin x)^2 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\
&= x(\arcsin x)^2 - 2\int x \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} & u = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & \\ \mathrm{d}v = \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & \Rightarrow \quad v = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{pmatrix} 1 - x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \\
&= x(\arcsin x)^2 - 2\left(-\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)sin(ax+b)} \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)cos(ax+b)} \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)e^{ax}} \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Ови интеграли се решавају парцијалном интеграцијом тако што узмемо $u = P_n(x)$.

Задатак 1.41. Решити интеграл $I = \displaystyle\int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x \, \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = x^2 + 3x - 4 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = (2x+3)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x \, \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (2x+3)\cos 2x \, \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = 2x + 3 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x & \Rightarrow & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{f(x)ln(g(x))}\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.42. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v=\sqrt{1+x^2} \end{array} \right) \\ &= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{sin^n x}\ \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \textbf{и} \quad \int \mathbf{cos^n x}\ \mathrm{d}\mathbf{x}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}$$

Задатак 1.43. Доказати једнакости

$$I_n = \frac{1}{n}\left(-\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}\right) + C,$$

$$J_n = \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1}x\sin x + (n-1)J_{n-2}\right) + C,$$

где је $I_n = \int \sin^n x\ \mathrm{d}x, J_n = \int \cos^n x\ \mathrm{d}x, n \geq 2$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1}x\sin x\ \mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u=\sin^{n-1}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u=(n-1)\sin^{n-2}\cos x\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\ \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v=-\cos x \end{array} \right) \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\ \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\ \mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\ \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Добили смо

$$I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

одакле је

$$I_n = \frac{1}{n}\left(-\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}\right) + C.$$

Слично доказујемо и другу једнакост.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \cos^{n-1} x \cos x \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \cos^{n-1} x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x \,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = \sin x \end{pmatrix} \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int \cos^n x \,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.
\end{aligned}$$

Добили смо

$$J_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n,$$

одакле је

$$J_n = \frac{1}{n} \left(\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2} \right) + C.$$

△

Задатак 1.44. Решити интеграле $I_1 = \displaystyle\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \cos bx & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -b \sin bx \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^{ax} & \Rightarrow & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \sin bx & \Rightarrow & \mathrm{d}u = b \cos bx \\ \mathrm{d}v = e^{ax} & \Rightarrow & v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int \cos bx e^{ax} \right) \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int \cos bx e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I_1.
\end{aligned}$$

Добили смо да је

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

На сличан начин се добија

$$I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

△

Задатак 1.45. Решити интеграл $I = \displaystyle\int e^{2x} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int e^{2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int e^{2x} \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x \,\mathrm{d}x \\
&= (\text{задатак}1.44) = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{e^{2x}(2 \cos 2x + 2 \sin 2x)}{8} + C = \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.46. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array}\right) \\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array}\right) \\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I.
\end{aligned}$$

Добили смо да важи $I = \dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I$, односно

$$I = \frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{|\cos t|}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{\cos t}}\,\mathrm{d}t = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= (\text{задатак}1.44) = \frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} + C = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}(\sin(\operatorname{arctg} x) - \cos(\operatorname{arctg} x))}{2} + C.
\end{aligned}$$

Из једнакости $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ имамо

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{и} \quad \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}},$$

па је

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \pm\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Искористили смо то да из $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ следи $\cos(\ x) > 0$, $\sin(\operatorname{arctg} x) > 0$ за $x > 0$ и $\sin(\operatorname{arctg} x) < 0$ за $x < 0$.

Према томе, $I = \frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg} x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) + C = \frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + C$. △

Задатак 1.47. Решити интеграле $I_1 = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \sin(\ln x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array}\right) \\
&= x\sin(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - I_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \cos(\ln x) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\
&= x\cos(\ln x) + \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I_1.
\end{aligned}$$

Добили смо $I_1 + I_2 = x\sin(\ln x), I_2 - I_1 = x\cos(\ln x)$, одакле је

$$I_1 = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C, \quad I_2 = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C.$$

$\triangle$

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \sqrt{\mathbf{ax^2 + c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.48. Решити интеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a > 0)$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \sqrt{a^2 - x^2} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x = a\sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\
&= \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.
\end{aligned}$$

Имамо тригонометријску једнакост

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Из $\sin(\arcsin\alpha) = \alpha$, следи да је $\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$, а из $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, следи да је $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Из $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ следи да је $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) \geq 0$, одакле је $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Према томе,

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) = 2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

и

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

$\triangle$

Задатак 1.49. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\sqrt{x^2+a^2} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. $\triangle$

Задатак 1.50. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\sqrt{x^2-a^2} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a\cosh t$.

$\triangle$

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.51. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \sqrt{2x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{2x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\ x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2} = (x-\tfrac{1}{4})^2-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2} = (x-\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{16}\ \right) = \sqrt{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{4}=t\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right) = \sqrt{2}\int\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}\,\mathrm{d}t = (\text{задатак } 1.49)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}t\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{7}{16}}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}\right|+C\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}+\frac{7\sqrt{2}}{32}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\right|+C\\
&= \frac{1}{8}(4x-1)\sqrt{2x^2-x+1}+\frac{7\sqrt{2}}{128}\ln\left|4x-1+\sqrt{16x^2-8x+8}\right|+C
\end{aligned}$$

$\triangle$

Интеграл типа

$$\mathbf{I}=\int(\mathbf{ax}+\mathbf{b})\sqrt{\mathbf{cx^2}+\mathbf{ex}+\mathbf{f}}\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.52. Решити интеграл $\int(3x+1)\sqrt{2x^2+x-1}\ \mathrm{d}x$.

Интеграл типа

$$\mathbf{I}=\int\mathbf{x^2}\sqrt{\mathbf{a^2}+\mathbf{x^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.53. Решити интеграл $I=\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\begin{array}{c} u=x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ v=\int x\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\left(\begin{array}{c}a^2+x^2=t^2\\ 2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right)=\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\end{array}\right)\\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{3}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right].
\end{aligned}$$

Добили смо

$$I = \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}I-\frac{a^2}{6}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{6}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

одакле је

$$I = \frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a\operatorname{tg} t$. △

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int (\mathbf{bx^2} + \mathbf{cx} + \mathbf{d})\sqrt{\mathbf{a^2}+\mathbf{x^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.54. Решити интеграл $I = \displaystyle\int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Интеграл типа

$$\mathbf{I_n} = \int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x^2}+\mathbf{a^2})^{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x},\ (\mathbf{n}\in\mathbb{N}, \mathbf{n}\geq \mathbf{2})$$

Задатак 1.55. Решити интеграл $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \frac{1}{x^2+a^2} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{-2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} = \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - 2a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - 2a^2 I_2.
\end{aligned}$$

Добили смо

$$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - 2a^2 I_2,$$

одакле је

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C.$$

△

Задатак 1.56. Решити интеграл $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x,\ (n\geq 2)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = (1-n)\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(1-n)a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - 2(1-n)I_{n-1} + 2(1-n)a^2 I_n.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right].$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{ax^2+bx+c})^{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.57. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left(x^2+x+1 = (x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + 1 = (x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\right) \\ &= \int \frac{1}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x+\frac{1}{2} = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}x = (\text{задатак } 1.55) \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}}\left[\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\right] + C = \frac{2}{3}\left[\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] + C. \end{aligned}$$

△

1.3 Интеграција рационалних функција

Представимо рационалну функцију $R(x)$ у облику

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где је степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ ($d^\circ P_1(x) < d^\circ Q(x)$).

Затим, рационалну функцију $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можемо представити на следећи начин

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{P_1(x)}{A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}} \\ &= \left[\frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right] + \left[\frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}\right] \\ &\quad +... + \left[\frac{A_{p,1}}{x-a_p} + \frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A_{1,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right] \\ &\quad + \left[\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}\right] \\ &\quad + \left[\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + ... + \frac{B_{2,l_2}x+C_{2,l_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}}\right] \\ &\quad +... + \left[\frac{B_{q,1}x+C_{q,1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B_{q,2}x+C_{q,2}}{(x^2+b_qx+c_q)^2} + ... + \frac{B_{q,l_q}x+C_{q,l_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right], \end{aligned}$$

при чему су квадратни триноми $x^2+b_ix+c_i$ нерастављиви. Сабирке на десној страни једнакости зваћемо правим разломцима.

Задатак 1.58. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Представљањем рационалне функције преко правих разломака добијамо

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2},$$

одакле множењем и леве и десне једнакости са $(x-1)^2(x+2)$ имамо

$$x \equiv A(x^2+x-2) + B(x+2) + C(x^2-2x+1),$$

односно за свако x важи

$$x \equiv x^2(A+C) + x(A+B-2C) + (-2A+2B+C).$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене имамо систем

$$\begin{aligned} A+C &= 0\\ A+B-2C &= 1\\ -2A+2B+C &= 0, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{2}{9}$. Сада интеграл можемо израчунати

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2} \right) \mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.59. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Запишимо интеграл у следећем облику

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right) \mathrm{d}x.$$

Рационалну функцију запишимо преко правих разломака

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

одакле множењем са $x(x-2)(x-3)$ добијамо да за свако x важи

$$5x^2-6x+1 \equiv x^2(A+B+C) + x(-5A-3B-2C) + 6A.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A+B+C &= 5,\\ -5A-3B-2C &= -6,\\ 6A &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{2}, C = \frac{28}{3}$. Према томе,

$$I = \int \left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-2} + \frac{\frac{28}{3}}{x-3}\right) = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C.$$

△

Задатак 1.60. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Множењем израза

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$$

са $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ добијамо

$$\begin{aligned} 1 \equiv\ & A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3(x+2) + D(x+1)(x+2)^2 \\ +\ & E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2. \end{aligned}$$

Замењујући x редом са $-1, -2, -3$, налазимо да је $A = \frac{1}{8}, B = -1, D = -\frac{1}{2}$. Затим, изједначавањем коефицијената уз x^5, x^4, x^3 добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + F, \\ 0 &= 13A + B + 12C + E + 11F, \\ 0 &= 67A + 10B + 56C + D + 8E + 47F. \end{aligned}$$

Из прве једначине је $F = -C - \frac{1}{8}$. Заменом у другу и трећу добијамо

$$C + E = \frac{3}{4}, \quad 9C + 8E = 8,$$

па је $C = 2, E = -\frac{5}{4}$ и $F = -\frac{17}{8}$. Сада можемо израчунати интеграл

$$I = \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C.$$

△

Задатак 1.61. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Представљањем подинтегралне функције у облику

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

добијамо да за свако x важи

$$1 \equiv A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2,$$

односно

$$x^3(A+C) + x^2(-4C-6A+D+B) + x(4C-4D+13A-4B) + 4D - 10A + 5B = 1.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -6A + B - 4C + D &= 0 \\ 13A - 4B + 4C - 4D &= 0 \\ -10A + 4D + 5B &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A = 0, B = 1, C = 0, D = -1$, па је интеграл једнак

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5} = \frac{1}{2-x} - \operatorname{arctg}(2-x) + C. \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 1.62. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Растављењем следећег полинома

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

имамо

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Из идентитета

$$1 \equiv (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 0 &= A+C, \\ 0 &= -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D, \\ 0 &= A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D, \\ 1 &= B+D, \end{aligned}$$

чија су решења $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = D = \frac{1}{2}$. Одатле,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)) + C. \end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 1.63. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Растављењем полинома

$$\begin{aligned} x^6+1 &= (x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+1)(x^4+2x^2+1-3x^2) = (x^2+1)((x^2+1)^2-3x^2) \\ &= (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

имамо

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned} 1 \ \equiv \ & x^5(A+C+E)+x^4(-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D+F)+x^3(2A-\sqrt{3}B+2C+\sqrt{3}D-E) \\ & +x^2(-\sqrt{3}A+2B+\sqrt{3}C+2D-F)+x(A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D+E)+B+D+F. \end{aligned}$$

Систем је

$$\begin{aligned} A+C+E &= 0, \\ -\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D+F &= 0, \\ 2A-\sqrt{3}B+2C+\sqrt{3}D-E &= 0, \\ -\sqrt{3}A+2B+\sqrt{3}C+2D-F &= 0, \\ A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D+E &= 0, \\ B+D+F &= 1 \end{aligned}$$

и има решење $A=\frac{\sqrt{3}}{6}, B=\frac{1}{3}, C=-\frac{\sqrt{3}}{6}, D=\frac{1}{3}, E=0, F=\frac{1}{3}$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} - 2\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}-2x) + 2\mathrm{arctg}\,(2x+\sqrt{3}) + 4\mathrm{arctg}\,x\right) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.64. Решити интеграл $I=\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x-1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{97}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{98}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{99}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{100}} = -\frac{1}{96t^{96}} - \frac{3}{97t^{97}} - \frac{3}{98t^{98}} - \frac{1}{99t^{99}} + C \\ &= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.65. Решити интеграл $I=\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x^4(x^8+3x^4+2)} = \left(\begin{array}{c} x^4=t \\ 4x^3\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{3}\int \frac{(t-3)\,\mathrm{d}t}{t(t^2+3t+2)}$$

Множењем израза

$$\frac{(t-3)\,\mathrm{d}t}{t(t^2+3t+2)} = \frac{(t-3)\,\mathrm{d}t}{t(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+1}$$

са $t(t+2)(t+1)$ добијамо

$$t-3 \equiv A(t+2)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t+2).$$

Узимајући редом $t = 0, -1, -2$, добијамо $A = -\frac{3}{2}, B = -\frac{5}{2}, C = 4$. Одавде је

$$I = -\tfrac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \tfrac{5}{8}\ln|t+2| + C = -\tfrac{3}{8}\ln|x^4| + \ln|x^4+1| - \tfrac{5}{8}\ln|x^4+2| + C.$$

△

Задатак 1.66. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^n x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{x^n+1} = \left(\begin{array}{c} x^n = t \\ nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{n}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}(t - \ln|t+1|) + C = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + C.\end{aligned}$$

△

Метода Остроградског

Задатак 1.67. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Представимо интеграл у следећем облику

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}\right)\mathrm{d}x.$$

Ако диференцирамо добијамо

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} &= \frac{(Ax^2+Bx+C)'(x-1)(x+1)^2 - (Ax^2+Bx+C)[(x-1)(x+1)^2]'}{(x-1)^2(x+1)^4} \\ &\quad + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}.\end{aligned}$$

Одавде се множењем са $(x-1)^2(x+1)^4$ долази до једнакости

$$x \equiv -Ax^3 + (A-2B)x^2 + (-2A+B-3C)x + C - B + D(x-1)(x^3+3x^2+3x+1) + E(x^4-2x^2+1).$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене имамо систем

$$\begin{aligned} 0 &= D+E, \\ 0 &= -A+2D, \\ 0 &= A-2B-2E, \\ 1 &= -2A+B-3C-2D, \\ 0 &= C-B-D+E, \end{aligned}$$

чија су решења $A = B = -\frac{1}{8}, C = -\frac{1}{4}, D = -E = -\frac{1}{16}$. Следи,

$$I = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \int \left(\frac{-\frac{1}{16}}{x-1} + \frac{\frac{1}{16}}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

△

1.4 Интеграција ирационалних функција

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

решавамо сменом $ax+b=t^n, t\geq 0$.

Задатак 1.68. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 2+x=t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{3t^3(t^3-2)}{t^3-2+t}\,\mathrm{d}x = \\ &= 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3-2+t}\,\mathrm{d}x = 3\int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{t^3-2+t}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Представљањем рационалне функције помоћу правих разломака добијамо

$$\frac{t^2-2t}{t^3-2+t} = \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2},$$

одакле множењем једнакости са $(t-1)(t^2+t+2)$ и изједначавањем коефицијената имамо систем

$$\begin{aligned} 1 &= A+B, \\ -2 &= A-B+C, \\ 0 &= 2A-C, \end{aligned}$$

чије је решење $A=-\frac{1}{4}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{1}{2}$.

Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 3\int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{t^3-2+t}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4}t^4 - \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \tfrac{15}{4}\int \frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{3}{4}\ln|t-1| + \tfrac{15}{8}\ln|t^2+t+2| - \tfrac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t+1}{\sqrt{7}} + C \\ &= \tfrac{3}{4}(2+x)^{\frac{4}{3}} - \tfrac{3}{2}(2+x)^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{4}\ln|\sqrt[3]{2+x}-1| + \tfrac{15}{8}\ln|(2+x)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{2+x}+2| \\ &\quad -\tfrac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\tfrac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt[\mathbf{n}]{\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

решавамо сменом $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n, t\geq 0$.

Задатак 1.69. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}, \quad (a>0)$.

Решење. Подинтегрална функција је дефинисана за $x \in (0, a)$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^4 \cdot \frac{a-x}{x}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} \overbrace{=}^{x>0} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = \left(\begin{array}{c} \frac{a-x}{x} = t^4, t \geq 0 \\ x = \frac{a}{1+t^4} \\ \mathrm{d}x = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right) \\
&= -\int \frac{4at^3}{\frac{a}{1+t^4}t(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{4at^3}{at(1+t^4)}\,\mathrm{d}t = -4\int \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= (\text{интеграл рационалне функције}) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\,(1 - \sqrt{2}t) - \sqrt{2}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t + 1) + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(1 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1\right) + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(1 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1\right) + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.70. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^{\frac{n+1}{n}}(x-b)^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(x-a)^{\frac{n+1}{n}}(x-b)^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-a)^{1+\frac{1}{n}}(x-b)^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x-a)(x-a)^{\frac{1}{n}}(x-b)(x-b)^{-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\begin{array}{c} \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}} = t \\ x(1-t^n) = a - bt^n \\ x = \frac{a-bt^n}{1-t^n} \\ \mathrm{d}x = \frac{-bnt^{n-1}(1-t^n)-(a-bt^n)(-nt^{n-1})}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-bnt^{n-1}+a(nt^{n-1})}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(a-b)}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right) \\
&= \int \frac{1}{(\frac{a-bt^n}{1-t^n} - a)(\frac{a-bt^n}{1-t^n} - b)t} \cdot \frac{nt^{n-1}(a-b)}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= n(a-b)\int \frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{(a - bt^n - a + at^n)(a - bt^n - b + bt^n)t} \\
&= n(a-b)\int \frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{(-bt^n + at^n)(a-b)t} = \frac{n}{a-b}\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{b-a}\cdot\frac{1}{t} + C \\
&= \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C
\end{aligned}$$

$\triangle$

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{P_n(x)}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

се може решити методом Остроградског за ирационалне функције тако што интеграл представимо у следећем облику

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Задатак 1.71. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Нека постоје константе A, B, C, λ тако да је

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Диференцирањем добијамо

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2} + (Ax^2+Bx+C)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

а одавде множењем са $\sqrt{1+2x-x^2}$ имамо

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2) + (Ax^2+Bx+C)(1-x) + \lambda,$$

односно

$$x^3 = x^3(-3A) + x^2(5A-2B) + x(2A+3B-C) + (B+C+\lambda).$$

Из система

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ 5A-2B &= 0, \\ 2A+3B-C &= 0, \\ B+C+\lambda &= 0, \end{aligned}$$

добијамо константе $A=-\frac{1}{3}, B=-\frac{5}{6}, C=-\frac{19}{3}, \lambda=4$. Дакле, интеграл је једнак

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left(-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{5}{6}x-\tfrac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= \left(-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{5}{6}x-\tfrac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$\triangle$

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

решавају се следећим Ојлеровим сменама:

1) Ако је $a > 0$, онда ћемо узети прву Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$;

2) Ако је $c > 0$, онда ћемо узети другу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$;

3) Ако је $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, онда ћемо узети трећу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c} = a(x-x_1)t$.

Задатак 1.72. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} &= \left(\begin{array}{c} a=1>0, c=1>0 \\ \sqrt{x^2+x+1} = \pm x + t \quad \text{прва Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2+x+1} = tx \pm 1 \quad \text{друга Ојлерова смена} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \text{изабраћемо прву Ојлерову смену } x + \sqrt{x^2+x+1} = -x+t \\ x^2+x+1 = x^2-2xt+t^2 \\ x(1+2t) = t^2-1 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right) \\
&= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Разлагање подинтегралне функције тражимо у облику

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{(1+2t)^2} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{t}.$$

За одређивање непознатих A, B и C добијамо систем

$$\begin{aligned}
2 &= 2B + 4C \\
2 &= A + B + 4C \\
2 &= C,
\end{aligned}$$

чија су решења $A = -3, B = -3, C = 2$. Одавде је

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t &= -3\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}t}{1+2t} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C \\
&= \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}|^3} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.73. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= \left(\begin{array}{c} c=1>0, \text{ друга Ојлерова смена} \\ \sqrt{1-2x-x^2} = xt-1 \\ x = \frac{2t-2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2(1+t^2)-(2t-2)2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right) \\
&= \int \frac{\frac{-t^2+2t+1}{(1+t^2)^2}}{\frac{t-1}{1+t^2}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке, имамо

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

одакле следи

$$-t^2+2t+1 \equiv A(t^3-t^2+t-1) + B(t^3+t) + (Ct+D)(t^2-t)$$

и систем који се добија изједначавањем коефицијената уз исте степене

$$\begin{aligned} 0 &= A+B+C, \\ -1 &= -A-C+D, \\ 2 &= A+B-D, \\ 1 &= -A. \end{aligned}$$

Решење система је $A=-1, B=1, C=0$ и $D=2$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + 2\operatorname{arctg} t + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.74. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} x^2+3x+2=(x+1)(x+2),\ \text{трећа Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1) \\ x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\ \mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} \end{pmatrix} \\ &= -\int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-t(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+t(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)} \cdot \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке добијамо

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{(t+1)^3} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{t-2},$$

одакле, изједначавањем коефицијената уз исте степене и решавањем система, имамо $A=\frac{1}{3}, B=\frac{5}{18}, C=-\frac{17}{108}, D=\frac{3}{4}$ и $E=-\frac{16}{27}$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| + C \\ &= -\frac{1}{6(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1)^2} - \frac{5}{18(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1)} - \frac{17}{108}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1\right| \\ &\quad + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-1\right| - \frac{16}{27}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-2\right| + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{x^m(a+bx^n)^p}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

где је $m, n, p \in \mathbb{Q}$, своди се на интеграл рационалне функције у следећа три случаја:

1) Ако је $p \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $x = t^{NZS\{imen(m), imen(n)\}}$, где су $imen(m), imen(n)$ имениоци бројева m и n.
2) Ако је $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $a + bx^n = t^{imen(p)}$.
3) Ако је $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $ax^{-n} + b = t^{imen(p)}$.

Задатак 1.75. Решити интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{-\frac{2}{3}})^{-2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} m=\frac{1}{2}, n=-\frac{2}{3}, p=-2, a=1, b=1 \\ p \in \mathbb{Z} \\ x = t^{NZS\{2,3\}} = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} = 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\operatorname{arctg} t + C \\
&= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.76. Решити интеграл $\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^4(x^{-1}+1)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\sqrt{x^{-1}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} m=2, n=-1, p=\frac{1}{2}, a=1, b=1 \\ \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \\ 1+\frac{1}{x} = t^2, t \geq 0 \\ x = \frac{1}{t^2-1},\ \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} \end{pmatrix} = -2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^4}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^2}{(t^2-1)^4} = \frac{-\frac{1}{32}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t+1)^4} + \frac{\frac{1}{32}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t-1)^4}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^4} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^4}\right) + C \\
&= \frac{1}{16}\left(\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(t+1)^3} - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(t-1)^3}\right) + C \\
&= \frac{1}{16}\Bigg(\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right| - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)^3} - \ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right| \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)^3}\Bigg) + C
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.77. Израчунати интеграл $\int \sqrt[3]{3x - x^3}\, \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{3x - x^3}\, \mathrm{d}x &= \int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3 - x^2}\, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}, a = 3, b = -1 \\ \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \\ 3x^{-2} - 1 = t^3, \\ x = \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\, \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(3 - \frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{3t^3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{9}{2}\int \frac{t^3}{(t^3+1)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{9}{2}\int \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{3-t}{t^2-t+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{t-1}{(t^2-t+1)} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(t+1)^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\left(-\frac{6t}{t^3+1} - \ln(t^2 - t + 1) + 2\ln(t+1) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= -\frac{1}{4}\left(-\frac{6(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{-2}} - \ln\left((3x^{-2})^{\frac{2}{3}} - (3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} + 1\right)\right. \\
&\quad \left. +2\ln\left((3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} + 1\right) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} - 1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2\sqrt{ax^2+bx}}} \quad \textbf{и} \quad \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}}$$

се ради сменом $x = \frac{1}{t}$

Задатак 1.78. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax^2+bx}}$.

Решење. Први начин.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax^2+bx}} = \begin{pmatrix} x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a+bt^2}} = -\frac{1}{b}\sqrt{a+bt^2} + C = -\frac{ax^2+b}{bx} + C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\, t$.

△

Задатак 1.79. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}$.

Решење. Први начин.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}} = \left(\begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2} \end{array} \right) = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(a+bt^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{a+bt^2}} + C = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}} + C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x = \frac{b}{a}\mathrm{tg}\, t$. △

Задатак 1.80. Решити интеграл $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Ако Ојлеровом сменом дођемо до компликоване рационалне функције онда ћемо радити на други начин. Сваку рационалну функцију $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ аргумената x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ можемо свести на облик

$$R_1(x) + \frac{R_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где су $R_1(x)$ и $R_2(x)$ рационалне функције. Интеграл рационалне функције $R_1(x)$ смо детаљно образложили раније, а интеграл од $\frac{R_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ћемо урадити тако што $R_2(x)$ представимо помоћу правих разомака и добијемо интеграле облика

$$\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{Q(x)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{S(x)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

где је $m \in \mathbb{N}$,$p^2-4q<0$ и полиноми $P(x), Q(x)$ и $S(x)$ полиноми степена редом $m, m-1$ и $2m-1$.

Први од интеграла ради се методом Остроградског за ирационалне функције. Други интеграл се сменом $x-a=\frac{1}{t}$ своди на интеграл првог типа. Трећим интегралом се нећемо детаљно бавити.

1.5 Интеграција тригонометријских функција

Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$

1) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\cos x = t$.

2) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\sin x = t$.

3) Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\mathrm{tg}\, x = t$, при чему је $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

4) Универзална смена је $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$ и узима се када не важи ниједна од претходних једнакости. Код ове смене важи $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Задатак 1.81. Решити интеграл $\int \frac{\sin x \cos x}{1-\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ увешћемо смену $\cos x = t$ и добијамо

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{1-\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t}{1-(1-t^2)t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t}{1-t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = t^2 \\ \mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\cos^2 x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.82. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ узећемо смену $\mathrm{tg}\, x = t$ и добијамо

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= \begin{pmatrix} \mathrm{tg}\, x = t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}} \\
&= \int \frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t}{(t-\frac{1}{t})^2+2} = \begin{pmatrix} t-\frac{1}{t} = u \\ \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\, x-\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.83. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

Решење. С обзиром да је

$$R(-\sin x, \cos x) \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) \neq R(\sin x, \cos x),$$

узећемо смену $\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5} &= \begin{pmatrix} \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = t \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} \\
&= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t-1+t^2+5(1+t^2)} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{6t^2+4t+4} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,\frac{3\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.84. Решити интеграл $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac14\sin^2 2x}{(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\frac14\sin^2 2x}{((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\frac14\sin^2 2x}{(1-\frac12\sin^2 2x)^2-\frac18\sin^4 2x}\,\mathrm{d}x=(2x=u)=\frac12\int\frac{\frac14\sin^2 u}{(1-\frac12\sin^2 u)^2-\frac18\sin^4 u}\,\mathrm{d}u\\
&= \left(\operatorname{tg} u=t,\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\sin^2 u=\frac{t^2}{1+t^2}\right)=\frac12\int\frac{\frac14\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(1-\frac12\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2-\frac18\frac{(t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&= \int\frac{t^2}{t^4+8t^2+8}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt2-2}{4\sqrt{2-\sqrt2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt2}}+\frac{\sqrt2}{4\sqrt{2-\sqrt2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2(2+\sqrt2)}}+C\\
&= \frac{\sqrt2-2}{4\sqrt{2-\sqrt2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt2}}+\frac{\sqrt2}{4\sqrt{2-\sqrt2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2(2+\sqrt2)}}+C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.85. Решити интеграл $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.86. Решити интеграл $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} &= \begin{pmatrix}\cos x=t\\ -\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{2-t^2}}=-\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{2-t^2}}\\
&= \begin{pmatrix}2-t^2=u^2,u\ge 0\\ -2t\,\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u\end{pmatrix}=\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{(2-u^2)u}=\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}\\
&= \frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{u+\sqrt2}{u-\sqrt2}+C=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt2}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt2}+C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.87. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}}$.

Решење. За $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ важи

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt[4]{2\cos^2 x - 1}} = \begin{pmatrix} \cos x = t, \\ -\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)\sqrt[4]{2t^2-1}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2-1)\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4} = u^4, u \geq 0 \\ \left(-\frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^5}\right)\mathrm{d}t = 4u^3\,\mathrm{d}u \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{\left(-\frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^5}\right)\mathrm{d}t}{\left(-\frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^5}\right)t(t^2-1)\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}}} = \int \frac{\left(-\frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^5}\right)\mathrm{d}t}{4\left(-\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4}\right)(t^2-1)\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}}} \\
&= \int \frac{\left(-\frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^5}\right)\mathrm{d}t}{4\left(-1 + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}\right)\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}}} = \int \frac{4u^3\,\mathrm{d}u}{4\left(u^4-1\right)u} = \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4-1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, u + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}} - 1}{\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}} + 1}\right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^4}} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} - 1}{\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} + 1}\right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} + C.
\end{aligned}$$

За $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ важи

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} - 1}{\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} + 1}\right| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}} + C.$$

△

1.6 Интеграција трансцендентних функција

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(\mathbf{e}^{\mathbf{a_1 x}}, \mathbf{e}^{\mathbf{a_2 x}}, ..., \mathbf{e}^{\mathbf{a_n x}})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

се ради сменом $e^x = t$.

Задатак 1.88. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} &= \begin{pmatrix} e^x = t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{pmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[6]{t})} = \begin{pmatrix} t = u^6 \\ \mathrm{d}t = 6u^5\,\mathrm{d}u \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{6u^5\,\mathrm{d}u}{u^6(1+u^3+u^2+u)} = 6\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u^2+1)(u+1)}.
\end{aligned}$$

Представљањем последње подинтегралне функције помоћу правих разломака

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u^2+1)(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

и множењем са $u(u^2+1)(u+1)$ имамо

$$1 \equiv A + B + (A+D)x + (A+B+C+D)x^2 + (A+C)x^3,$$

одакле је $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$. Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 6\left(\frac{\frac{1}{2}}{u} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} + \frac{-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}}{u^2+1}\right) \\ &= -3\operatorname{arctg} u + 6\ln|u| - 3\ln|1+u| - \frac{3}{2}\ln(1+u^2) + C \\ &= -3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{t} + \ln|t| - 3\ln|1+\sqrt[6]{t}| - \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[3]{t}) + C \\ &= -3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} + x - 3\ln|1+e^{\frac{x}{6}}| - \frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}}) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.89. Доказати да важи

$$\int P_n(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x = e^{ax}\left(\frac{P_n(x)}{a} - \frac{P_n'(x)}{a^2} + \frac{P_n''(x)}{a^3} - \ldots + (-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C,$$

за сваки полином $P_n(x)$ степена n.

Задатак 1.90. Решити интеграле $I_1 = \int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x, I_2 = \int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.91. Решити интеграл $\int xe^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) + C$ △

1.7 Разни задаци

Задатак 1.92. Решити интеграл $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+1}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{x}=t \\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.93. Израчунати интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{x}=t \\ \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.94. За $a > 0$ израчунати интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2a}+x^a+1}}$, $x > 0$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2a}+x^a+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{a+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^a}+\frac{1}{x^{2a}}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^a} = t \\ -\frac{a\,\mathrm{d}x}{x^{a+1}} = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{-1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+t^2}} \\
&= \frac{-1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \frac{-1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{-1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2+x^a}{\sqrt{3}x^a} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.95. Решити интеграл $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Решење.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \arcsin x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t + \int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t & \Rightarrow & v = -\operatorname{ctg} t \end{pmatrix} = -t\operatorname{ctg} t + \int \operatorname{ctg} t\,\mathrm{d}t = -t\operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int t\,\mathrm{d}t + \int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t\operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\operatorname{ctg}(\arcsin x) + \ln|x| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}\operatorname{ctg}(\arcsin x) + \ln|x| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln|x| + C.
\end{aligned}$$

У последњој једнакости смо искористили $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, па је $\cos(\arcsin x)$ ненегативна функција и важи $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. △

Задатак 1.96. Решити интеграл $I = \int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int (a\operatorname{tg}^2 t + b)t\,\mathrm{d}t = \int at\operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t + \frac{bt^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int t\operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t &= \begin{pmatrix} u = t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t & \Rightarrow & v = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} t - t \end{pmatrix} \\
&= t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t)\,\mathrm{d}t = t\operatorname{tg} t - t^2 + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= at\operatorname{tg}t - at^2 + a\ln|\cos t| + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^2}{2} + C \\ &= ax\operatorname{arctg}x + a\ln|\cos(\operatorname{arctg}x)| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg}x)^2}{2} + C \\ &= ax\operatorname{arctg}x - \frac{a}{2}\ln|1+x^2| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg}x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.97. Решити интеграл $I = \int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x = 2\operatorname{tg}t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \end{pmatrix} \\ &= \int (4\operatorname{tg}^2 t + 6\operatorname{tg}t + 1)\frac{4\,\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = 16\int \frac{\operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t}{\cos^3 t} + 24\int \frac{\operatorname{tg}t\,\mathrm{d}t}{\cos^3 t} + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} \\ &= 8\underbrace{\int \frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\cos^5 t}}_{I_1} + 12\underbrace{\int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^4 t}}_{I_2} + 2\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}}_{I_3}. \end{aligned}$$

У интеграле I_1 и I_3 увести смену $\sin x = t$, а у интеграл I_2 смену $t = \cos x$. △

Задатак 1.98. Решити интеграл $I = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$I = \int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Парцијалном интеграцијом у другом интегралу добијамо

$$\int \frac{e^x}{x} = \begin{pmatrix} u = \frac{1}{x} & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = e^x \end{pmatrix} = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

и заменом у првој једнакости имамо

$$I = e^x - 4\left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = e^x - \frac{4e^x}{x} + C = e^x\left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

△

Задатак 1.99. Израчунати интеграл $\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int 2x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

$$I_2 = \int 2x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - I_1.$$

Према томе,

$$\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} + C.$$

△

Задатак 1.100. Доказати да функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{t \leq x}(t^2 - t + 1), & x \leq \frac{1}{2}; \\ \sup\limits_{t \geq x}(t^2 - t + 1), & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

нема примитивну функцију.

Решење. △

На основу Теореме о средњој вредности следи да се две примитивне функције од функције f разликују за константу. Према томе, ако су F и G примитивне функције од f онда постоји $C \in \mathbb{R}$ тако да је $F - G = C$. Доказаћемо да постоји функција која нема примитивну функцију на датом интервалу (a, b). Заиста, ако $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ има примитивну функцију F на (a, b), онда применом Дарбуове теореме, $f = F'$
Велика класа функција која има примитивне функције на (a, b) је класа свих непрекидних функција $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$.
Затим, показаћемо да постоји функција која има примитивну функцију а није непрекидна. $\blacksquare$
Посматрајмо функцију $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Ова функција је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и $F'(x) = f(x)$. Функција f има примитивну функцију, а није непрекидна у $x = 0$.

2 Одређени интеграли

Теорема 2.1. *Нека је функција* $f\colon [A,B]\to\mathbb{R}$ *непрекидна, а функција* $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[A,B]$ *има непрекидан извод и при томе је* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, $[a,b]\subset[A,B]$. *Тада важи једнакост*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Задатак 2.1. Израчунати $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\begin{array}{ccc} u=\ln x & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ dv=\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x\end{array}\right)=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x+x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.2. Израчунати $\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{ccc} u=\mathrm{arctg}\,x & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ dv=x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right)=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(x-\mathrm{arctg}\,x)\Big|_0^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.3. Да ли се у интегралу $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, a\neq 0$ може увести смена $x=a\sin t$?

Решење. Може. △

Задатак 2.4. Да ли се у интегралу $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ може увести смена $x=a\sin t$?

Решење. Не може. △

Задатак 2.5. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Решење. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\\ = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\end{aligned}$$

при чему је функција $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Ова сума је управо интегрална сума за функцију $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ при подели $0=x_0<x_1<...<x_n=1$, где је $x_k=\frac{k}{n}$ и за избор $\varepsilon_k=\frac{k}{n}, k=1,2,...,n$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

△

Задатак 2.6. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\operatorname{arctg}\frac{2k+1}{2n}$.

Задатак 2.7. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

Задатак 2.8. Доказати помоћу интегралне суме да важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\left(\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Сума $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ је интегрална сума функције $f(x)=\ln(1-x)$, при подели $0=x_0<x_1<...<x_n=1$, $x_k=\frac{k}{n}$ и за избор $\varepsilon_k=\frac{k-1}{n}$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=-1.$$

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

△

Задатак 2.9. Нека је $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$, где је f интеграбилна функција на $[0,1]$. Доказати да постоји сегмент $[a,b]\subset[0,1]$ на коме је $f(x)>0$.

Решење. Ако у сваком сегменту $[a, b] \subset [0, 1]$ постоји тачка x тако да је $f(x) \leq 0$, онда за сваку поделу $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ можемо изабрати $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ тако да је $f(\varepsilon_i) \leq 0$. Тада интегрална сума $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)$ не би била позитивна и важило би $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$, што је контрадикција.

△

Задатак 2.10. Нека је f непрекидна функција на $[a, b]$. Доказати да је

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)\,\mathrm{d}x.$$

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} x = a+(b-a)t \\ \mathrm{d}x = (b-a)t \end{pmatrix} = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)t)\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.11. Израчунати интеграл $\int\limits_{0,5}^{2,5}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

Решење. У овом интегралу не можемо увести смену $x + \frac{1}{x} = t$ из два разлога. Један је зато што ћемо добити $t(0,5) = t(2)$, а други је јер не можемо јединствено изразити x преко t. Зато ћемо интеграл раставити на два интеграла и у оба увести смену $x + \frac{1}{x} = t$, при чему ћемо у првом имати $x = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, а другом $x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$.

$$\int\limits_{0,5}^{2}\Big(1+x-\frac{1}{x}\Big)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0,5}^{1}\Big(1+x-\frac{1}{x}\Big)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2}\Big(1+x-\frac{1}{x}\Big)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{2,5}^{2}\Big(1+\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t-\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{d}t$$

$$+\int\limits_{2}^{2,5}\Big(1+\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{2}{t+\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t d\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\Big(-\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}-\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\cdot\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}+\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}\frac{2}{t-\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t\,\mathrm{d}t$$

$$+\int\limits_{2}^{2,5}\Big(\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}+\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}\cdot\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\Big(-\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}+\frac{(t-\sqrt{t^2-4})^2}{4\sqrt{t^2-4}}-\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}$$

$$+\frac{(\sqrt{t^2-4}+t)^2}{4\sqrt{t^2-4}}-\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\Big(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{(t-\sqrt{t^2-4})^2}{4\sqrt{t^2-4}}-\frac{2}{\sqrt{t^2-4}}+\frac{(\sqrt{t^2-4}+t)^2}{4\sqrt{t^2-4}}\Big)e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\frac{e^t}{4\sqrt{t^2-4}}\Big(4t+(t-\sqrt{t^2-4})^2-8+(\sqrt{t^2-4}+t)^2\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\frac{e^t}{4\sqrt{t^2-4}}\Big(4t+t^2-2t\sqrt{t^2-4}+t^2-4-8+t^2-2t\sqrt{t^2-4}+t^2-4\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\frac{e^t}{4\sqrt{t^2-4}}\Big(4t+4t^2-16\Big)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{2}^{2,5}\frac{e^t}{\sqrt{t^2-4}}\Big(t+t^2-4\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{2}^{2,5}\frac{te^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4}}+\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,\mathrm{d}t.$$

Парцијалном интеграцијом у првом интегралу ($u = e^t, dv = \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4}}$) добијамо

$$\int\limits_{2}^{2,5}\frac{te^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4}}+\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,\mathrm{d}t = e^t\sqrt{t^2-4}\Big|_2^{2,5}-\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,\mathrm{d}t+\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,\mathrm{d}t$$

$$= e^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{3}{2}.$$

△

Задатак 2.12. Израчунати интеграл $I_n = \int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_n &= \int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{2} \ln[x]\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^{3} \ln[x]\,\mathrm{d}x + ... + \int\limits_n^{n+1} \ln[x]\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 1 \int\limits_1^{2} \mathrm{d}x + \ln 2 \int\limits_2^{3} \mathrm{d}x + ... + \ln n \int\limits_n^{n+1} \mathrm{d}x = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n = \ln n!. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.13. Нека је f непрекидна и периодична функција на $(-\infty, +\infty)$ са периодом T. Тада важи:

а) $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$, за свако $a, b \in \mathbb{R}$;

б) $\int\limits_a^{a+kT} f(x)\,\mathrm{d}x = k \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$, за свако $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$;

в) $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(x)\,\mathrm{d}x$ за свако $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Решење. а) Важи

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ако у другом интегралу уведемо смену $x - T = t$ добијамо

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ово важи за свако $a \in \mathbb{R}$, па одатле важи и једнакост $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

б)

$$\begin{aligned} \int\limits_a^{a+kT} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+T}^{a+2T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+2T}^{a+3T} f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int\limits_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = k \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

в)

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} t = x + kT \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right) = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(t - kT)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

△

Задатак 2.14. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

Решење. Не можемо увести смену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ јер је $\pi \in (0, 2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на два интеграла $\int\limits_0^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi}$ и у сваком уведемо смену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ је непрекидна на $[0, 2\pi]$, па је и Риман интеграбилна на $[0, 2\pi]$. Функција $f(x)$ је периодична (период је $T = 2\pi$) и парна, па важи

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} &= (\text{погледати задатак 2.13 а)}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\
&= (\text{функција је парна}) = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\
&= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})(3+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 4\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)(2t^2+4)} \\
&= 2\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{2}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= 2\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 0 = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.15. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$.

Решење. Овај интеграл није Риманов, већ несвојствен.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} &= \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty}(\ln|x+1| - \ln|x+2|) - (0 - \ln 2) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right) + \ln 2 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.16. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решење. Не можемо увести смену $t = \operatorname{tg} x$ јер је $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \in (0, 2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на три интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ и у сваком уведемо смену $t = \operatorname{tg} x$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x)=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ је непрекидна на $[0,2\pi]$, па је и Риман интеграбилна на $[0,2\pi]$. Функција $f(x)$ задовољава следећу једнакост $f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\sin^4(x+\frac{\pi}{2})+\cos^4(x+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}=f(x)$, одакле закључујемо да је периодична са периодом $\frac{\pi}{2}$ и важи

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= (\text{погледати задатак 2.13 б)})=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\\ &= (f(x)\text{ је парна})=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=4\int\limits_{-1}^{1}\frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}}\\ &= 4\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t=(\text{погледати задатак }\mathbf{??})=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 2.17. Ако је f непрекидна функција на $[0,1]$, онда је

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Решење. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\left(\begin{array}{c} t=\frac{\pi}{2}-x\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{array}\right)=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

б)

$$\begin{aligned}I=\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} t=\pi-x\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{array}\right)=-\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t-I,\end{aligned}$$

одакле је $2I=\pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$, односно

$$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

$\triangle$

Задатак 2.18. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Смена $\pi-x=t$. $\triangle$

Задатак 2.19. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x \ \mathrm{d}x}{\sin^m x + \cos^m x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x \,\mathrm{d}x}{\sin^m x + \cos^m x} = \begin{pmatrix} t = \frac{\pi}{2} - x \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^m(\frac{\pi}{2} - t)\,\mathrm{d}t}{\sin^m(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^m(\frac{\pi}{2} - t)} \\ &= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^m t\,\mathrm{d}t}{\cos^m t + \sin^m t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t\,\mathrm{d}t}{\cos^m t + \sin^m t}, \end{aligned}$$

одакле је

$$2I = I + I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x\,\mathrm{d}x}{\sin^m x + \cos^m x} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t\,\mathrm{d}t}{\cos^m t + \sin^m t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Према томе, $I = \frac{\pi}{4}$. △

Задатак 2.20. Израчунати интеграл $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u = \sin^{n-1} x \ \Rightarrow \ \mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,\mathrm{d}x \\ dv = \sin x\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ v = -\cos x \end{pmatrix} \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n, \end{aligned}$$

одакле добијамо $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Ако је $n = 2k$, тада је

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = ... = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots 2} I_0 \\ &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ако је $n = 2k-1$, тада је

$$\begin{aligned} I_{2k-1} &= \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} I_{2k-5} = ... = \frac{(2k-2)\cdot(2k-4)\cdot\ldots\cdot 2}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1} I_1 \\ &= \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} I_1 = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.21. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}$.

Решење. Сличан као задатак 2.20 △

Задатак 2.22. Израчунати интеграл $I_n = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, n \in \mathbb{N}$.

Решење. Сменом $x = \sin t$ своди се на задатак 2.20. △

Задатак 2.23. Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $[0,1]$ и $f(1) - f(0) = 1$. Доказати да је $\int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x \geq 1$.

Решење. Функција f је непрекидно диференцијабилна функција, па је $(f'(x))^2$ непрекидна на $[0,1]$, а одатле следи да је интеграл Риманов.

Потребно је доказати да важи $\int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 1 \geq 0$.

Имамо

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 1 &= \int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x - 1 \\
&= \int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2(f(1)-f(0)) - 1 \\
&= \int\limits_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + 1 = \int\limits_0^1 (f'(x)-1)^2 \,\mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.24. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 x \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} \,\mathrm{d}x$.

Решење. $2\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + -\operatorname{arctg} 2$. △

Задатак 2.25. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \ln x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \,\mathrm{d}x$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $(0,1]$. Из граничне вредности

$$\lim_{x\to 0_+} \ln x \, \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 0$$

следи да $x = 0$ није сингуларитет и интеграл је Риманов.

Применићемо Њутн Лајбницову формулу. Неодређени интеграл је

$$\begin{aligned}
\int \ln x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ dv=\ln x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x\ln x-x \end{pmatrix}\\
&= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x(\ln x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\ln x-1 & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ dv=\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} & \Rightarrow & v=\sqrt{1+x^2}\end{pmatrix}\\
&= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-(\ln x-1)\sqrt{1+x^2}+\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-(\ln x-1)\sqrt{1+x^2}+\int\frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

У последњем интегралу уведемо смену $1+x^2=t^2, t\geq 0$ и добијамо

$$\begin{aligned}
\int\frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\,\mathrm{d}t=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\
&= \sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.
\end{aligned}$$

Затим, примитивна функција је

$$F(x)=(x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\ln x+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.$$

Сада можемо применити Њутн Лајбницову формулу

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\ln x+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|\Bigg|_0^1\\
&= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}-1\right|\\
&\quad -\ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\Big|_0^1\\
&= F(1)-\lim_{x\to 0_+}F(x)=2\sqrt{2}-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-2+\ln 2.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 2.26. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+e^x)}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[-1,1]$, па је интеграл Риманов.

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+e^x)}=\begin{pmatrix} t=-x \\ \mathrm{d}t=-\,\mathrm{d}x\end{pmatrix}=-\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^{-t})}=\int_{-1}^{1}\frac{e^t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)}.$$

Одавде имамо

$$\begin{aligned} I+I &= \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+e^t)\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Према томе, $I = \frac{\pi}{4}$. △

Задатак 2.27. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} x\right)\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} x\right)\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \frac{\pi}{4} - x = t \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x \end{array} \right) = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2\cos t}{\cos t + \sin t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{4} - I. \end{aligned}$$

Одавде $I = \frac{\pi\ln 2}{8}$. △

Задатак 2.28. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0,1]$, а одатле и интеграбилна на $[0,1]$. Важи

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \end{array} \right) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int\limits_0^1 \ln(1+\operatorname{tg} t)\,\mathrm{d}t \\ &= (\text{погледати задатак 2.27}) = \frac{\pi\ln 2}{8}. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.29. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}$.

Решење. Први начин. Подинтегрална функција је непрекидна на $(0,\pi)$ и важи

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin nx}{\sin x}=n \quad \text{и} \quad \lim_{x\to \pi_-}\frac{\sin nx}{\sin x}=n\cdot(-1)^n.$$

Одавде видимо да је функција интеграбилна на $[0,1]$. Формирајмо разлику

$$\begin{aligned} I_n-I_{n-2} &= \int_0^\pi \frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{2\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^\pi=0, \end{aligned}$$

за $n\geq 2$. Према томе

$$I_{2n}=I_{2n-2}=...=I_2=\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$I_{2n-1}=I_{2n-3}=...=I_1=\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \mathrm{d}x=\pi.$$

Други начин. Из Ојлерових формула $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ и $\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ имамо

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}}{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \frac{e^{inx}}{e^{ix}}\cdot\frac{1-e^{-2inx}}{1-e^{-i2x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{inx}}{e^{ix}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}e^{-i2kx}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{inx}}{e^{ix}}\cdot e^{-i2kx}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1}e^{i(n-1-2k)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1}(\cos(n-1-2k)x+i\sin(n-1-2k)x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

За $n=2k$ имамо

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1}(\cos(n-1-2k)x+i\sin(n-1-2k)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+...+\cos x+\cos -x+...+\cos -(n-1)x) \\ &\quad +i\,(\sin(n-1)x+\sin(n-3)x+...+\sin x+\sin -x+...+\sin -(n-1)x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi (\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+...+\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^\pi+\frac{1}{n-2}\sin(n-2)x\Big|_0^\pi+...+\sin x\Big|_0^\pi\right)=0, \end{aligned}$$

а за $n = 2k - 1$ имамо

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(n-1-2k)x + i\sin(n-1-2k)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi (\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + ... + \cos 2x + \cos 0x + \cos -2x + ... + \cos -(n-1)x) \\
&\quad +i\,(\sin(n-1)x + \sin(n-3)x + ... + \sin 2x + \sin 0x + \sin -2x + ... + \sin -(n-1)x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\pi (\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + ... + \cos 2x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^\pi + \frac{1}{n-2}\sin(n-2)x\Big|_0^\pi + ... + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi + x\Big|_0^\pi\right) = \pi.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.30. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. $I = (-1)^n\pi$ △

Задатак 2.31. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x, a > 0$.

Решење. Сменом $t = \frac{1}{x}$ добијамо

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln\frac{1}{t}|}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{a}}^a |\ln t|\cdot\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t}\,\mathrm{d}t - I,
\end{aligned}$$

а одатле

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t}\,\mathrm{d}t = \left(\begin{array}{c} u = \ln t \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\ln a}^{\ln a} |u|\,\mathrm{d}u.$$

Ако је $a > 1$, онда је $I = \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\ln a}^0 u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\ln a}(-u)\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Big|_{-\ln a}^0 - \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln a} = \frac{\ln^2 a}{2}$.

Ако је $a = 1$, онда је $I = 0$.

Ако је $0 < a < 1$, онда је $I = -\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln^2 a}{2}$. △

Задатак 2.32. Нека су функције $f, g\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ растуће. Доказати

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \big(\text{у другом и четвртом интегралу уведемо смену } 1-x=t\ \big) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-t)g(1-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)g(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \big(\text{групишемо први са четвртим и други са трећим}\ \big) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x)-f(1-x))g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} (f(1-x)-f(x))g(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x)-f(1-x)][g(x)-g(1-x)]\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Функције f и g су растуће, а $x \leq 1-x$ за $x \in \big(0,\frac{1}{2}\big)$, па је $f(x)-f(1-x) \leq 0$ и $g(x)-g(1-x) \leq 0$. Према томе, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [f(x)-f(1-x)][g(x)-g(1-x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$. △

Задатак 2.33. Нека су дати интеграли $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, где је $n \in \mathbb{N}$.

а) Израчунати I_0.

б) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

в) Наћи a, b тако да важи $I_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Решење. а)

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x=t^2,\ t\geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} = 2\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u=t \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ dv = e^t\,\mathrm{d}t \Rightarrow v = e^t \end{pmatrix} \\
&= 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

За свако $x \in (0,1)$ важи $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, одакле је

$$\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n e\,\mathrm{d}x = e\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = e\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{e}{n+1},$$

а са друге стране имамо ограничење

$$\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Дакле, важи

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1},$$

одакле помоћу Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

в)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x = t^2,\ t \geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right) = 2\int_0^1 t^{2n+1}e^t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left(t^{2n+1}e^t\Big|_0^1 - (2n+1)\int_0^1 t^{2n}e^t\,\mathrm{d}t\right) = 2e - 2(2n+1)\int_0^1 t^{2n}e^t\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\begin{array}{c} u = t^{2n} \Rightarrow\ \mathrm{d}u = 2nt^{2n-1}\,\mathrm{d}t \\ dv = e^t\,\mathrm{d}t \Rightarrow v = e^t \end{array}\right) = 2e - 2(2n+1)\left(t^{2n}e^t\Big|_0^1 - 2n\int_0^1 t^{2n-1}e^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2e - 2(2n+1)(e - nI_{n-1}) = -4ne + 2n(2n+1)I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Добили смо $I_{n-1} = \dfrac{4ne + I_n}{2n(2n+1)}$, односно $I_n = \dfrac{(4n+4)e + I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Из $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ имамо $I_n = o(1)$, па је

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{(4n+4)e + I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(4n+4)e}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{2n}} + o(\tfrac{1}{n^2}) = \frac{e}{n}\cdot\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1} + o(\tfrac{1}{n^2}) = \frac{e}{n}\cdot\left(1 - \frac{3}{2n} + o(\tfrac{1}{n})\right) + o(\tfrac{1}{n^2}) \\
&= \frac{e}{n} - \frac{3e}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

У претходној једнакости искористили смо чињеницу да ако је $I_{n+1} = o(1)$, онда је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} I_{n+1}\cdot\frac{n^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

па важи

$$\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = o(\tfrac{1}{n^2}).$$

Добили смо $a = e$ и $b = -\dfrac{3e}{2}$. △

Задатак 2.34. Нека су дати интеграли $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$, где је $n \in \mathbb{N}$.

а) Израчунати I_0.

б) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

в) Доказати $I_n = \dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{\pi^2}{(n+1)(n+2)}I_{n+2}$.

г) Доказати $I_n \sim \dfrac{\pi}{n^2}$, када $n \to \infty$.

Задатак 2.35. Израчунати $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$.

Теорема 2.2. *Нека је f Риман интеграбилна на $[a,b]$ и $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [a,b]$.*

1) Функција φ је непрекидна на $[a,b]$;

2) Ако је функција f непрекидна у некој тачки $x_0 \in [a,b]$, онда је φ диференцијабилна у тој тачки и важи

$$\varphi'(x_0) = f(x_0).$$

Задатак 2.36. Наћи извод $\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 \,\mathrm{d}t\right)$.

Решење.

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 \,\mathrm{d}t\right) = \cos(\pi\cos^2 x)\cdot(-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x)\cdot \cos x.$$

△

Задатак 2.37. Наћи граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

Решење. Из граничне вредности $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{t^2} = +\infty$ следи да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$. Такође важи $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$. Можемо искористити Лопиталово правило

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t} &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}} \\ &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0\end{aligned}$$

△

Задатак 2.38. Одредити x за које функција $F(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{9}\,\mathrm{d}t$ достиже минимум на $(1,+\infty)$.

Решење. За $x>1$ функција $\frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{9}$ је непрекидна на $[x,x^2]$, па на основу Теореме 2.2 следи да је функција F диференцијабилна на $[x,x^2]$ за свако $x>1$, односно диференцијабилна на $(1,+\infty)$ и важи

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_x^{x^2}\frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{9}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^2}\ln\frac{x^2-1}{9}\cdot 2x - \frac{1}{x}\ln\frac{x-1}{9} \\ &= \frac{1}{x}\left(\ln\frac{(x^2-1)^2}{81} - \ln\frac{x-1}{9}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\frac{(x^2-1)^2}{81}}{\frac{x-1}{9}}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)^2}{9}\right).\end{aligned}$$

Имамо $\frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 1$ акко $p(x) = x^3 + x^2 - x - 10 > 0$. Нула полинома је $x = 2$, па се може раставити $p(x) = (x-2)(x^2+3x+5)$, одакле је $p(x) > 0$ за $x \in (2, +\infty)$, а $p(x) < 0$ за $x \in (1, 2)$. Према томе, функција $F(x)$ је опадајућа на $(1, 2)$ и растућа на $(2, +\infty)$ и $x = 2$ је тачка глобалног минимума. △

Задатак 2.39. Нека је функција $f(x)$ непрекидна на $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$.

3 Несвојствени интеграли

Дефиниција 3.1. Нека је функција f дефинисана на интервалу $[a, b)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{\beta\to b_0} \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

он се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, b)$ и означава са

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Тачка b се назива сингуларитетом. Ако постоји коначна гранична вредност, онда кажемо да интеграл $\int\limits_a^b$ конвергира, а ако не постоји, онда кажемо да интеграл дивергира.

Задатак 3.1. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Дефиниција 3.2. Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, +\infty)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

он се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, +\infty)$ и означава са

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Задатак 3.2. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Задатак 3.3. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.4. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x$.

Дефиниција 3.3. Нека је $a < c < b$. Тада интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ конвергира акко конвергирају интеграли $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.5. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Задатак 3.6. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Теорема 3.1. *Нека су* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки* b. *Тада важи:*

1° *Ако интеграли конвергирају, онда важи једнакост*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \beta g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2° *Ако су* f *и* g *глатке функције и постоји коначан* $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$, *онда* $\int\limits_a^b (f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x$ *конвергира акко конвергира* $\int\limits_a^b (f'(x)g(x))\,\mathrm{d}x$. *У том случају важи једнакост*

$$\int\limits_a^b (f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b (f'(x)g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Теорема 3.2. *Несвојствени интеграл* $\int\limits_a^{(} b)f(x)\,\mathrm{d}x$ *са сингуларитетом у* $x = b$ *конвергира акко за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* β_0, $a < \beta_0 < b$, *тако да за сваки пар* $\beta', \beta'', \beta_0 < \beta' < \beta'' < b$, *важи*

$$\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Дефиниција 3.4. Несвојствени интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ апсолутно конвергира ако конвергира интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.7. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Теорема 3.3. *Нека су* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки* b, *при чему је* $g(x) > 0$ *и* $f(x) \geq 0$ *за* $x \in [a, b)$. *Ако постоји* $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C, 0 \leq C \leq +\infty$, *тада важи:*

1° *Ако је* $C = 0$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *конвергира, онда конвергира и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2° *Ако је* $C = +\infty$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *дивергира, онда дивергира и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3° *Ако је* $0 < C < +\infty$, *онда су интеграли* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *еквиконвергентни, односно један конвергира акко други конвергира.*

Задатак 3.8. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.9. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.10. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.11. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалних параметара a и b.

Задатак 3.12. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{1} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.13. Испитати конвергенцију интеграла

а) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.14. Испитати апсолутну конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.15. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$.

Задатак 3.16. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Задатак 3.17. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$.

Задатак 3.18. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-1)}}$.

Задатак 3.19. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

Задатак 3.20. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Задатак 3.21. Испитати конвергенцију следећих интеграла у зависности од реалних параметара α и β:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$; в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.22. Испитати конвергенцију следећих интеграла у зависности од реалних параметара α и β:

а) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$; б) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$; в) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$.

Задатак 3.23. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(\ln x)^\beta(\ln\ln x)^\gamma}$ у зависности од реалних параметара α, β и γ.

Задатак 3.24. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалног параметра n.

Задатак 3.25. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалног параметра n.

Задатак 3.26. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

у зависности од реалних параметара $a>0, b\in\mathbb{R}$. Израчунати $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}|\sin bx|\,\mathrm{d}x$.

Теорема 3.4. *(Абел-Дирихле) Нека су функције f и g дефинисане на $[a,b)$ и интеграбилне на сваком сегменту $[\alpha,\beta]\subset[a,b)$. За конвергенцију несвојственог интеграла*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

довољно је да буду испуњени услови:

(D_1) f је непрекидна на $[a,b)$ и има ограничену примитивну функцију;

(D_2) g је глатка на $[a,b)$ и монотоно тежи нули за $x\to b$;

или

(A_1) f је непрекидна на $[a,b)$ и несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ конвергира;

(A_2) g је глатка, монотона и ограничена на $[a,b)$.

Задатак 3.27. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, $a\in\mathbb{R}$, $n>0$.

Задатак 3.28. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.29. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,\mathrm{d}x$.

Задатак 3.30. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_1^{x}\frac{\cos^2 t}{t^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

Задатак 3.31. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_x^{x+5}\frac{\cos t^2}{t^{8}}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

Задатак 3.32. Испитати конвергенцију интеграла

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

у зависности од реалних параметара x и y.

Задатак 3.33. а) Испитати конвергенцију интеграла

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

у зависности од реалног параметара x.

б) Доказати $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$ за $x>1$.

в) Наћи $\Gamma(n), n\in\mathbb{N}$.

Задатак 3.34. Нека су дати интеграли $I_n=\int\limits_0^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$.

а) Доказати да интеграли I_n $(n\in\mathbb{N})$ конвергирају.

б) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

в) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\sqrt{n}}$.

Задатак 3.35. Испитати конвергенцију Френелових интеграла

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x \text{ и } J=\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x.$$

Задатак 3.36. Испитати конвергенцију интеграла

$$I=\int\limits_0^{+\infty} x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x,$$

у зависности од реалних параметара p и q.

Задатак 3.37. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,\mathrm{d}x \text{ и } J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J.

б) Доказати да је $I = J = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Задатак 3.38. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \text{ и } J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J.

б) Доказати да је $I = J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Задатак 3.39. Ако је h ненегативна, непрекидна реална функција таква да $\int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ конвергира доказати да је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int\limits_0^{n} xh(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

.

Решење. Нека је ε произвољан позитиван број и нека је $\int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = M$. Из конвергенције интеграла $\int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\left|\int\limits_{n_1}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За такво n_1 постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\frac{n_1}{n_2}\int\limits_0^{n_1} h(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одавде, за свако $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int\limits_0^{n} xh(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int\limits_0^{n_1} xh(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int\limits_{n_1}^{n} xh(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{n_1}{n}\int\limits_0^{n_1} h(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{n_1}^{n} h(x)\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{n_1}{n_2}\int\limits_0^{n_1} h(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{n_1}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^n xh(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

△

Задатак 3.40. Израчунати $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{3}}\ \mathrm{d}x}{\left[1+(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{10}{3}}\right]^2 \cos^2 x}$.

Задатак 3.41. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha (1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\ \mathrm{d}x$$

у зависности од реалног параметра α.

Решење. Из $\displaystyle\lim_{x\to 1_-} \frac{(1-\cos x)^\alpha (1-x)^3}{\ln^2(1-x)} = \left(\frac{0}{\infty}\right) = 0$ следи да $x = 1$ није сингуларитет. У околини тачке $x = 0$ функција се понаша на следећи начин

$$\frac{(1-\cos x)^\alpha (1-x)^3}{\ln^2(1-x)} \sim \frac{\left(1-(1-\frac{x^2}{2})\right)^\alpha}{\left(-x+o(x)\right)^2} \sim \frac{\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}{x^2+o(x^2)} \sim \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{2-2\alpha}+o(x^{2-2\alpha})}.$$

На основу задатка 3.1 и критеријума следи да интеграл конвергира акко $2-2\alpha < 1$, односно $\alpha > \frac{1}{2}$. △