② $f(x)=x\log\frac{x}{x-1}=x\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$

1° домен:

$\frac{x}{x-1}>0,\ x\neq 1$

		0	1
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$\boxed{D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)}$

2° $f(x)=0$ ни за једно $x\in D_f$

$\log\frac{x}{x-1}>0=\log 1$

$\frac{x}{x-1}>1$

$\frac{x}{x-1}-1>0$

$\frac{x-x+1}{x-1}>0$

$\frac{1}{x-1}>0$

$\operatorname{sgn}\left(\log\frac{x}{x-1}\right)=\operatorname{sgn}\frac{1}{x-1}$

$\operatorname{sgn}\left(x\log\frac{x}{x-1}\right)=\operatorname{sgn}\frac{x}{x-1}=1$

$\Rightarrow \boxed{f(x)>0\ \forall x\in D_f}$

3° ни/ни/ни

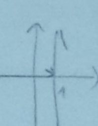
4° асимптоте:

вертикалне: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\log\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\log\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{-1}{x-1}}{-\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=0^+$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x\log\frac{x}{x-1}=+\infty$

$\Rightarrow x=1$ је в.а. кад $x\to 1^+$



косе и хор:

$f(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),\ x\to\pm\infty$

$=x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),\ x\to\pm\infty$

$=1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\pm\infty$

$y=1$ је хор.а. кад $x\to\pm\infty$

кад $x\to+\infty$: одозго

кад $x\to-\infty$: одозго

$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

$=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to\pm\infty$

$\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)^2$

$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-2}$

$=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$=\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to\pm\infty$

5°

$f'(x)=\log\frac{x}{x-1}+\cancel{x}\,\frac{x-1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\log\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}$

$=\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{x-1}<0\quad\forall x\in D_f$

$\Rightarrow \boxed{f\downarrow \text{ на } D_f}$

$\log(1+t)<t\quad\forall t>-1$

$g(t)=t-\log(1+t)$

$g'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}$

		-1	0
t	$-$	$-$	$+$
$1+t$	$-$	$+$	$+$
$g'(t)$	$+$	$-$	$+$

$g'<0$ на $(-1,0)$

$g'>0$ на $(0,+\infty)$

$g(0)=0$

$\searrow\ \nearrow$

0

6°

$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$

$f''(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}$

		0	1
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

нема превоја