Odabrana poglavlja geometrije B
Hiperbolička geometrija

Napomena: Odgovarajući pojmovi i oznake odgovaraju onima sa časa. Ukoliko nije drugačije naznačeno, sve dužine, uglovi, duži, trouglovi, prave, tačke itd. su objekti hiperboličke ravni. U zadacima gde nije naznačeno koji model hiperboličke ravni se posmatra, možete odabrati proizvoljan.

Domaći zadaci vezani za usmeni ispit

1. (a) Dokazati da je dvorazmera tačaka u $\overline{\mathbb{C}}$ realan broj ako i samo ako su tačke na uopštenom krugu (euklidski krug ili dopunjena prava).

(b) Dokazati da Mebijusove transformacije čuvaju dvorazmeru tačaka na uopštenom krugu. Posledica prethodnog tvrdjenja je da se metrika u posmatranim modelima čuva pri izometrijama.

2. (a) Odrediti formule refleksija u $\mathbb{D}$, u zavisnosti od toga da li je prava koja se razmatra deo euklidske prave ili euklidskog kruga, a zatim dokazati da se njihovom kompozicijom zaista dobijaju poznate formule izometrija ovog modela.

(b) Dokazati da je euklidska rotacija oko centra diska zaista izometrija, predstavljajući je kao kompoziciju refleksija.

3. (a) Odrediti formule refleksija u $\mathbb{H}$, u zavisnosti od toga da li je prava koja se razmatra euklidska poluprava ili polukrug, a zatim dokazati da se njihovom kompozicijom zaista dobijaju poznate formule izometrija ovog modela.

(b) Dokazati da su euklidska translacija paralelno realnoj osi, kao i euklidska homotetija sa centrom na realnoj osi, zaista izometrije, predstavljajući ih kao kompoziciju refleksija.

4. Dokazati da tački z u Poenkareovom disk modelu odgovara tačka $\frac{2z}{1+|z|^2}$ u Klajnovom modelu.

5. Dokazati da se preslikavanjem $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ datim formulom

$$f(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

Poenkareov disk model zaista preslikava u Poenkareov poluravanski model (tačke u tačke, prave u prave), kao i da se dato preslikavanje slaže sa odgovarajućim metrikama (tj. f je izometrija između ovih modela).

6. (a) Dokazati da postoji izometrija kojom se proizvoljne dve tačke u $\mathbb{H}$ slikaju na imaginarnu osu.

(b) Dokazati da je rastojanje između tačaka $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ dato formulom

$$\operatorname{ch} d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2},$$

kao i ekvivalentnim formulama

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - z_2| + |z_1 - \overline{z_2}|}{|z_1 - z_2| - |z_1 - \overline{z_2}|}; \qquad \operatorname{sh}\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|z_1 - z_2|}{2\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2};$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|z_1 - \overline{z_2}|}{2\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}; \qquad \operatorname{th}\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}|}.$$

(c) Dokazati da je rastojanje između tačaka $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ dato formulama

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln \frac{|1 - z_1\overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}; \qquad \operatorname{ch}^2\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|1 - z_1\overline{z_2}|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)};$$

$$\operatorname{sh}^2\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}; \qquad \operatorname{th}\left(\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2}\right) = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}.$$

7. Dokazati da za sve tačke $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$, kao i $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$, važi nejednakost trougla $d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \geqslant d(z_1, z_2)$ (d je oznaka za odgovarajuću hiperboličku metriku $d = d_{\mathbb{D}}$ ili $d = d_{\mathbb{H}}$).

8. (a) Dokazati da su dva trougla podudarna ukoliko su im svi unutrašnji uglovi podudarni.

(b) Dokazati da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu manji od π.

Domaći zadaci vezani za pismeni ispit

1. Dokazati da za ugao paralelnosti θ date duži d važe formule

$$\operatorname{sh} d = \operatorname{ctg}\theta, \quad \operatorname{ch} d = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \operatorname{th} d = \cos\theta.$$

2. (a) Odrediti najkraće rastojanje između hiperparalelnih pravih u $\mathbb{H}$ određenih euklidskim krugovima $|z| = 1$, $|z| = 2$, a zatim između $|z| = 1$ i prave $\operatorname{Re} z = 2$.

(b) Odrediti jednačinu kruga u $\mathbb{H}$ poluprečnika R sa centrom u tački ai, $a > 0$, kao i presečne tačke sa imaginarnom osom $\operatorname{Re} z = 0$.

3. (a) Dokazati da je skup tačaka podjednako udaljenih od date prave u $\mathbb{H}$ ili euklidska poluprava ili deo euklidskog kruga.

(b) Dokazati da su sve tačke u $\mathbb{H}$ koje leže na euklidskoj polupravoj $y = kx$ podjednako udaljene od imaginarne ose i izračunati to rastojanje.

4. Neka je trougao ABC jednakokrako-pravougli, sa pravim uglom u temenu A, uglom θ na osnovici i stranicama $BC = a$, $AB = AC = b$. Odrediti vezu između a, b, θ, kao i dužinu visine AD. Koje vrednosti može imati dužina visine u proizvoljnom jednakokrako-pravouglom trouglu?

5. Neka je trougao ABC pravilan, sa stranicom dužine a i uglom θ. Odrediti vezu između a i θ. Koje vrednosti može imati ugao θ?

6. Dokazati da u pravouglom trouglu čiji su oštri uglovi α, β, a stranice a, b, c važe relacije:

(a) $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha$;

(b) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$;

(c) $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$.

7. Dokazati da u proizvoljnom trouglu čiji su uglovi α, β, γ, a stranice a, b, c važe relacije:

(a) $\operatorname{ch} a \sin\beta = \operatorname{ch} b \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\gamma$;

(b) $\operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

8. Odrediti oštar ugao Lambertovog četvorougla čije su stranice koje spajaju temena pravih uglova dužina a i b.

9. Izračunati unutrašnje uglove i dužine stranica četvorougla u $\mathbb{H}$ čije stranice leže na pravama određenim euklidskim krugovima $|z| = 1$, $|z| = \sqrt{7}$, $|z - 2| = \sqrt{3}$, $|z + 2| = \sqrt{3}$.