

Додатни задаци - Метод максималне веродостојности

1. Наћи оцену методом максималне веродостојности за параметар расподеле са густином:

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}, x \in (0, 1), \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

2. Нека обележје X има униформну $U(\theta, \theta + |\theta|)$ расподелу. Наћи оцену максималне веродостојности за θ ако је:

- а) $\theta \in (0, \infty)$
- б) $\theta \in (-\infty, 0)$
- в) $\theta \in R, \theta \neq 0$

3. Узето је n узорака из нормалне $N(\mu, 1)$ расподеле са непознатим параметром μ . Уместо посматрања свих узорака, бележе се само они који су мањи од 0. Наћи оцену максималне веродостојности за μ .

4. Нека обележје X има густину расподеле:

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_1}}, & x > 0 \\ \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} e^{\frac{x}{\theta_2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

где су $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ непознати параметри. Одредити оцену максималне веродостојности за $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

5. Нека је X обележје из логнормалне расподеле, односно $\ln X$ има $N(\theta, \theta)$ расподелу, са непознатим параметром $\theta > 0$. Показати да једно од решења једначине веродостојности је јединствена оцена максималне веродостојности за θ . Одредити асимптотску расподелу оцене максималне веродостојности за θ .

6. Нека обележје X има Бернулијеву расподелу са параметром $p \in (0, 1)$. Нека је $\hat{\theta}$ оцена максималне веродостојности за $\theta = p(1-p)$.

- а) Показати да је $\hat{\theta}$ асимптотски нормална за $p \neq \frac{1}{2}$.
- б) Када је $p = \frac{1}{2}$, одредити недегенерисану асимптотску расподелу од $\hat{\theta}$.

7. Нека обележје X има гама $\gamma(4, \theta), \theta > 0$ расподелу.

- а) Наћи Фишерову информациону функцију.
- б) Ако је X_1, \dots, X_n случајан узорак из ове расподеле, испитати ефикасност оцене максималне веродостојности за θ .
- в) Која је асимптотска расподела од $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$?

8. Нека је обележје X из Кошијеве расподеле са густином:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}.$$

Одредити (нумеричким методама) оцену максималне веродостојности.