

Materijali za predmet

# **B I O M A T E M A T I K A**

**Biologija**

Zoran Rakić

Beograd, 2013. godine



# S A D R Ź A J

1. UVOD	1
1.1 Skupovi	1
1.2 Funkcije	4
1.3 Relacije	6
1.4 Brojevi: celi, racionalni i realni	8
1.5 Kompleksni brojevi	17
1.6 Elementi kombinatorike	22
1.7 Zadaci	24
2. NIZOVI	31
2.1 Limes niza	31
2.2 Tačka nagomilavanja niza i podniz	33
2.3 Broj $e$	35
2.4 Svojstva limesa	36
2.5 Redovi i njihova konvergencija	39
2.6 Apsolutna i uslovna konvergencija. Alternirani redovi	42
3. NEPREKIDNE FUNKCIJE	45
3.1 Limes funkcije	45
3.2 Svojstva limesa funkcija	47
3.3 Neprekidnost	48
3.4 Globalna svojstva neprekidnih funkcija	51
4. DIFERENCIJALNI RAČUN	55
4.1 Izvod funkcije	55
4.2 Svojstva diferenciranja	59
4.3 Izvodi elementarnih funkcija	63
4.4 Izvodi višeg reda	65
4.5 Osnovne teoreme diferencijalnog računa	66
4.6 Tejlorova formula	69

4.7	Lopitalovo pravilo	71
4.8	Ekstremne vrednosti funkcija	73
4.9	Konveksnost i konkavnost funkcija	75
4.10	Ispitivanje toka funkcija	77
4.11	Zadaci	82
<b>5.</b>	<b>INTEGRALNI RAČUN</b>	<b>83</b>
5.1	Neodređeni integral	83
5.2	Osnovne metode integracije neodređenog integrala	85
5.3	Integracija racionalnih funkcija	87
5.4	Određeni integral	93
5.5	Svojstva određenog integrala	97
5.6	Fundamentalna teorema	99
5.7	Osnovne metode integracije određenog integrala	101
5.8	Nesvojstveni integral	104
5.9	Primene neodređenog integrala	107
	<b>LITERATURA</b>	<b>110</b>

# Uvod

Ova glava sadrži potrebna predznanja za uspešno savladavanje gradiva koje je izloženo u nastavku ove knjige. Velika većina ovih predznanja trebalo bi da je čitaocima poznata iz srednje škole. Većina ostalog gradiva predstavlja nešto što je važno, a tome se ne pridaje toliki značaj u srednjim školama, a manji deo su neke generalizacije ili informacije o nekim objektima o kojima više detalja čitaoci mogu naći u literaturi.

## 1. Skupovi

**1.1.** U ovoj knjizi nećemo uvoditi pojam skupa formalnom definicijom niti ćemo izlaganja zasnivati na aksiomatskoj teoriji skupova, već ćemo koristiti intuitivan i operativan pristup skupu kao kolekciji datih objekata. Za one koji su skloniji formalnom i apstraktnom jeziku možemo tretirati skup kao osnovni pojam koji ne definišemo.

Uz pojam skupa javlja se i pojam **elementa skupa** (ili **pripadanja skupu**) koji takođe ne definišemo. Za dati element  $a$  skupa  $A$ , pišaćemo  $a \in A$ . Negaciju ovog iskaza, tj.  $a$  ne pripada (nije element)  $A$  zapisujemo  $a \notin A$ .

**Primer.** Najvažniji skupovi brojeva koji su nam poznati iz srednje škole su  $\mathbb{N}$ -skup prirodnih brojeva,  $\mathbb{Z}$ -skup celih brojeva,  $\mathbb{Q}$ -skup racionalnih brojeva,  $\mathbb{R}$ -skup realnih brojeva i  $\mathbb{C}$ -skup kompleksnih brojeva.

Skup koji nema elemenata nazivamo **praznim skupom** i obeležavamo ga sa  $\emptyset$ . Skup  $A$  je **konačan** ako ima konačan broj elemenata. Sa  $\|A\|$  ili sa  $\text{card}A$  obeležavamo broj elemenata skupa  $A$ .

Kako se skupovi sastoje od elemenata skupovi se obično zadaju na dva načina:

- (i1) popisivanjem svih elemenata, npr.  $A = \{1, 2, 3, 7\}$ ,
- (i2) zadavanjem zajedničkom osobinom, tj.  $A = \{x \in X \mid P(x)\}$  je skup svih onih elemenata datog skupa  $X$  koji zadovoljavaju osobinu  $P$ . Tako skup svih realnih brojeva većih od 3 obeležavamo sa  $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 3\}$ .

Drugi način zadavanja skupova je mnogo prikladniji i uglavnom se koristi u matematici.

**1.2. Podskup.** Skup  $B$  je **podskup skupa**  $A$ , ako je svaki element skupa  $B$  ujedno i element skupa  $A$ , tj. ako iz  $x \in B$  sledi da je  $x \in A$ . To zapisujemo kao  $B \subseteq A$  ili ponekad kao  $A \supseteq B$ , i čitamo  $A$  je **nadskup** od  $B$  (ili  $A$  sadrži  $B$ ). Skupovi  $A$  i  $B$  su jednaki ako sadrže iste elemente, preciznije oni su jednaki ako je  $A \subseteq B$  i  $B \subseteq A$ , i zapisujemo  $A = B$ . Skup  $B$  je **pravi podskup** skupa  $A$  ako je  $B \subseteq A$  i  $A \neq B$ . Za pravi podskup koristimo oznaku  $B \subset A$  (ili  $B \subsetneq A$ ). Jasno, prazan skup je jedinstven i on je podskup svakog skupa. Očigledno važe tvrdnje,

$$(i1) A \subseteq A,$$

$$(i2) A \subseteq B \text{ i } B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

**Primer.** Kao što znamo:  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ , jer  $\mathbb{Z} \ni 0 \notin \mathbb{N}$ ;  $\mathbb{Q} \ni 1/2 \notin \mathbb{Z}$ ;  $\mathbb{R} \ni \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ; i  $\mathbb{C} \ni i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ .

U većini primena skupovi sa kojima radimo su podskupovi nekog datog skupa  $X$ , koji se ponekad naziva univerzalnim skupom (ili kraće univerzumom). Skup svih podskupova datog skupa  $X$ , obeležavamo sa  $\mathcal{P}(X)$  i zovemo ga **partitivnim skupom skupa  $X$** .

**1.3. Operacije sa skupovima.** Neka je dat skup  $X$ . Na skupu svih podskupova skupa  $X$  definisane su sledeće (prirodne) operacije,

komplement skupa  $A \subseteq X$  je skup  $A^c = \bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$ .

unija skupova  $A$  i  $B \subseteq X$  je skup  $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$ .

presek skupova  $A$  i  $B \subseteq X$  je skup  $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$ .

razlika skupova  $A$  i  $B \subseteq X$  je skup  $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$ .

Primetimo, da je  $A \cup A^c = X$  i  $A \cap A^c = \emptyset$ , kao i to da je  $A \setminus B = A \cap B^c$ . Dakle, razlika skupova nije osnovna operacije jer se može izraziti preko drugih. Za skupove  $A$  i  $B$  kažemo da su **disjunktni** ako je  $A \cap B = \emptyset$ . **Simetrična razlika skupova  $A$  i  $B$**  je skup  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

**1.4. Osnovna svojstva unije i preseka.** Za proizvoljne skupove  $A, B, C \subseteq X$  važe sledeća svojstva:

(asocijativnost)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
(komutativnost)	$A \cup B = B \cup A,$	$A \cap B = B \cap A,$
(distributivnost I)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$	
(distributivnost II)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$	
(neutral)	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A,$	$A \cap X = X \cap A = A,$
(idempotentnost)	$A \cup A = A,$	$A \cap A = A,$
(de Morganovi <sup>1</sup> zakoni)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

**Dokaz.** Dokazaćemo osobinu distributivnost II. Ostale osobine dokazuju se analogno. Potrebno je dokazati jednakost dva skupa, a to je ekvivalentno (vidi 1.2) sa pokazivanjem dve inkluzije:  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$  i  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ .

Pokažimo prvu: neka je  $x \in A \cap (B \cup C)$  tj.  $x \in A$  i  $x \in B \cup C$ . Kako je  $x \in B \cup C$ , tj.  $x \in B$  ili  $x \in C$  i kako je  $x \in A$  sledi da je  $x \in A \cap B$  ili  $x \in A \cap C$ . Dakle,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Drugu inkluziju možemo dokazati na isti način, ali dajemo kraći dokaz u kojem smo iskoristili očiglednu osobinu inkluzije skupova.

Kako je  $B \subseteq B \cup C$ , odmah sledi da je  $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$ . Slično važi i  $A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C) = A \cap (C \cup B)$ . Dakle,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap (B \cup C)) \cup (A \cap (B \cup C)) = (A \cap (B \cup C)). \quad \square$$

**1.5. Proširenje osnovnih skupovnih operacija.** Neka je dat neki neprazni skup  $X$  i neka je  $\mathcal{F}$  familija podskupova skupa  $X$  tada definišemo uniju skupova iz  $\mathcal{F}$  kao skup svih onih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova familije  $\mathcal{F}$ . Analogno, presek skupova iz  $\mathcal{F}$  je skup koji se sastoji od onih elemenata koji pripadaju

<sup>1</sup> Augustus de Morgan, 1806–1871, engleski matematičar i logičar.

svim skupovima familije  $\mathcal{F}$ . Operativnija realizacija ove konstrukcije sastoji se u tome da elemente familije  $\mathcal{F}$  indeksiramo elementima nekog skupa  $S$ , tj.  $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X \mid \alpha \in S\}$ . Ispostavlja se da mnoga od gore pomenutih svojstava važe i za familije skupova. Preciznije, neka je data familija  $\mathcal{F}$  i neki  $B \subseteq X$

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad \overline{\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha} &= \bigcap_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha} & \text{(i3)} \quad \left( \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha \right) \cap B &= \bigcup_{\alpha \in S} (A_\alpha \cap B) \\ \text{(i2)} \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha} &= \bigcup_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha} & \text{(i4)} \quad \left( \bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha \right) \cup B &= \bigcap_{\alpha \in S} (A_\alpha \cup B) \end{aligned}$$

**1.6. Dekartov<sup>2</sup> proizvod.** Dekartov proizvod dva skupa  $A$  i  $B$ , je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

pri čemu su uređeni parovi  $(a_1, b_1)$  i  $(a_2, b_2)$  jednaki ako i samo ako je  $a_1 = a_2$  i  $b_1 = b_2$ . Iz same definicije jasno je da Dekartov proizvod nije komutativan, npr. čim  $A \neq B$ , sledi da  $A \times B \neq B \times A$ . Dekartov proizvod direktno se uopštava na konačan broj faktora, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}$$

i uređene  $k$ -torke  $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  se podudaraju ako i samo ako (=akko)<sup>3</sup> je  $a_j = b_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Direktnan proizvod može se generalisati na proizvoljnu familiju skupova  $\mathcal{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , što ćemo zapisivati kao  $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ .

Ako su skupovi  $A$  i  $B$  konačni tada je i skup  $A \times B$  konačan. Specijalno, ako skup  $A$  ima  $n$  elemenata a skup  $B$   $m$  elemenata, skup  $A \times B$  imaće  $n \cdot m$  elemenata. Na ovoj jednostavnoj činjenici zasnivaju se osnovne tehnike prebrojavanja skupova.

Skup elemenata

$$\{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A,$$

zove se dijagonala Dekartovog proizvoda  $A \times A$ .

**1.7. Dekartov proizvod i osnovne skupovne operacije.** Za svaka tri skupa  $A$ ,  $B$ , i  $C$  važi:

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C), & \text{(i2)} \quad (A \times B) \cup (C \times D) &\subseteq (A \cup C) \times (B \cup D), \\ \text{(i3)} \quad (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C), & \text{(i4)} \quad (A \times B) \cap (C \times D) &= (A \cap C) \times (B \cap D), \\ \text{(i5)} \quad (A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C). \end{aligned}$$

**Dokaz.** Pokažimo (i1). Ova tvrdnja posledica je sledećeg niza ekvivalencija:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\iff x \in A \cup B \text{ i } y \in C \iff (x \in A \text{ i } y \in C) \text{ ili } (x \in B \text{ i } y \in C) \\ &\iff ((x, y) \in A \times C) \text{ ili } ((x, y) \in B \times C) \iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

Ostala tvrđenja dokazuju se analogno. □

<sup>2</sup> Descartes Rene, 1596–1650.

<sup>3</sup> U buduće ćemo frazu "ako i samo ako" kraće zapisivati "akko".

## 2. Funkcije

**1.8. Definicija.** Neka su  $A$  i  $B$  neprazni skupovi tada je **funkcija (preslikavanje)** uređena trojka  $(A, B, f)$  čije prve dve komponente su dati skupovi  $A$  i  $B$ , a treća je 'zakon'  $f$  kojem se svakom elementu skupa  $A$  dodeljuje tačno jedan element skupa  $B$ . Obično se uređena trojka  $(A, B, f)$  poistovećuje sa  $f$ , i zapisuje kao  $f : A \longrightarrow B$ . Postoje razne ekvivalentne definicije pojma funkcije (koja je bez sumnje jedan od najvažnijih objekata u matematici). Tako npr. funkciju sa  $A$  u  $B$  možemo definisati kao skup  $M_f \subseteq A \times B$  takav da za svaki  $a \in A$  postoji jedinstven  $b \in B$  takav da je uređeni par  $(a, b) \in M_f$ . Za element  $b$  (zbog njegove jedinstvenosti) koristi se oznaka  $b = f(a)$ . Skup  $A$  zove se domen funkcije  $f$ , a  $B$  njen kodomen.

Napomenimo da su funkcije  $(A, B, f)$  i  $(C, D, g)$  jednake akko je  $A = C$ ,  $B = D$  i  $f = g$  ( $\iff \forall x \in A = C, f(x) = g(x)$ ).

**1.9. Injekcija. Surjekcija. Bijekcija.** Za funkciju  $f : A \longrightarrow B$ , kažemo da je **injekcija** ili '1-1' ako za bilo koja dva različita elementa  $x_1, x_2 \in A$  i njihove slike su različite, tj.  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Formalnije, ovaj uslov zapisujemo:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2) \implies (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Često se u dokazima koristi obrat po kontrapoziciji<sup>4</sup> gornje implikacije, tj. sledeća implikacija,

$$(\exists x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2).$$

Za funkciju  $f : A \longrightarrow B$ , kažemo da je **surjekcija** ili 'na' ako za svaki  $b \in B$  postoji  $x \in A$  takav da je  $b = f(x)$ . Formalnije,

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A) \text{ takav da je } b = f(a).$$

Funkcija koja je istovremeno '1-1' i 'na' naziva se **bijekcija**.

**1.10. Slika i praslika. Inverzna funkcija.** Neka je data funkcija  $f : A \longrightarrow B$ , i neka je  $X \subseteq A$  tada skup

$$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B,$$

nazivamo slikom skupa  $X$ . Specijalno, ako je  $X = A$  tada za  $f(A)$  koristimo oznaku  $\text{Im}A$  i nazivamo ga slikom funkcije  $f$ . Jasno, funkcija  $f$  je 'na' akko je  $\text{Im}A = B$ . Analogno, za  $Y \subseteq B$  skup

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A,$$

nazivamo praslikom skupa  $Y$ .

Primetimo<sup>5</sup> da za neki  $b \in B$  može postojati više elemenata iz  $A$  koje  $f$  preslika u  $b$ . Tada nije moguće na jedinstven način definisati funkciju  $f^{-1} : B \longrightarrow A$ , očiglednom formulom  $f^{-1}(b) = a$ , za  $b = f(a)$ . Da bismo mogli definisati  $f^{-1}$  potrebno je da se praslika svakog elementa iz  $B$  sastoji od tačno jednog elementa, što je ekvivalentno sa činjenicom da je funkcija  $f$  bijekcija. Ispostavlja se da je '1-1' suštinska osobina za

<sup>4</sup> Ako su  $a$  i  $b$  iskazi tada je iskaz  $a \implies b$  ekvivalentan sa  $\neg b \implies \neg a$ .  $\neg a$  je negacija od  $a$ .

<sup>5</sup> Iz definicije funkcije.



egzistenciju inverznog preslikavanja, jer ako  $f$  nije 'na' onda možemo suziti kodomen na  $\text{Im}A$  i tako dobiti bijekciju  $\tilde{f} : A \longrightarrow \text{Im}A$ .

Dakle, ako je  $f$  bijekcija onda je dobro definisano preslikavanje  $f^{-1} : B \longrightarrow A$ , formulom:  $f^{-1}(b) = a$ , za  $b = f(a)$ . Preslikavanje  $f^{-1}$  naziva se inverznom funkcijom od  $f$ .

**1.11. Kompozicija funkcija.** Neka su  $f : A \longrightarrow B$  i  $g : B \longrightarrow C$ , dve funkcije. Tada na prirodan način definišemo funkciju  $g \circ f : A \longrightarrow C$  formulom ( $\forall x \in A$ )

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

Funkcija  $g \circ f$  zove se kompozicija funkcija  $f$  i  $g$ . Za kompoziciju funkcija važi svojstvo  $(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ g)(f(x))$ , koja se naziva asocijativnost. Preciznije, važi sledeća jednostavna teorema:

**Teorema.** *Kompozicija funkcija je asocijativna kad ima smisla.*

Dokaz. Dokaz ove činjenice posledica je sledećeg niza jednakosti ( $\forall x \in A$ ),

$$\underline{((h \circ g) \circ f)(x)} = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = \underline{(h \circ (g \circ f))(x)},$$

što kraće zapisujemo:  $((h \circ g) \circ f) = (h \circ (g \circ f))$ .

I dokaz je gotov □

Na svakom nepraznom skupu  $A$  definišemo funkciju  $\text{id}_A(x) = x$  koju nazivamo identitetom na  $A$ . Neka je  $f : A \longrightarrow B$ , funkcija, tada je egzistenciju inverzne funkcije  $f^{-1}$  moguće opisati preko kompozicije funkcija: ako za datu funkciju  $f : A \longrightarrow B$  postoje funkcije  $g : B \longrightarrow A$  i  $h : B \longrightarrow A$  takve da je

$$f \circ g = \text{id}_B \text{ i } h \circ f = \text{id}_A \text{ tada je } h = g = f^{-1}.$$

**Primer.** Navedimo sada nekoliko važnih primera inverznih funkcija, koji su nam poznati iz ranijeg školovanja.

(i1) Za linearnu funkciju  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  odredimo inverznu funkciju. Koristimo relaciju  $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  i nalazimo

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x &= (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \underline{2f^{-1}(x) + 3} \\ \implies f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(i2) Za stepene funkcije,  $f_{2n+1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) inverzne funkcije su  $f_{2n+1}^{-1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{2n+1}^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

(i3) Za stepene funkcije,  $f_{2n}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $f_{2n}(x) = x^{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) inverzne funkcije su  $f_{2n}^{-1}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $f_{2n}^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

(i4) Eksponencijalna funkcija<sup>6</sup>  $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = e^x$  ima inverznu funkciju - logaritamsku funkciju  $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \ln(x)$ .

(i5) Inverzne funkcije osnovnih trigonometrijskih funkcija,  $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin(x)$  i  $g : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ,  $g(x) = \cos(x)$  su  $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$  i  $g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ ,  $g^{-1}(x) = \arccos(x)$ , redom.

<sup>6</sup> Eksponencijalna funkcija je jedna od najvažnijih funkcija u matematici.

(i6) Za funkcije,  $f(x) : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$  i  $g(x) : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \operatorname{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$  inverzne funkcije su  $f^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ , i  $g^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $g^{-1}(x) = \operatorname{arcctg}(x)$  redom.

Napomenimo da smo u primerima (i3), (i5) i (i6), morali da smanjimo domen funkcija  $f$  koje nisu '1-1' na čitavom domenu.

**1.12. Neka svojstva kompozicije.** Neka su  $f : A \rightarrow B$ , i  $g : B \rightarrow C$ , dve funkcije. Tada ako

- (i1) je  $g \circ f$  '1-1' onda je  $f$  '1-1',      (i2) je  $g \circ f$  'na' onda je  $g$  'na',  
 (i3) su  $f$  i  $g$  '1-1' onda je  $g \circ f$  '1-1',      (i4) su  $f$  i  $g$  'na' onda je  $g \circ f$  'na',  
 (i5) su  $f$  i  $g$  bijekcije onda je i  
 $g \circ f$  bijekcija.

**Dokaz.** (i5) je posledica (i3) i (i4). Dokažimo prvo (i2). Neka je  $g \circ f$  'na' tada za svaki  $y \in C$  postoji neki  $x \in A$  takav da je  $(g \circ f)(x) = y$ . Sada iz definicije kompozicije sledi da je  $g(f(x)) = y$  i ako stavimo  $z = f(x) \in B$  vidimo da je  $g(z) = y$ , tj.  $g$  je 'na'.

Dokažimo još (i3). Neka su  $f$  i  $g$  '1-1'. Tada za  $x, y \in A$  i  $x \neq y$  imamo redom,

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \implies g(f(x)) \neq g(f(y)) \iff (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y),$$

odakle odmah sledi da je funkcija  $g \circ f$  injekcija. □

**1.13. Funkcije i osnovne skupovne operacije.** Neka je  $f : A \rightarrow B$  funkcija, neka su  $X, X_1 \subseteq A$  i neka su  $Y, Y_1 \subseteq B$ , tada

- (i1) za  $X \subseteq X_1 \implies f(X) \subseteq f(X_1)$ ,      (i2)  $f(X \cup X_1) = f(X) \cup f(X_1)$ ,  
 (i3)  $f(X \cap X_1) \subseteq f(X) \cap f(X_1)$ ,      (i4) za  $Y \subseteq Y_1 \implies f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y_1)$ ,  
 (i5)  $f^{-1}(Y \cup Y_1) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y_1)$ ,      (i6)  $f^{-1}(Y \cap Y_1) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y_1)$ ,  
 (i7)  $f^{-1}(Y \setminus Y_1) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y_1)$ ,      (i8)  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$  i  $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ .

**Dokaz.** Iz same definicije slike i praslke očigledno važi (i1), (i4) i (i8). (i3) sledi iz

$$x \in f(X \cap X_1) \implies \exists y \in X \cap X_1 \text{ takav da } x = f(y) \implies \exists y \in X \text{ i } y \in X_1 \\ \text{takav da } x = f(y) \implies x \in f(X) \text{ i } x \in f(X_1) \implies x \in f(X) \cap f(X_1).$$

Obratna inkluzija ne mora da važi jer npr. za neki  $x \in f(X) \cap f(X_1)$  mogu postojati  $y \in X \setminus X_1$  i  $y_1 \in X_1 \setminus X$  takvi da je  $x = f(y) = f(y_1)$  i ne mora da postoji  $z \in X \cap X_1$  takav da je  $f(z) = x$ .

(i5) je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$x \in f^{-1}(Y \cup Y_1) \iff f(x) \in Y \cup Y_1 \iff f(x) \in Y \text{ i } f(x) \in Y_1 \iff x \in f^{-1}(Y) \text{ i } x \in f^{-1}(Y_1) \\ \iff x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y_1).$$

(i2), (i6) i (i7) analogno kao (i5) □

### 3. Relacije

**1.14. Relacija.**  $n$ -arna relacija  $\rho$  na skupu  $A$  je svaki podskup Dekartovog proizvoda

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n.$$

$n$  primeraka skupa  $A$

Od svih relacija na skupu  $A$  najvažnije su **binarne relacije**, tj. podskupovi skupa  $A \times A$ . Za  $(a, b) \in \rho$  koristi se i oznaka  $a \rho b$ . Kako su relacije  $\rho, \sigma$  na  $A$  podskupovi jasno je što znače iskazi  $\rho \subseteq \sigma, \rho \cup \sigma, \rho \cap \sigma, \rho^c$ .

**1.15. Operacije na skupu relacija.** Neka je dat skup  $A$  na njemu postoji specijalna relacija: dijagonala  $J_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ . Za proizvoljnu binarnu relaciju  $\rho$  na  $A$  definišemo i relaciju  $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$ . Takođe za binarne relacije  $\rho, \sigma$  na  $A$  definišemo njihov **proizvod**, tj. relaciju  $\rho\sigma$ , na sledeći način:  $x(\rho\sigma)y$  akko postoji  $z \in A$  takav da je  $x\rho z$  i  $z\sigma y$ .

**1.16. Svojstva relacija.** Najvažnije osobine koju neka binarna relacija  $\rho$  na skupu  $A$  može imati su:

- (r) refleksivnost:  $(a, a) \in \rho$  za svaki  $a \in A \iff J_A \subseteq \rho$ ;
- (ar) antirefleksivnost:  $(a, a) \notin \rho$  za svaki  $a \in A \iff J_A \cap \rho = \emptyset$ ;
- (s) simetričnost: iz  $(a, b) \in \rho$  sledi  $(b, a) \in \rho \iff \rho = \rho^{-1}$ ;
- (a) antisimetričnost: iz  $(a, b) \in \rho$  i  $(b, a) \in \rho$  sledi  $a = b \iff \rho \cap \rho^{-1} = J_A$ ;
- (t) tranzitivnost: iz  $(a, b), (b, c) \in \rho$  sledi  $(a, c) \in \rho \iff \rho^2 \subseteq \rho$ .

**1.17. Relacija ekvivalencije.** Relaciju  $\rho$  na  $A$  koja je refleksivna (r), simetrična (s) i tranzitivna (t) zovemo **relacijom ekvivalencije**. Svaka relacija ekvivalencije na skupu  $A$  razbija taj skup na međusobno disjunktne i neprazne klase (podskupove),

$$(1) \quad A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \quad \text{za } (\alpha \neq \beta),$$

pri čemu je  $I$  skup kojim su indeksirane klase. Dakle,  $A_\alpha = [a_\alpha] = \{x \in A \mid x \rho a_\alpha\}$  je klasa svih onih elemenata iz  $A$  koji su u relaciji  $\rho$  sa elementom  $a_\alpha$ .

Obratno, svako razbijanje (1) nepraznog skupa  $A$  na disjunktne uniju nepraznih skupova definiše relaciju ekvivalencije  $\rho$  (na  $A$ ) na sledeći način:  $x \rho y$  akko  $x, y$  pripadaju istoj klasi.

**Primer.** Relacije ekvivalencije su npr.

- (i1) one relacije u čijoj osnovi je neka jednakost (među nekim objektima) kao što je npr. jednakost skupova; podudarnost trouglova u ravni (dva trougla se podudaraju ako postoji translacija i rotacija u ravni kojom jedan prelazi u drugi); jednakost razlomaka  $m/n = m_1/n_1 \iff m \cdot n_1 = n \cdot m_1$ , i sl.,
- (i2) 'biti paralelan' na skupu svih pravih u ravni ili prostoru;
- (i3) za fiksni prirodan broj  $n > 1$  na skupu  $\mathbb{N}$  (ili  $\mathbb{Z}$ ) relacija  $x \rho y$  akko  $x$  i  $y$  daju isti ostatak pri deljenju sa  $n$ .

**1.18. Relacija parcijalnog poretka.** Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija  $\rho$  na skupu  $A$  zove se **relacija parcijalnog poretka**. Obično se relacija poretka označava sa  $\leq$ .

Antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija  $\rho$  na skupu  $A$  zove se **relacijom strogog poretka**. Obično se relacija strogog poretka označava sa  $<$ .

**Primer.** Relacije parcijalnog (strogog) poretka su npr.

- (i1)  $\leq$  ( $<$ ) na skupu realnih brojeva;
- (i2)  $\subseteq$  ( $\subset$ ) na skupu svih podskupova datog nepraznog skupa  $X$ ;
- (i3) relacija deljivosti ( $a \mid b$   $a$  je deljiv sa  $b$ ) na skupu  $\mathbb{N}$ .

**1.19. Funkcija binarne relacije.** Neka je  $\rho$  neka binarna relacija na skupu  $A$ . Tada na prirodan način definišemo funkciju

$$f_\rho : A \times A \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \text{formulom} \quad f(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ako } (a, b) \in \rho, \\ 0, & \text{ako } (a, b) \notin \rho. \end{cases}$$

Jasno je da je zadavanje relacije  $\rho$  na skupu  $\mathbb{A}$  ekvivalentno sa zadavanjem funkcije  $f_\rho$  na  $A \times A$ . Ako je  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  konačan skup onda funkciju relacije  $f_\rho$  možemo predstaviti u obliku sledeće tablice:

$f_\rho$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_k$	$\dots$	$a_m$
$a_1$	$f_\rho(a_1, a_1)$	$f_\rho(a_1, a_2)$	$\dots$	$f_\rho(a_1, a_k)$	$\dots$	$f_\rho(a_1, a_m)$
$a_2$	$f_\rho(a_2, a_1)$	$f_\rho(a_2, a_2)$	$\dots$	$f_\rho(a_2, a_k)$	$\dots$	$f_\rho(a_2, a_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$a_j$	$f_\rho(a_j, a_1)$	$f_\rho(a_j, a_2)$	$\dots$	$f_\rho(a_j, a_k)$	$\dots$	$f_\rho(a_j, a_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$a_m$	$f_\rho(a_m, a_1)$	$f_\rho(a_m, a_2)$	$\dots$	$f_\rho(a_m, a_k)$	$\dots$	$f_\rho(a_m, a_m)$

Primetimo da se iz gornje tablice odmah mogu prepoznati neke osobine relacija. Ako je relacija  $\rho$

- refleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 1,
- antirefleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 0,
- simetrična, tada je tablica simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj.  $f_\rho(a_k, a_j) = f_\rho(a_j, a_k)$ ,
- antisimetrična onda su na glavnoj dijagonali 1 i tablica je antisimetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. ako je za  $k \neq j$ ,  $f_\rho(a_k, a_j) = 0$  tada je  $f_\rho(a_j, a_k) = 1$  i obratno.

#### 4. Brojevi: celi, racionalni i realni

**1.20. Prirodni brojevi.** Skup  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , nazivamo skupom prirodnih brojeva. U ovom skupu dobro su definisane dve uobičajene binarne operacije ( $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ): sabiranje i množenje prirodnih brojeva, koje imaju sledeća svojstva ( $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ ):

$$(A1) \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (A5) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

$$(A4) \quad a + b = b + a, \quad (A8) \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Primetimo da za množenje postoji istaknuti broj 1, koji ima osobinu ( $\forall a \in \mathbb{N}$ ),

$$(A6) \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Ako skup  $\mathbb{N}$  proširimo brojem 0, dobijamo skup  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  u kojem važi analogon svojstva (A6) za operaciju sabiranja prirodnih brojeva,

$$(A2) \quad a + 0 = 0 + a = a.$$

Operacije sabiranja i množenja povezane distributivnim zakonom ( $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ ):

$$(A9) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

**1.21. Matematička indukcija.** Skup prirodnih brojeva može se opisati i Peanovim<sup>7</sup> aksiomama:

- (i1) 1 je prirodan broj (tj. skup prirodnih brojeva nije prazan),
- (i2) dobro je definisano preslikavanje  $\xi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ , formulom  $\xi(n) = n + 1$ ,
- (i3) 1 nije u slici preslikavanja  $\xi$ , tj. ne postoji prirodan  $x$  takav da je  $\xi(x) = 1$ ,
- (i4) preslikavanje  $\xi$  je '1-1',
- (i5) (aksioma matematičke indukcije) za  $M \subseteq \mathbb{N}$  takav da važi
  - (bi)  $1 \in M$ ,
  - (ki) ako iz  $n \in M$  sledi da je i  $\xi(n) \in M$ ,
 tada je  $M = \mathbb{N}$ .

Primetimo da aksioma matematičke indukcije funkcioniše na sledeći način:  $1 \in M$ , zbog (bi), zatim (ki) primenimo na  $n = 1$  i dobijamo da je  $\xi(1) = 2 \in M$ , zatim (ki) primenimo na  $n = 2$  i dobijamo da je  $\xi(2) = 3 \in M$ , itd.

Napomenimo da se proverava (bi) iz gornje definicije zove baza indukcije, implikacija (ki) zove se korak indukcije, a  $n \in M$  iz (ki) zove se pretpostavka indukcije koju ćemo obeležavati sa (pi). Aksiomu matematičke indukcije koristimo onda kada neku tvrdnju treba pokazati za svaki prirodan broj, a to ćemo raditi u mnogim glavama ove knjige.

**Primer 1.** Pokažite da za svaki prirodan broj  $n$  važi sledeća formula

$$(2) \quad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Dokaz.** Neka je  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid (2) \text{ važi za } n\}$ . Tada je očigledno  $1 \in M$  jer je  $1 = (1(1+1))/2$ . Pretpostavimo da je neki prirodan broj  $n \in M$ , tada redom imamo,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \stackrel{(pi)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \\ &= \frac{n+1}{2} (n+2) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

tj. i  $n+1 \in M$ . Sada AMI (aksioma matematičke indukcije) implicira da je  $M = \mathbb{N}$ , tj. (2) važi za sve prirodne brojeve.  $\square$

**Primer 2.** Dokažite da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i  $\forall \beta > -1$  važi Bernoullijeva nejednakost:  $(1 + \beta)^n \geq 1 + n\beta$ ,

<sup>7</sup> Peano Giuseppe, 1858–1932.

Dokaz. Baza indukcije je trivijalna, jer je  $(1 + \beta)^1 \geq 1 + 1 \cdot \beta$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj  $n$ , sada imamo redom

$$(1 + \beta)^{n+1} = (1 + \beta)(1 + \beta)^n \stackrel{\text{(pi)}}{\geq} (1 + \beta)(1 + n\beta) = 1 + (n+1)\beta + n\beta^2 \geq 1 + (n+1)\beta. \quad \square$$

**1.22. Fibonaccijev (Fibonači) niz**<sup>8</sup>. Niz definisan rekurzivnom formulom,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad \text{uz} \quad a_1 = a_2 = 1,$$

zove se **Fibonaccijev niz**. Nekoliko prvih članova niza su: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, .. Pokažite da

(i1) su svaka dva uzastopne člana niza uzajamno prosta.

(i2) da je svaki četvrti član niza deljiv sa 3.

Dokaz. (i2) Baza indukcije.  $n = 1$   $a_{4 \cdot 1} = 3$ , i jasno  $3 \mid a_{4 \cdot 1}$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$   $3 \mid a_{4n}$ , tj.  $a_{4n} = 3\alpha$ , tada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} &= a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = 2a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3a_{4n+1} + 2a_{4n} \stackrel{\text{pi}}{=} 3a_{4n+1} + 2 \cdot 3\alpha \\ &= 3 \underbrace{(a_{4n+1} + 2\alpha)}_{\in \mathbb{N}} \implies 3 \mid a_{4(n+1)}. \end{aligned} \quad \square$$

**1.23. Celi brojevi.** U skupu prirodnih brojeva nije moguće rešiti jednačinu  $x + a = b$ , za proizvoljni izbor  $a, b \in \mathbb{N}$  (npr.  $a = 5, b = 2$ ) zbog toga se pitamo da li je moguće proširiti skup  $\mathbb{N}_0$  tako da u tom proširenom skupu svojstva sabiranja (A1), (A2) i (A4) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu  $x + a = b$ , za svaki izbor  $a, b$  iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup celih brojeva  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0$ . Primetimo da u skupu  $\mathbb{Z}$  važi i svojstvo:  $\forall a \in \mathbb{Z}$  postoji jedinstveni broj  $-a \in \mathbb{Z}$  takav da je,

$$(A3) \quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Broj  $-a$  zove se suprotni element od  $a$  ili inverzni element od  $a$  s obzirom na sabiranje.

Na skupu  $\mathbb{Z}$  (ali već i na  $\mathbb{N}$ ) postoji relacija poretka  $\leq$  ('biti manji ili jednak'). Ako uvedemo uobičajenu oznaku  $a < b$ , koja znači  $a \leq b$  i  $a \neq b$ , vidimo da na skupu  $\mathbb{Z}$  važi,

$$(A10) \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a \leq a,$$

$$(A11) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq a \implies a = b,$$

$$(A12) \quad a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq c \implies a \leq c.$$

$$(A13) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ tačna je barem jedna od relacija } a \leq b \text{ ili } b \leq a.$$

$$(A14) \quad a \leq b \quad \text{i} \quad c \in \mathbb{Z} \implies a + c \leq b + c,$$

$$(A15) \quad a > 0 \quad \text{i} \quad b > 0 \implies a \cdot b > 0.$$

<sup>8</sup> Fibonacci Leonardo, 1170–1240 (?), poznat i kao Leonardo iz Pise.

Primetimo da svojstva (A10)-(A13) znači da je relacija  $\leq$  relacija totalnog poretka na  $\mathbb{Z}$ ; (A14) i (A15) znači da se relacija poretka slaže sa sabiranjem i množenjem celih brojeva.

Iz dosada evidentnih svojstava vidimo da su ona podeljena na tri dela: svojstva (A1)-(A9)<sup>9</sup> su algebarska svojstva, (A10)-(A13) su svojstva relacije ' $\leq$ ' i (A14)-(A15) predstavljaju kompatibilnost relacije ' $\leq$ ' i operacija sabiranja i množenja celih brojeva.<sup>10</sup>

**1.24. Deljivost i prosti brojevi.** Pretpostavljamo da oznake  $a < b$ ,  $a \leq b$ ,  $|a|$  imaju uobičajeno značenje. Kažemo da  $a$  deli  $b$  što zapisujemo kao  $a | b$ , ili da je  $b$  deljiv sa  $a$  akko postoji  $t \in \mathbb{Z}$  takav da je  $b = at$ . Prirodan broj  $p > 1$  koji je deljiv samo sa 1 i sa samim sobom zove se **prost broj**.

Skup svih prostih brojeva  $\mathcal{Pr} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$  je beskonačan.

**1.25. Teorema o deljenju.** Za svaki  $m \in \mathbb{Z}$  i  $n \in \mathbb{N}$  postoje jedinstveni brojevi  $t \in \mathbb{Z}$  i  $0 \leq r < n$  takvi da je

$$m = n \cdot t + r.$$

Dokaz. Egzistencija. Pretpostavimo da je  $m \in \mathbb{N}$ , i posmatrajmo niz

$$q_0 = m, q_1 = m - n, q_2 = q_1 - n = m - 2n, \dots, q_k = q_{k-1} - n = m - kn, \dots$$

Kako je ovaj niz strogo opadajući postoji najmanji indeks  $t$  takav da je  $q_{t+1} < 0$ . Tada je  $0 \leq r = q_t = m - tn < n$  odakle sledi tvrdnja za  $m \geq 0$ . Ako je  $m \leq 0$  onda je  $-m \geq 0$ , i na osnovu upravo dokazanog imamo

$$\begin{aligned} -m = n \cdot t + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n &\implies m = n \cdot (-t) - r_1 + n - n = n \cdot (-t - 1) + (n - r_1) \\ &= n \cdot (-t - 1) + r, \quad 0 \leq r = n - r_1 < n. \end{aligned}$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para takvih brojeva  $(t_1, r_1)$  i  $(t_2, r_2)$ , tj.  $m = n \cdot t_1 + r_1 = n \cdot t_2 + r_2$ . Ako ih oduzmemo odmah dobijamo

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = n \cdot (t_1 - t_2) &\implies |r_2 - r_1| = n \cdot |t_2 - t_1| \implies n > |r_2 - r_1| |n \\ &\implies |r_2 - r_1| = 0 \implies r_2 = r_1 \text{ i } t_2 = t_1. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

**1.26. Svojstva deljivosti.** Iz definicije odmah sledi da za relaciju deljivosti važi:

- (i1) tranzitivnost, tj.  $a | b$  i  $b | c \implies a | c$ ,
- (i2)  $a | b$  i  $a | c \implies a | b \pm c$ ,
- (i3) ako  $a | b$  onda za svako  $c \in \mathbb{Z}$  važi  $a | b \cdot c$ ,
- (i4) ako  $a | b_1, a | b_2, \dots, a | b_k$  onda za sve  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$  važi  $a | b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \dots + b_k \cdot c_k$ .

<sup>9</sup>Primetimo da je (A7) zasada preskočeno.

<sup>10</sup>Napomenimo da se uređeni par  $(G, \star)$  gde je  $G$  neki neprazan skup, a  $\star$  binarna operacija za koju važe aksiome (A1)-(A3) zove grupa, a ako još važi i aksioma (A4) tada govorimo o komutativnoj ili Abelovoj grupi. Slično za uređenu trojku  $(G, +, \cdot)$  za koju važe aksiome (A1)-(A6) i (A8)-(A9) kažemo da je komutativni prsten sa jedinicom. Dakle,  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  je komutativni prsten sa jedinicom.

**1.27. Najveći zajednički delitelj (divizor).** Najveći zajednički delitelj celih brojeva  $a$  i  $b$ , u oznaci  $\text{NZD}(a, b)$ , je prirodan broj  $d$  koji ima sledeća svojstva

$$(d) \quad d \mid a \text{ i } d \mid b \quad (d \text{ je zajednički delitelj}),$$

$$(n) \quad \text{ako } d_1 \mid a \text{ i } d_1 \mid b \implies d_1 \mid d \quad (d \text{ je najveći zajednički delitelj}).$$

Ako je  $\text{NZD}(a, b) = 1$  onda kažemo da su brojevi  $a$  i  $b$  **uzajamno prosti**.

**1.28. Namanji zajednički sadržalac.** Najmanji zajednički sadržalac celih brojeva  $a$  i  $b$ , u oznaci  $\text{NZS}(a, b)$ , je prirodan broj  $s$  koji ima sledeća svojstva

$$(s) \quad a \mid s \text{ i } b \mid s \quad (a \text{ je zajednički sadržalac}),$$

$$(n) \quad \text{ako } a \mid s_1 \text{ i } b \mid s_1 \implies s \mid s_1 \quad (s \text{ je najmanji zajednički sadržalac}).$$

**1.29. Euklidov algoritam.** Neke su  $a, b \in \mathbb{N}$ , onda iz Teoreme o deljenju imamo niz jednakosti ( $a > b$ )

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \quad r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1},$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r_k = r_{k-1} \cdot q_{k+1}.$$

$$\text{Tada je } \text{NZD}(a, b) = r_k.$$

**Posledica 1.** Neke su  $a, b \in \mathbb{N}$ , neka je  $\text{NZD}(a, b) = d$  i neka je  $d_1 \in \mathbb{N}$  takav da  $d \nmid d_1$ . Tada jednačine (po  $x$  i  $y$ )

$$a \cdot x + b \cdot y = d, \quad \text{ima rešenja u } \mathbb{Z}.$$

$$a \cdot x + b \cdot y = d_1, \quad \text{nema rešenja u } \mathbb{Z}.$$

Specijalno, ako su  $a$  i  $b$  uzajamno prosti onda postoje  $x, y \in \mathbb{Z}$  takvi da je

$$a \cdot x + b \cdot y = 1.$$

Dokazi prethodnih teorema i njihovih posledica mogu se naći u Glavi 3, reference [5] u kojoj analogne teoreme dokazujemo za polinome ili u knjigama koje se bave deljivošću celih brojeva.

**Posledica 2.** Neke su  $a$  i  $b$  uzajamno prosti brojevi. Ako  $a \mid b \cdot c$  tada  $a \mid c$ . Specijalno, ako prost broj deli proizvod celih brojeva tada on mora deliti barem jedan od njih.

**1.30. Relacija kongruencije.** U poglavlju o relacijama spomenuli smo kao primer relacije ekvivalencije (i2), o kojoj ćemo sada nešto više reći. Za dati  $2 \leq n \in \mathbb{N}$  i za  $a, b \in \mathbb{Z}$  kažemo da je  $a$  kongruentno  $b$  po modulu  $n$  i pišemo

$$a \equiv b \pmod{n} \iff \exists t \in \mathbb{Z} \quad \text{takav da je } a - b = n \cdot t,$$

tj.  $a$  i  $b$  daju isti ostatak pri deljenju sa  $n$ .



**Teorema.** *Relacija kongruencije po modulu  $n > 1$  je relacija ekvivalencije na  $\mathbb{Z}$ . Ova relacija razbija skup  $\mathbb{Z}$  na sledeće klase*

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup \dots \cup [n-1]_n, \quad \text{gde je}$$

$$[k]_n = \{k, k-n, k+n, k-2n, k+2n, \dots, k-jn, k+jn, \dots\}.$$

**Dokaz.** Refleksivnost.  $a \equiv a \pmod{n}$  jer za  $t=0$  važi  $a-a=0 \cdot n$ .

Simetričnost. Ako je  $a \equiv b \pmod{n} \implies \exists t \in \mathbb{Z}$  takav da je  $a-b = n \cdot t$ , odakle je  $b-a = n \cdot (-t)$ , tj.  $b \equiv a \pmod{n}$ .

Tranzitivnost. Ako je  $a \equiv b \pmod{n}$  i  $b \equiv c \pmod{n} \implies \exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$  takvi da je  $a-b = n \cdot t_1$ , i  $b-c = n \cdot t_2$ , odakle je

$$a-c = (a-b) - (b-c) = n \cdot t_1 - n \cdot t_2 = n \cdot (t_1 - t_2) = n \cdot t,$$

gde je  $t = t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \implies a \equiv c \pmod{n}$ .

Preostale tvrdnje posledica su činjenice da svaka relacija ekvivalencija razbija skup na disjunktne unije nepraznih podskupova. □

**1.31. Teorema (Osnovni stav aritmetike).** *Za svaki prirodni broj  $a$  jedinstveno su određeni prosti brojevi  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  i prirodni brojevi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  takvi da je*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

**Dokaz.** Egzistencija. Ako je  $a$  prost broj onda je dokaz gotov. Ako nije onda postoji najmanji prost broj  $q_1$  takav da  $q_1 \mid a \iff a = q_1 \cdot a_1$  i  $a > a_1$  jer je  $q_1 \geq 2$ . Sada analogno razmatranje primenimo na  $a_1$ . Dakle, ako je  $a_1$  prost broj dokaz je gotov jer je  $a = q_1 \cdot a_1$ , ako  $a_1$  nije prost onda postoji minimalni prost broj  $q_2 \geq q_1$  (jer u suprotnom  $q_1$  ne bi bio minimalan koji deli  $a$ ) takav da  $q_2 \mid a_1 \iff a_1 = q_2 \cdot a_2$  i  $a_1 > a_2$  jer je  $q_2 \geq 2$ , itd. Tako dolazimo do niza prirodnih brojeva  $a = a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_k > 1$  i algoritam staje kada je  $a_k$  prost. To se mora desiti jer između  $a$  i 1 ima konačno mnogo prostih brojeva. Ako sada među prostim brojevima  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_k \leq a_k$  skupimo iste dobijamo traženu dekompoziciju.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da imamo dva predstavljanja broj  $a$  kao proizvoda prostih brojeva, tj.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m},$$

takvi da je  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  i  $q_1 < q_2 < \dots < q_m$ . Sada pretpostavimo da postoji najmanji indeks  $i$  takav da je

$$p_1 = q_1, \alpha_1 = \beta_1; \quad p_2 = q_2, \alpha_2 = \beta_2; \quad \dots \quad p_{i-1} = q_{i-1}, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1};$$

$$p_i \neq q_i \quad \text{ili} \quad p_i = q_i, \quad \text{ali} \quad \alpha_i \neq \beta_i.$$

jer je u suprotnom dokaz gotov. Pretpostavimo da je npr.  $p_i < q_i$  onda je i  $p_i < q_j$  ( $j = i, \dots, m$ ), sada imamo sa jedne strane  $p_i \mid a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$  a sa druge  $p_i \nmid a = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m}$  što je nemoguće. Slično dobijamo i u slučaju da je  $p_i > q_i$ . Neka je sada  $p_i = q_i$  ali je npr.  $\alpha_i > \beta_i$  odakle

$$a = p_i^{\alpha_i} \cdot a_1 \implies p_i^{\alpha_i} \mid a \quad \text{i} \quad p_i \nmid a_1 \quad a = p_i^{\beta_i} \cdot a_2 \implies p_i^{\beta_i} \mid a \quad \text{i} \quad p_i \nmid a_2,$$

tj. sa jedne strane  $p_i^{\alpha_i} \mid a$  a sa druge strane  $p_i^{\alpha_i} \nmid a$ , što je nemoguće. □

**1.32. Racionalni brojevi.** Kako u skupu celih brojeva jednačina  $a \cdot x = b$ , nema rešenja za proizvoljne  $a, b \in \mathbb{Z}$  (npr.  $a = 2, b = 1$ ), postavlja se slično pitanje kao i kod sabiranja u skupu prirodnih brojeva (**1.23**), tj. da li je moguće proširiti skup  $\mathbb{Z}$  tako da u tom proširenom skupu svojstva (A1)-(A6) i (A8)-(A15) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu  $a \cdot x = b$ , za svaki izbor  $a \neq 0$ <sup>11</sup>,  $b$  iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup racionalni brojeva

<sup>11</sup> jer ako je  $a = 0$  i  $b$  proizvoljan ceo broj različit od 0 onda jednačina  $a \cdot x = b$  očigledno nema rešenja.

$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ . Primetimo da u skupu  $\mathbb{Q}$  važi i svojstvo: za  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $a \neq 0$ , postoji jedinstveni broj  $1/a = a^{-1} \in \mathbb{Q}$  takav da je,

$$(A7) \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Broj  $a^{-1}$  zove se inverzni element od  $a$  s obzirom na množenje.

Skup racionalnih brojeva ima jednu osnovnu osobinu (koja ga izdvaja od ostalih skupova), a ta je da su **rezultati svih fizičkih merenja racionalni brojevi**. Uređena trojka  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$  je polje, tj. algebarska struktura za koju važe aksiome

(i1)  $(\mathbb{Q}, +)$  je Abelova grupa.

(i2)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  je Abelova grupa.

(i3) važi distributivnost ( $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ ),  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Štaviše  $\mathbb{Q}$  je najmanje polje koje ima beskonačno mnogo elemenata.

**1.33. Skup realnih brojeva.** Sada nastavljamo na sličan način, tj. pokušavamo da rešimo u skupu racionalnih brojeva jednačinu  $x^2 = 2$ . Sledeća teorema pokazuje da rešenje te jednačin ne postoji u skupu  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema.**  $\sqrt{2}$  nije racionalan broj.

**Dokaz.** Pretpostavimo da je  $\sqrt{2}$  racionalan broj. Tada on dozvoljava zapis u vidu  $\sqrt{2} = p/q$ , gde je  $NZD(p, q) = 1$  (tj. razlomak  $p/q$  smo maksimalno skratili). Ovu relaciju prepisemo u ekvivalentnom vidu kao  $2q^2 = p^2$ , odakle sledi da  $p = 2l$  jer je leva strana poslednje jednakosti parna, tako da  $p$  mora biti paran. Sada imamo

$$2q^2 = (2l)^2 \iff q^2 = 2l^2.$$

Odavde sledi da  $2 \mid q$ , tj.  $NZD(p, q) \geq 2$  što je nemoguće. □

Posmatrajmo sada skupove  $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}$  i  $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$ . Očigledno je da su  $A, B$  neprazni skupovi. Primetimo da su npr.  $1, 1.4, 1.41, \dots \in A$  i postoji racionalni broje  $M$  (npr.  $2, 3, 4, \dots$ ) takvi da  $\forall q \in A$  važi da je  $q \leq M$ . Brojeve  $M$  sa ovakvim svojstvom zovemo **majorantama** (gornjim granicama) skupa  $M$ . Od svih gornjih granica od posebnog je interesa najmanja gornja granica koja se zove **supremum skupa  $A$**  i obeležava se sa  $\sup A$ . Analogno, skup  $B$  nema majorantu, ali zato ima **minorantu**  $m \in \mathbb{Q}$  (npr.  $0, 1/2, 1, 1.2, \dots$ ), tj. broj takav da  $\forall q \in B$  važi da je  $q \geq m$ . Od svih minoranti od posebnog je interesa najveća koja se zove **infimum skupa  $B$**  i koja se obeležava sa  $\inf B$ .

Iz prethodne teoreme sledi da je  $\sup A = \inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , tj. npr. skup  $A$  nema supremuma u  $\mathbb{Q}$ , tj. u nekom smislu je šupalj. Tako se opet nameće pitanje da li je moguće skup  $\mathbb{Q}$  proširiti tako da da sva svojstva (A1)-(A15) ostanu sačuvana i u tom proširenju, ali da važi da svaki podskup  $A$  tog proširenja koji je odozgo ograničen ima supremum u tom proširenju. Odgovor i na ovo pitanje je pozitivan, najmanji takav skup je skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$ . Dakle, skup realnih brojeva je skup u kojem važe svojstva (A1)-(A15), ali još važi i,

(A16) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup  $A \subset \mathbb{R}$  ima supremum u skupu  $\mathbb{R}$ .

Važi sledeća teorema,

**Teorema.** Skup  $\mathbb{R}$  jedinstveno je određen aksiomama (A1)-(A16) (do na izomorfizam).

Dakle, za polje  $\mathbb{Q}$  važe sve aksiome kao i za  $\mathbb{R}$  osim aksiome (A16). Napomenimo da je proširenje sa  $\mathbb{Q}$  na  $\mathbb{R}$  znatno komplikovanije od prethodnih proširenja, sa  $\mathbb{N}$  na  $\mathbb{Z}$  i sa  $\mathbb{Z}$  na  $\mathbb{Q}$ . Skup  $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  zove se skup iracionalnih brojeva. Napomenimo da je skup  $\mathbb{Q}$  gust u skupu  $\mathbb{R}$  u sledećem smislu:

**Teorema.** Za bilo koja dva realna broja  $r_1 < r_2$  postoji racionalni broj  $q$  takav da je  $r_1 < q < r_2$ .

**1.34. Algebarski brojevi.** Izraz  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , zove se polinom  $n$ -tog stepena (ako je  $a_n \neq 0$ ) nad poljem  $\mathbb{Q}$  ako su svi koeficijenti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  racionalni brojevi. Skup  $\mathcal{N}_f = \{x_0 \mid f(x_0) = 0\}$  zove se skup svih nula polinoma  $f$ . Skup  $\mathcal{N}_f$  ne mora biti podskup od  $\mathbb{R}$ .

Za broj  $a \in \mathbb{R}$  kažemo da je **algebarski nad  $\mathbb{Q}$**  ako postoji polinom  $f$  sa racionalnim koeficijentima (za skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima koristimo oznaku  $\mathbb{Q}[x]$ ) takav da je  $f(a) = 0$ . Skup svih algebarskih brojeva nad  $\mathbb{Q}$  obeležavamo sa  $\mathbb{A}$ . Jasno je da je  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ . Realni brojevi iz skupa  $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ , tj. koji nisu algebarski nazivaju se **transcedentnim brojevima**, takvi su npr.  $\pi, e, \sqrt{\pi}, \dots$

**1.35. Decimalni zapis realnog broja.** Kao što znamo iz svakodnevnog iskustva u praksi koristimo dekadski brojni sistem, tj. sve brojeve predstavljamo pomoću cifara 0, 1, 2, ..., 9. Tako npr. oznaka 12345 predstavlja prirodni broj

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0,$$

ili u opštem obliku svaki celi broj<sup>12</sup> može se predstaviti u obliku polinoma ( $x = 10$ ) na sledeći način:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0, \quad a_n \neq 0.$$

Postoje i drugi brojevnici sistemi, a veoma su popularni oni koji se koriste u računarstvu čije su osnove 2, 8 ili 16.

Primetimo da proizvoljne razlomke (npr.  $1/2$ ) ne možemo predstaviti kao polinome sa osnovom 10 (ili bilo kojom drugom). Ovaj problem se prevazilazi tako da dozvoljavamo i negativne stepene broja 10 i tamo gde počinju negativni stepeni uvodimo decimalni zarez. Tako je npr.,

$$(3) \quad \frac{1}{2} = 0,5 = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1},$$

ali se ispostavlja, kao što pokazuje sledeći primer,

$$(4) \quad \frac{1}{3} = 0,3333 \dots = 0, \dot{3} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3 \cdot 10^n,$$

da moramo dozvoliti da se iza decimalnog zareza pojavljuje beskonačno mnogo članova<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> Ako je broj negativan dodamo – ispred broja.

<sup>13</sup> Pitanjima suma sa beskonačno mnogo članova bavićemo se u 2. glavi Nizovi.

Postavlja se prirodno pitanje kako iz decimalnog zapisa realnog broja prepoznati da je on racionalan. Primeri (3) i (4) su tipični tj. broj je racionalan ako i samo ako je njegov decimalni zapis konačan (tj. sve cifre nakon nekog mesta su 0, npr. u slučaju broja  $1/2$ , cifre  $a_{-2} = a_{-3} = \dots$  su jednake 0) ili nakon nekog mesta postoji konačan niz cifara koji se ponavlja (primer je broj  $1/3$ , kod kojeg je  $3 = a_{-1} = a_{-2} = \dots$ ).

**Primer.** Predstaviti broj  $17/7$  u decimalnom obliku.

$$17/7 = 2, \underbrace{428571}_{\text{ponavlja}} \underbrace{428571}_{\text{ponavlja}} \dots$$

Iz gore rečenog sledi da decimalni zapisi iracionalnih brojeva nisu konačni i ne postoji konačan niz cifara koji se ponavlja. Drugim rečima cifre u decimalnom zapisu iracionalnog broja ređaju se bez nekog reda, npr. prvih 50 cifara u decimalnim zapisima brojeva  $\pi$  i  $\sqrt{2}$  su:

$$\begin{aligned} \pi &= 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751 \\ \sqrt{2} &= 1, 4142135623730950488016887242096980785696718753769. \end{aligned}$$

**1.36. Brojnost (Kardinalni broj) skupa.** Za svaki prirodan broj  $n$  obeležimo sa  $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  skup prvih  $n$  prirodnih brojeva. Kažemo da je skup  $A$  konačan ako postoji bijekcija sa nekog od skupova  $\mathcal{S}_n$  u  $A$ . Npr. ako je  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{55}\}$  onda je  $A$  u bijekciji sa skupom  $\mathcal{S}_{55}$  i jedna od bijekcija je npr.  $f(i) = a_i, i = 1, 2, \dots, 55$ <sup>14</sup>.

Niz u skupu  $B$  je svako preslikavanje sa skupa  $\mathbb{N}$  u  $B$ . Elemente niza obeležavamo sa  $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$ . Kažemo da je skup  $B$  prebrojiv ako se njegovi elementi mogu poređati u niz, tj. ako postoji bijekcija  $f$  sa  $\mathbb{N}$  u  $B$ . Ovo znači da skup  $B$  ima 'isti broj' elemenata kao i skup  $\mathbb{N}$ .

Tako su npr,  $\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{Q}$  prebrojivi<sup>15</sup> skupovi. Postavlja se pitanje kako npr. sve cele brojeve poređati u niz. Jedno rešenje je:

$$\begin{aligned} 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, \quad \text{što možemo zapisati i formulom} \\ f(0) = 0, \quad f(2k) = k \quad \text{i} \quad f(2k+1) = -k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Za skup  $\mathbb{Q}$  dokaz je komplikovaniji. Dakle, iako skupovi  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  i  $\mathbb{Q}$  imaju beskonačno mnogo elemenata i važi  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ <sup>16</sup> oni su prebrojivi i u tom smislu imaju isti kardinalni broj. Ipak, skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$  ima bitno više elemenata od prebrojivih skupova, kao što pokazuje sledeća teorema.

**Teorema.** *Skup  $\mathbb{R}$  nije prebrojiv.*

**Dokaz.** Pretpostavimo da je skup  $\mathbb{R}$  prebrojiv. Tada je prebrojivi svaki njegov podskup, pa specijalno i interval  $[0, 1]$ . Svaki element iz intervala  $[0, 1]$  možemo predstaviti u dekadskom obliku. Dakle, postoji bijekcija

<sup>14</sup> Odredite broj bijekcija sa  $\mathcal{S}_n$  u  $A$ .

<sup>15</sup> Prebrojiv je i skup algebarskih brojeva.

<sup>16</sup> Primitimo da ne postoji bijekcija sa pravog podskupa konačnog skupa na taj isti skup.

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da je

$$f(1) = a_1 = 0, \overline{a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_n^1 \dots}$$

$$f(2) = a_2 = 0, \overline{a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots}$$

$$f(3) = a_3 = 0, \overline{a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots a_n^3 \dots}$$

$$f(4) = a_4 = 0, \overline{a_1^4 a_2^4 a_3^4 \dots a_n^4 \dots}$$

.....  
 .....

Sada posmatrajmo sledeći realni broj,

$$b = \overline{0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots}$$

gde smo izabrali cifre  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  tako da je  $b_1 \neq a_1^1, b_2 \neq a_2^2, b_3 \neq a_3^3, \dots, b_n \neq a_n^n, \dots$ . Odavde sledi da broj  $b$  nije u slici funkcije  $f$  jer  $b \neq f(j) = a_j$  za svaki  $j \in \mathbb{N}$  (jer se broj  $b$  razlikuje barem u  $j$ -toj cifri od broja  $a_j$ ). Dakle, naša pretpostavka da je  $\mathbb{R}$  prebrojiv dovela nas je u kontradikciju, jer upravo opisana procedura<sup>17</sup> pokazuje da ne postoji surjektivna funkcija sa  $\mathbb{N}$  u interval  $[0, 1]$ . □

**Napomena.** Rezimirajmo, kardinalni broj (brojnost) skupa:

- $\mathcal{S}_n$  je  $n$  (broj njegovih elemenata),
- $\mathbb{N}$  je  $\aleph_0$  (alef 0) (prebrojiv),
- $\mathbb{R}$  je  $c$  (kontinuum).

Iz gore rečenoga možemo da zaključimo da se pojam jednakobrojnosti konačnih skupova na prirodan (tj. najjednostavniji) način generališe i na skupove koji imaju beskonačno mnogo elemenata sledećom definicijom: skupovi  $A$  i  $B$  su **istobrojni** ili kažemo da imaju isti kardinalni broj ako postoji barem jedna bijekcija sa  $A$  na  $B$ .

## 5. Kompleksni brojevi

**1.37. Skup kompleksnih brojeva.** Nastavljajući u istom duhu, pokušavamo da rešimo jednačinu  $x^2 = -1$  u skupu  $\mathbb{R}$ . Lako se možemo ubediti (koristeći aksiome (A1)-(A16) da ta jednačina nema rešenja u skupu  $\mathbb{R}$ . Ako rešenje te jednačine obeležimo sa  $i = \sqrt{-1}$ , i nazovemo ga **imaginarna jedinica**, možemo posmatrati skup

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \supsetneq \mathbb{R}.$$

Skup  $\mathbb{C}$  zove se **skup kompleksnih brojeva**. Realne brojeve  $a = \Re(a+ib)$  i  $b = \Im(a+ib)$  nazivamo redom **realnim** i **imaginarnim delom** kompleksnog broja  $z = a + ib$ .

Na skupu  $\mathbb{C}$  definisane su binarne operacije sabiranja i množenja, koje su proširenja odgovarajućih operacija sa skupa realnih brojeva, formulama

$$(5) \quad z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2),$$

$$(6) \quad z_1 z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Ispostavlja se da ovako definisane operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva imaju iste osobine kao kod realnih brojeva (A1)-(A9). To zapravo znači da je skup  $\mathbb{C}$  polje s obzirom na operacije (5) i (6). Može se pokazati da na skupu  $\mathbb{C}$  ne postoji

<sup>17</sup> Koja se inače zove Kantorov (Cantor) dijagonalni postupak.

relacija parcijalnog poretka ' $\leq'$ ' koja bi bila proširenje relacije poretka na  $\mathbb{R}$ , i koja bi se slagala sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

**1.38. Geometrijska interpretacija.** Primetimo da su dva kompleksna broja jednaka akko imaju jednake realne i imaginarne delove, što je posledica sledećeg niza implikacija:

$$\begin{aligned} z_1 = a_1 + i b_1 = z_2 = a_2 + i b_2 &\implies a_1 - a_2 = i (b_2 - b_1) && \text{kvadriranjem} \\ \implies (a_1 - a_2)^2 = i^2 (b_2 - b_1)^2 = -(b_2 - b_1)^2 &\implies a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) = 0. \end{aligned}$$

Ova činjenica nam omogućuje da skup  $\mathbb{C}$  identifikujemo sa  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  na sledeći način (Slika 1):

$$z = a + i b \longmapsto z = (a, b)$$

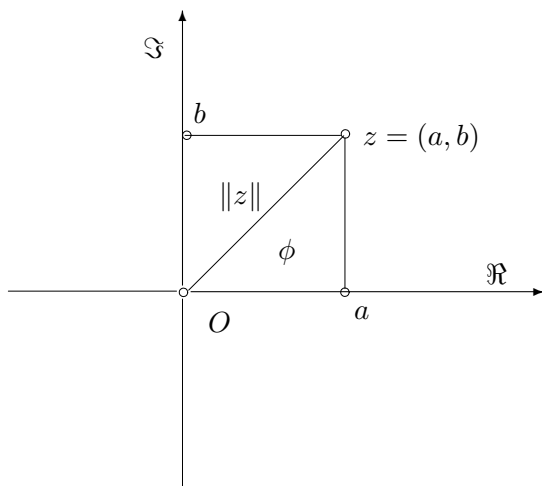
i onda formule (5) i (6) odmah prepisujemo kao

$$(7) \quad z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

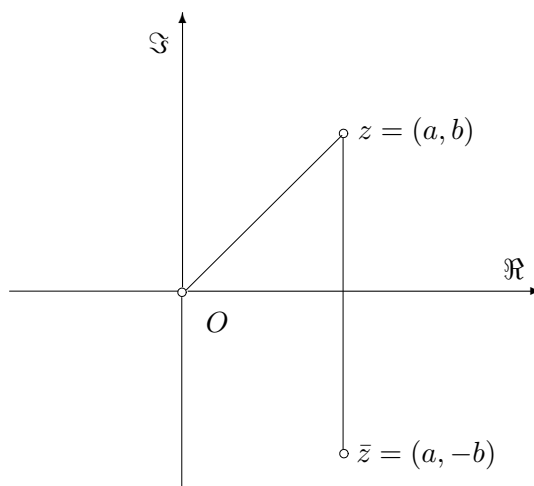
$$(8) \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Primetimo da broju  $i$  odgovara uređeni par  $(0, 1)$ .

Ravan  $\mathbb{R}^2$  u kojoj predstavljamo kompleksne brojeve zove se **Gausova ravan**, ose odgovarajućeg koordinatnog sistema Gausove ravni nazivaju se realna i imaginarna osa (Slika 1).



Dekartov i polarni oblik kompleksnog broja



Konjugovanje

**Slika 1.** Gausova ravan

**1.39. Konjugovanje.** Preslikavanje  $\bar{\phantom{z}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ , definisano formulom

$$\mathbb{C} \ni z = a + i b \longrightarrow \bar{z} = a - i b \in \mathbb{C},$$

zove se **konjugovanje kompleksnih brojeva**. Geometrijski konjugovanje predstavlja osnu simetriju s obzirom na realnu osu u Gausovoj ravni, Slika 1. Konjugovanje kompleksnih

brojeva slaže se sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih kao što pokazuje sledeća propozicija.

**Propozicija.** Za bilo koje kompleksne brojeve  $z_1, z_2$  važi:

$$(i1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(i2) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$(i3) \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_1} = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2.$$

Dokaz. Neka je  $z_1 = a + ib$  i  $z_2 = c + id$ , tada imamo,

$$(i1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(i2) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + ib) \cdot (c + id)} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac - bd) - i(ad + bc) \\ = (a - ib)(c - id) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$(i3) \quad z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + ib)(a - ib) = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2. \quad \square$$

Broj  $\|z_1\|$  zove se **modul (moduo)** kompleksnog broja  $z_1$  i predstavlja u Gausovoj ravni rastojanje broja  $z_1$  od koordinatnog početka.

**1.40. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja.** Izraz  $z = a + ib$  zove se Dekartov oblik kompleksnog broja. Formule (5) i (7) pokazuju da je Dekartov oblik kompleksnog broja pogodan za sabiranje, dok je formula za množenje kompleksnih brojeva (6) (ili (8)) mnogo komplikovanija. Dekartov oblik možemo prepisati na sledeći način,

$$(9) \quad z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Primetimo da je

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

odakle sledi da postoji ugao  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) takav da je

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{i} \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

tako da formula (9) prima sledeći oblik,

$$(10) \quad z = a + ib = \|z\|(\cos \phi + i \sin \phi),$$

koji se zove **trigonometrijski ili polarni oblik kompleksnog broja**.

Ugao  $\phi$  zove se **argument kompleksnog broja**  $z$  i pišemo  $\phi = \arg(z)$ .

Geometrijska interpretacija trigonometrijskog broja vidi se u Gausovoj ravni ako vrh broja  $z = a + ib$  ortogonalno projektujemo na koordinatne ose, dobijamo da je  $\Re(z) = \|z\| \cos \phi$  i  $\Im(z) = \|z\| \sin \phi$ , Slika 1. Kako smo skup  $\mathbb{C}$  identifikovali sa  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tada trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućava da u ravni  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  uvedemo koordinatni sistem čije su koordinate  $r$ -rastojanje tačke  $M$  od koordinatnog početka i  $\phi$  ugao koji zaklapa poluprava  $OM$  ( $O$  je koordinatni početak) sa pozitivnim delom ose  $x$ . Ovaj koordinatni sistem zove se **polarni koordinatni sistem** u ravni.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja pogodniji za množenje kompleksnih brojeva od Dekartovog kao što pokazuje sledeća propozicija.

**Propozicija.** Neka su  $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$  i  $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$  dva proizvoljna kompleksna broja tada važi formula

$$(11) \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Iz ove formule vidimo da se kompleksni brojevi množe tako što se moduli pomnože, a argumenti saberu.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz.} \quad z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = r_1 r_2 ((\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) \\ &\quad + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)) = r_1 r_2 ((\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))). \quad \square \end{aligned}$$

**Posledice.** Za  $0 \neq z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$  i  $n \in \mathbb{N}$  važe sledeće formule:

$$(i1) \quad z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)),$$

$$(i2) \quad z^{-n} = r^{-n}(\cos(n\phi) - i \sin(n\phi)),$$

(i3) ako je  $r = \|z\| = 1$  onda važe i poznate Moavrove formule:

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi),$$

$$(\cos \phi - i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) - i \sin(n\phi).$$

Dokaz. (i1) sledi lako indukcijom iz Propozicije za  $z = z_1 = z_2$ .

(i2) Primitimo da je,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \phi + i \sin \phi)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} \cdot \frac{\cos \phi - i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi} \\ &= r^{-1}(\cos \phi - i \sin \phi), \end{aligned}$$

i primena formule (i1) na broj  $z^{-n} = (z^{-1})^n$  uz korišćenje činjenice da je sinus neparna, a kosinus parna funkcija daje traženu formulu.

(i3) Moavrove formule su sada direktna posledica formula (i1) i (i2) za  $\|z\| = 1$ . □

Napomenimo da se kompleksni brojevi mogu predstaviti i u Eulerovom obliku, tj. važi

$$z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi}.$$

**1.41. n-ti koren iz kompleksnog broja.** Neka je  $z \in \mathbb{C}$ , i

$$\omega^n = z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Tada  $\omega$  nazivamo  $n$ -tim korenom iz kompleksnog broja  $z$ . Kako je  $\omega$  kompleksan broj možemo ga predstaviti u obliku  $\omega = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , a zatim primena Posledice (i1) iz prethodne tačke daje,

$$\omega^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{odakle je}$$

$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Zbog toga što je osnovni period funkcija sin i cos jednak  $2\pi$ , iz prethodnog izraza za  $\alpha_k$  sledi da je  $\sin \alpha_0 = \sin \alpha_n = \dots = \sin \alpha_{pn}$  za svaki  $p \in \mathbb{Z}$ , ili opštije  $\sin \alpha_k = \sin \alpha_{n+k} =$



$\dots = \sin \alpha_{pn+k}$  za svaki  $p \in \mathbb{Z}$  i  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Analogne formule važe i za funkciju kosinus. Odakle, onda sledi da svaki kompleksan broj  $z \neq 0$  ima tačno  $n$  različitih  $n$ -tih korena. Time smo pokazali sledeću teoremu.

**Teorema.** Neka je  $0 \neq z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$ . Tada postoji tačno  $n$  kompleksnih brojeva  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  takvih da je  $\omega_k^n = z$  za  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , i pri tome važi

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right).$$

**Primer.** Odredite sve pete korene iz broja  $z = 3 - i4$ .

Na osnovu prethodne teoreme prvo imamo da je  $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ , tako da je

$$z = 5 \left( \frac{3}{5} - i \frac{4}{5} \right) \implies \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{4}{5} \implies \alpha = -\arcsin \frac{4}{5}.$$

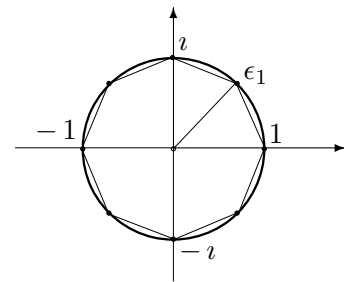
Sada na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da su peti koreni iz  $3 - i4$ :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt[5]{5} \left( \cos \frac{\alpha}{5} + i \sin \frac{\alpha}{5} \right), \quad \omega_1 = \sqrt[5]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 2\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi}{5} \right), \quad \omega_2 = \sqrt[5]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 4\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 4\pi}{5} \right), \\ \omega_3 &= \sqrt[5]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 6\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 6\pi}{5} \right), \quad \omega_4 = \sqrt[5]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 8\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 8\pi}{5} \right), \end{aligned}$$

**1.42. Sfera (krug)  $\mathbf{S}^1$  i  $n$ -ti koreni iz jedinice.** Neka je  $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  jedinični krug u  $\mathbb{R}^2$ . Kako je očigledno skup  $\mathbf{S}^1$  zatvoren za množenje kompleksnih brojeva (proizvod dva kompleksna broja modula 1 je opet kompleksni broj modula 1) i sadrži broj 1, kako su asocijativnost i komutativnost nasledne osobine (prenose se sa skupa na svaki njegov podskup) i kako je inverz kompleksnog broja modula 1 isti takav broj (vidi 1.41 Posledica (i2)), sledi da je  $(\mathbf{S}^1, \cdot)$  podgrupa grupe  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

Skup  $K_n$  je skup  $n$ -tih korena iz jedinice i važi,  $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ . Na analogan način kao i za krug može se proveriti da je  $K_n$  grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva. Nije teško videti da grupa  $K_n$  ima svoju realizaciju kao grupa rotacija ravni koja ostavlja fiksnim pravilni  $n$ -ugao. Dakle,

$$K_n = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \quad \text{gde je} \quad \varepsilon_k = \cos \phi_n + i \sin \phi_n, \quad \phi_n = \frac{2\pi}{n}.$$



Slika 2.  $n$ -ti koreni iz 1 ( $n = 8$ )

Sada iz formule za množenje kompleksnih brojeva imamo sledeću propoziciju.

**Propozicija.** U grupi  $n$ -tih korena iz jedinice  $K_n$  važe identiteti:

- (i1)  $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ , za sve  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .
- (i2)  $\varepsilon_{n-k} = \overline{\varepsilon_k}$ .

## 6. Elementi kombinatorike

**1.42. Varijacije. Permutacije. Kombinacije.** Neka je dat neki konačan skup  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Posmatrajmo skup

$$\text{Var}_k(A) = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \subseteq A^k \mid b_i \neq b_j \text{ za } i \neq j\}.$$

Elementi skupa  $\text{Var}_k(A)$  zovu se *varijacije bez ponavljanja* (ili kraće *varijacije*),  $k$ -tog reda skupa  $A$ .

**Teorema.** *Broj elemenata skupa  $\text{Var}_k(A)$ , jednak broju injekcija sa skupa  $S_k = \{1, 2, \dots, k\}$  na skup  $A$ .*

*Dokaz.* Neka je  $f : S_k \rightarrow A$  '1-1', tada za izbor  $f(1) = b_1$  imamo  $n$  mogućnosti. Sada kada smo izabrali  $f(1) = b_1 \in A$ , za izbor  $f(2) = b_2$  imamo  $n-1 = \text{card}(S_k \setminus \{f(1)\})$  mogućnost, itd., tako da za izbor  $f(k) = b_k$  preostaje  $n-k+1 = \text{card}(S_k \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(k-1)\})$  mogućnost. Kako su izbori za  $f(1), f(2), \dots, f(k)$  nezavisni, broj svih injekcija sa  $S_k$  na  $A$  (odnosno  $\text{card Var}_k(A)$ ) je  $V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ .  $\square$

U slučaju  $k = n$  broj varijacije reda  $n$  na skupu od  $n$  elemenata jednak je broju bijekcija (= injekcija jer je  $A$  konačan) sa  $A$  na  $A$ . Kako se bijekcije nazivaju i **permutacijama**<sup>18</sup> i kako možemo izabrati  $A = S_n$ , vidimo da je broj svih permutacija (bijekcija) skupa od  $n$  elemenata  $P_n$  jednak

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Po definiciji se uzima da je  $0! = 1$ .

Drugi sličan problem je problem određivanja broja svih  $k$ -članih podskupova skupa  $A$  (koji ima  $n$  elemenata), tj.

$$C_k = \{B \subseteq A \mid \text{card } B = k\}.$$

Svaki  $k$ -člani podskup od  $A$  zove se **kombinacija  $k$ -tog reda skupa  $A$** . Da bismo odredili  $\text{card}(C_k)$  potrebno je primetiti da svih  $k!$  permutacija skupa  $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  (uređenih  $k$ -torki) definišu isti skup  $B$ , tako da je taj broj  $C_k^n$  jednak

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Broj  $\binom{n}{k}$  zove se **binomni koeficijent**.

**1.43. Binomni koeficijenti.** Neka od osnovnih svojstava binomnih koeficijenata su ( $0 \leq k \leq n$ )

$$(i1) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (i2) \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad (i3) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

*Dokaz.* (i1) i (i2) direktno iz definicije binomnih koeficijenata.

<sup>18</sup>U slučaju da je  $A$  konačan skup.

(i3) sledi iz

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \\ &\times (n-k+1+k) = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Upravo dokazana formula (i3) poznata je kao i **Pascalova**<sup>19</sup> **jednakost** za binomne koeficijente.

**1.44. Teorema (Binomna formula).** Neka su  $a, b \in \mathbb{R}$  proizvoljni realni brojevi, i  $n$  proizvoljan prirodan broj tada važi sledeća formula<sup>20</sup>,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za  $n=1$  formula je tačna jer je  $(a+b)^1 = a^1 + b^1$ .

Pretpostavimo da je binomna formula tačna za neki  $n \in \mathbb{N}$ , tada je

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{(Pi)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \text{ (vidi 1.43 (i3))}} a^{n-k+1} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k, \\ &= \binom{n+1}{k} \text{ (vidi 1.43 (i3))} \end{aligned}$$

dakle, formula je tada tačna i za  $n+1$ . □

**1.45. Neke posledice binomne formule.** Ako u binomnu formulu prvo uvrstimo  $a=b=1$ , a zatim  $a=1, b=-1$ , dobijamo sledeća dva identiteta

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \\ (1-1)^n &= 0^n = 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

**Posledica.** Kako je  $\binom{n}{k}$  jednak broju  $k$ -članih podskupova skupa  $A$  koji ima  $n$  elemenata, vidimo da je ukupan broj svih podskupova skupa  $A$ , tj. broj elemenata partitivnog skupa  $\mathcal{P}(A)$  jednak  $\text{card } \mathcal{P}(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

<sup>19</sup>Blaise Pascal, 1623–1662, francuski matematičar.

<sup>20</sup>Poznata kao binomna formula.

## 7. Zadaci

**1.46.** Neka su dati skupovi

(a)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , i  $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ .

(b)  $A = [0, 2)$ ,  $B = (1, 3] \cup \{5\}$  i  $C = [0, 1] \cup (2, 4)$ .

Odredite skupove

(i1)  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,      (i2)  $A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,      (i3)  $X = A \cup B \cup C$ ,  $A^c \cup X$ ,

(i4)  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,      (i5)  $A \setminus C$ ,  $B \setminus C$ ,      (i6)  $X \setminus B$ ,  $X \setminus C$ ,

(i7)  $A \Delta B$ ,  $A \Delta C$ ,      (i8)  $\mathcal{P}(A)$ ,  $\mathcal{P}(B)$ ,      (i9)  $\mathcal{P}(A \cup B)$ ,  $\mathcal{P}(A \cap B)$ .

**1.47.** Pokažite da je  $A \cup B = A$  ako i samo ako  $B \subseteq A$ .

**1.48.** Dokažite preostale jednakosti iz 1.4.

**1.49.** Dokažite sve jednakosti iz 1.5.

**1.50.** Neka su  $A$  i  $B$  proizvoljna dva skupa. Pokažite da je

(i1)  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ,      (i2)  $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ .

Dokaz: Pokažimo (i1). Dokaz je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \text{ i } X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ i } \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \quad \square \end{aligned}$$

**1.51.** Dokažite (i2)-(i5) iz 1.7.

**1.52.** Neka su  $A$ ,  $B$  i  $C$  proizvoljni skupovi. Pokažite da važi,

(i1)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$ ,      (i2)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ,

(i3)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

**1.53.** Neka su  $A$  i  $B$  konačni skupovi i neka je  $f : A \rightarrow B$  neka funkcija. Pokažite da su ekvivalentni sledeći iskazi:

(i1)  $f$  je '1-1',      (i2)  $f$  je 'na'.      (i3)  $f$  je bijekcija.

**1.54.** Neka su date binarne relacije  $\rho$ ,  $\sigma$  i  $\tau$  na  $A$ . Pokažite da važi

(i1)  $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}$ ,      (i2)  $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$ ,

(i3)  $\rho(\sigma \cup \tau) = \rho\sigma \cup \rho\tau$ ,      (i4)  $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq \rho\sigma \cap \rho\tau$ .

**1.54.** Neka su  $\rho$  i  $\sigma$  dve binarne relacije na skupu  $A$ . Dokažite

(i1)  $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$ ,      (i2)  $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$ ,

(i3)  $(\rho \setminus \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \setminus \sigma^{-1}$ ,      (i4)  $(\rho^c)^{-1} = (\rho^{-1})^c$ .

**1.55.** Neka skupovi  $A$  i  $B$  imaju konačan broj elemenata. Pokažite

(i1) da važi formula,  $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$ .

(i2) da je  $\text{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\text{card} A}$ , gde je  $\mathcal{P}(A)$  (partitivni skup od  $A$ ) skup svih podskupova skupa  $A$ .

**1.56.** Dokažite da je

(i1)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k}, 1 \right] = (0, 1]$ ,      (i2)  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{k-1}{k}, 1 \right] = \{1\}$ .

**1.57.** Neka su  $A$  i  $B$  konačni skupovi i neka je  $\|A\| = n$  i  $\|B\| = m$ . Koliko ima funkcija sa  $A$  u  $B$ ? Koliko je među njima injekcija, surjekcija i bijekcija.

**1.58.** Neka je skup  $A$  konačan, tj.  $\|A\| = m$ . Koliko ima relacija na skupu  $A$ ? Koliko je među njima refleksivnih, antirefleksivnih, simetričnih i antisimetričnih relacija?

Rešenje: Prema **1.19** svakoj relaciji na  $A$  odgovara tačno jedna tablica tipa  $m \times m$ , funkcije te relacije. Dakle, u tablici ima ukupno  $m^2$  mesta, a na svakom može biti ili 1 ili 0. Prema tome, ukupan broj relacija je  $2^{m^2}$ .

Da bi relacija  $\rho$  na  $A$  bila refleksivna u tablici njene funkcije (vidi **1.19**) na dijagonali moraju biti sve 1, a na sva preosta mesta nema nikakvih uslova. Dakle, ukupan broj svih takvih relacija je  $2^{m(m-1)}$ .

Analogno, kao i za refleksivne relacije njihov broj je  $2^{m(m-1)}$ .

Primitimo da uslov simetričnosti neke relacije  $\rho$  implicira da proizvoljno možemo izabrati vrednosti u  $f_\rho(a_1, a_1)$ ,  $f_\rho(a_2, a_1)$ ,  $f_\rho(a_2, a_2)$ ,  $\dots$ ,  $f_\rho(a_m, a_1)$ ,  $\dots$ ,  $f_\rho(a_m, a_m)$ , i preostale vrednosti od  $f_\rho(a_i, a_j)$  ( $i < j$ ), su potpuno određene. Kako je broj uređenih parova  $(i, j)$  takvih da  $i \geq j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  jednak  $1 + 2 + \dots + m = m(m+1)/2$ , broj traženih relacija je  $2^{\frac{m(m+1)}{2}}$ .

Za antisimetrične relacije analogno kao i za simetrične samo primitimo da je kod antisimetričnih relacija i dijagonala fiksirana, tako da je njihov ukupan broj  $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ .  $\diamond$

**1.59.** Dokažite da je skup  $\mathcal{P}r$  svih prostih brojeva beskonačan.

Dokaz: Pretpostavimo da  $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  konačan i da ima tačno  $k$  elemenata. Posmatrajmo broj  $\Pi = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ , očigledno ovaj broj nije deljiv niti sa jednim prostim brojem  $p_i$  jer pri deljenju sa svakim od njih daje ostatak 1. Prema definiciji ovaj broj deljiv je samo sa 1 i sa samim sobom, tj. on je prost što je kontradikcija sa pretpostavkom da su svi prosti brojevi elementi skupa  $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .  $\square$

**1.60.** Nađite Euklidovim algoritmom NZD( $a, b$ ) ako su

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} & a = 125, b = 75, \\ \text{(i2)} & a = 12600, b = 23760, \\ \text{(i3)} & a = 5246, b = 982, \\ \text{(i4)} & a = 2250, b = 2700. \end{array}$$

**1.61.** Dokažite da je  $\text{NZD}(a, b) \cdot \text{NZS}(a, b) = a \cdot b$ .

**1.62.** Neka je  $a = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdot p_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_n}^{\alpha_n}$  i  $b = q_{j_1}^{\beta_1} \cdot q_{j_2}^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_{j_m}^{\beta_m}$ . Odredite NZS( $a, b$ ) i NZD( $a, b$ ).

Rešenje: Ako sa  $\mathcal{P}(a) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}\}$  i  $\mathcal{P}(b) = \{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_m}\}$  obeležimo skupove prostih brojeva koji učestvuju u rastavima brojeva  $a$  i  $b$  redom.

Ako je  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b)$  tada je  $\text{NZD}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$  pri čemu je  $p_i = p_{i_s} = p_{j_r}$  i  $\gamma_t = \min(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$ .

Slično, ako je  $\{p_1, p_2, \dots, p_l\} = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$  tada je  $\text{NZS}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_l^{\delta_l}$  gde je  $p_i = p_{i_s}$  ili  $p_i = p_{j_r}$  i  $\delta_t = \max(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$ .  $\diamond$

**1.62.** Neka je  $M \subseteq \mathbb{N}$  i neka ima sledeća svojstva

$$\text{(i1)} \quad n_0 \in M, \quad \text{(i2)} \quad n \in M \implies n + 1 \in M,$$

tada  $M \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ .

Dokaz: Neka je  $\overline{M} = \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ , tada iz Peanovih aksioma sledi da je  $\overline{M} \cup M = \mathbb{N}$ , tj.  $M \supseteq \mathbb{N} \setminus \overline{M}$ .  $\square$

**1.63.** Neka je  $M \subseteq \mathbb{N}$  i neka važi

$$\text{(i1)} \quad 1 \in M, \quad \text{(i2)} \quad m \in M, \forall m \leq n \implies n + 1 \in M,$$

tada je  $M = \mathbb{N}$ .

Dokaz: Pretpostavimo da je  $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$ . Izaberimo minimalni element  $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$  (takav uvek postoji jer je  $\mathbb{N}$  dobro uređen, pa svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element). Zbog (i1)  $n_0 \neq 1$ , i primena svojstva (i2) za  $m = n_0 - 1$  impliciraju  $n_0 \in M$  što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je pogrešna polazna pretpostavka  $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$ , dakle  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

**1.64.** Neka je  $M \subseteq \mathbb{N}$  i neka ima sledeća svojstva

$$\text{(i1)} \quad 1 \in M, 2 \in M, \quad \text{(i2)} \quad n, n - 1 \in M \implies n + 1 \in M,$$

tada  $M = \mathbb{N}$ .

**Dokaz:** Pretpostavimo da je  $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$ , tada postoji minimalni element  $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$ . Zbog (i1)  $n_0 \neq 1$ , i  $n_0 \neq 2$ , ako je  $n_0$  onda su zbog minimalnosti od  $n_0$  brojevi  $n_0 - 1$  i  $n_0 - 2 \in M$  i primena svojstva (i2) implicira  $n_0 \in M$  što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom. Dakle,  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

**1.65.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  važe sledeće jednakosti:

$$(i1) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$(i2) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

$$(i3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$(i4) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(i5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1},$$

$$(i6) \quad \sum_{k=1}^n k(n-k+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2),$$

$$(i7) \quad \text{za } 1 \neq x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$(i8) \quad \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dvojki pod korenima}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**Dokaz:** (i1) Neka je  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n k^2 = 1/6 n(n+1)(2n+1)\}$ .

(bi)  $1^2 = 1 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) \implies 1 \in M$ .

(ki) Neka je neki  $n \in M$  tada imamo redom,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{(pi)}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6} (n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1), \end{aligned}$$

tj.  $n+1 \in M$ .

(i2) Neka je  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n k^3 = 1/4 n^2(n+1)^2\}$ .

(bi)  $1^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2(1+1)^2 \implies 1 \in M$ .

(ki) Neka je neki  $n \in M$  tada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\text{(pi)}}{=} \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4} (n+1)^2((n+1)+1)^2 \end{aligned}$$

tj.  $n+1 \in M$ . (i3) Neka je  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n 1/(k(k+1)) = n/(n+1)\}$ .

(bi) za  $n=1$  očigledno se leva i desna strana jednakosti podudaraju, tako da je  $1 \in M$ .

(ki) Neka je neki  $n \in M$  tada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\text{(pi)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{((n+1)+1)}, \end{aligned}$$

tj.  $n+1 \in M$ .

(i4), (i5) i (i7) analogno prethodnim zadacima (i1), (i2) i (i3). Za (i6) iskoristi formulu  $\sum_{k=1}^n k = 1/2 n(n+1)$  i (i1).

(i8) Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo  $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{1+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ , što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je gornja formula tačna za neki prirodan broj  $n$ , tada je

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ dvojkica pod korenima}} &= \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_n}_{n \text{ dvojkica pod korenima}} \stackrel{\text{pi}}{=} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{(n+1)+1}}, \end{aligned}$$

jer je  $1 + \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha$ . Dakle, formula je tačna i za  $n + 1$  i onda AMI implicira da je formula tačna za sve prirodne brojeve.  $\diamond$

**1.66.** Pokažite da za  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  broj  $2^{2^n}$  u dekadskom sistemu završava cifrom 6.

Dokaz: Neka je  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2^n} \text{ završava brojem } 6\}$ .  $2 \in M$  jer je  $2^{2^2} = 16$ . Pretpostavimo da je neki  $n > 1$  element iz  $M$ , tj.  $2^{2^n} = 10 \cdot x + 6$ , ( $x \in \mathbb{N}$ ). Sada imamo,

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2 \cdot 2^n} = (2^{2^n})^2 = (10 \cdot x + 6)^2 = 100 \cdot x^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot x + 36 = 10 \cdot y + 6,$$

pri čemu je  $y = 10 \cdot x^2 + 12x + 3$ . Time je proveden korak indukcije i dokaz je gotov.  $\square$

**1.67.** Dokažite da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  broj nastao dopisivanjem dekadskih zapisa brojeva  $2^n$  i  $5^n$  ima  $n + 1$  cifru.

Dokaz: Za  $n = 1$  radi se o broju 25 koji očigledno ima 2 cifre. Pretpostavimo sada da je tvrdnja istinita za neki  $n \in \mathbb{N}$  i neka broj  $2^n$  ima  $k$  cifara, a broj  $5^n$  ima  $m$  cifara ( $k + m = n + 1$ ). Tada imamo dve mogućnosti

$$(i1) \quad 10^{k-1} < 2^n < 5 \cdot 10^{k-1} \quad \text{i} \quad (i2) \quad 5 \cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k.$$

Potrebno je pokazati da broj nastao dopisivanjem brojeva  $2^{n+1}$  i  $5^{n+1}$  ima tačno  $n + 2 = k + m + 1$  cifru.

(i1)  $2^{n+1} < 10^k$  i broj  $2^{n+1}$  ima  $k$  cifara. S druge strane je  $2^n \cdot 5^n < 5^{n+1} \cdot 10^{k-1}$ , odakle sledi da je  $10^{n-k+1} < 5^{n+1}$ , tj. broj  $5^{n+1}$  ima barem  $n + 2 - k$  cifri. Više ih ne može imati zbog  $5^n < 10^{n-k+1} \implies 5^{n+1} < 5 \cdot 10^{n-k+1} < 10^{n-k+2}$ . Tako da u ovom slučaju tvrdnja važi.

(i2)  $5 \cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k$ , odakle sledi da je  $10^k < 2^{n+1}$  i broj  $2^{n+1}$  ima  $k + 1$  cifru. Iz druge nejednakosti sledi  $5^{n+1} \cdot 10^{k-1} < 10^n$ , odakle je  $5^{n+1} < 10^{n-k+1}$  tako da brojevi  $5^n$  i  $5^{n+1}$  imaju isti broj cifara  $m = n - k + 1$ . Dakle, ukupan broj cifara broja nastalog dopisivanjem brojeva  $2^{n+1}$  i  $5^{n+1}$ , i u ovom slučaju, je  $n + 2 = k + m + 1$ .

**1.68.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} (i1) \quad & \|\sin nx\| \leq n \|\sin x\|, & (i2) \quad & \text{za } \forall \beta \leq -3 \text{ važi } (1 + \beta)^{2n-1} \leq 1 + (2n - 1)\beta, \\ (i3) \quad & (2n)! < \frac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}, & (i4) \quad & \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \end{aligned}$$

Dokaz: (i2) Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo,  $(1 + \beta)^{2 \cdot 1 - 1} = 1 + \beta \leq 1 + \beta = 1 + (2 \cdot 1 - 1)\beta$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj  $n$ , sada imamo

$$\begin{aligned} (1 + \beta)^{2n+1} &= (1 + \beta)^2 (1 + \beta)^{2n} \stackrel{\text{pi}}{\leq} (1 + \beta)^2 (1 + (2n - 1)\beta) = 1 + (2n + 1)\beta \\ &+ 2(2n - 1)\beta^2 + \beta^2 + (2n - 1)\beta^3 \leq 1 + (2n + 1)\beta, \end{aligned}$$

jer je  $2(2n - 1)\beta^2 + \beta^2 + (2n - 1)\beta^3 \leq 0$ , za  $x \leq -3$ . Pokažimo sada ovu nejednakost. Ako je  $\beta = 0$  onda nejednakost važi. Ako  $\beta \neq 0$  tada je ova nejednakost ekvivalentna sa  $(2n - 1)\beta + 4n - 1 \leq 0$  ili  $\beta \leq (1 - 4n)/(2n - 1)$ . Poslednja nejednakost posledica je sledećeg niza ekvivalencija ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),

$$2n - 2 \geq 0 \iff 4n - 1 \leq 6n - 3 \iff \frac{4n - 1}{2n - 1} \leq 3 \iff \beta \leq -3 \leq \frac{4n - 1}{2n - 1}.$$

(i4) Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo  $1/2 \leq 1/\sqrt{3 \cdot 1 + 1}$ , što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj  $n$ , pa imamo redom

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k+1} \stackrel{\text{(pi)}}{\leq} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}},$$

jer je poslednja nejednakost ekvivalentna (koren je monotona funkcija pa možemo da kvadriramo poslednju nejednakost) sa

$$(4n^2 + 4n + 1)(3n + 4) \leq (4n^2 + 8n + 4)(3n + 1) \iff \\ 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \iff n > 0.$$

**1.69.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  važi:

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} \quad \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}, & \text{(i2)} \quad 6 \mid n(n+1)(4n+5), \\ \text{(i3)} \quad 9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3, & \text{(i4)} \quad 30 \mid n^5 + 5n^3 - 6n, \\ \text{(i5)} \quad 3 \mid 5^n + 2^{n+1}, & \text{(i6)} \quad 64 \mid 3^{2n+3} + 40n - 27, \\ \text{(i7)} \quad 9 \mid 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4, & \text{(i8)} \quad 17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}. \end{array}$$

**Dz:** (i1) Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo  $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1 \in \mathbb{N}$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  je  $n/6 + n^2/2 + n^3/3 = \alpha \in \mathbb{N}$ , sada imamo,

$$\frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} = \alpha + \frac{1}{6} + n + \frac{1}{2} + n^2 + n + \frac{1}{3} \in \mathbb{N}.$$

(i2) Definišemo polinom  $f(x) = x(x+1)(4x+5)$ . Sada je tvrdnja ekvivalentna sa  $6 \mid f(n)$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo  $f(1) = 1 \cdot (1+1) \cdot (4 \cdot 1 + 5) = 18$  i  $6 \mid 18$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \mid f(n)$ , tj.  $f(n) = 6\alpha$  za neki  $\alpha \in \mathbb{N}$ . sada imamo,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)(n+2)(4n+9) = n(n+1)(4n+9) + 2(n+1)(4n+9) \\ &= n(n+1)(4n+5) + 4n(n+1) + 2(n+1)(4n+9) = f(n) + 4n(n+1) \\ &\quad + 2(n+1)(4n+9) \stackrel{\text{pi}}{=} 6\alpha + 2(n+1)(6n+9) = 6\alpha + 6(n+1)(2n+3) \\ &= 6 \underbrace{(\alpha + (n+1)(2n+3))}_{\in \mathbb{N}} \implies 6 \mid f(n+1). \end{aligned}$$

Korak indukcije u (i3) i (i4) sličan je istom od (i1), a korak indukcije u (i5)-(i7) sličan je koraku indukcije od (i8), tvrdnju koju ćemo sada dokazati.

(i8) Definišemo funkciju  $f(x) = 3 \cdot 5^{2x+1} + 2^{3x+1}$ . Sada je naša tvrdnja ekvivalentna sa  $17 \mid f(n)$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

Baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo  $f(1) = 3 \cdot 5^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{3 \cdot 1 + 1} = 3 \cdot 125 + 16 = 391 = 17 \cdot 23$  i  $17 \mid f(1)$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \mid f(n)$ , tj.  $f(n) = 17\alpha$  za neki  $\alpha \in \mathbb{N}$ . sada imamo,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4}) = 75 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = 8(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \\ &\quad + 51 \cdot 5^{2n+1} \stackrel{\text{pi}}{=} 8 \cdot 17 \cdot \alpha + 17 \cdot 5^{2n+1} = 17 \underbrace{(8\alpha + 3 \cdot 5^{2n+1})}_{\in \mathbb{N}} \implies 17 \mid f(n+1). \end{aligned}$$

**1.70.** Dokažite da

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} \quad \forall n \geq 5, \text{ važi } 2^n > n^2, & \text{(i2)} \quad \forall n \geq 10, \text{ važi } 2^n > n^3, \\ \text{(i3)} \quad \forall n \geq 2, \text{ važi } \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, & \\ \text{(i4)} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, \text{ i } n \geq 2, \text{ važi } (a+b)^n < 2^n \frac{a^n + b^n}{2}. & \end{array}$$



(i1) Baza indukcije. Za  $n = 5$  imamo  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ .

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki  $4 < n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n > n^2$ . sada imamo,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \stackrel{\text{pi}}{<} 2^n + 2n + 1 \leq 2^{n+1},$$

jer je  $2n + 1 \leq 2^n$ , za svaki  $n \geq 3$ , što ćemo pokazati takođe indukcijom. Za  $n = 3$  tvrdnja važi jer je  $2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$ . Sada pretpostavimo da je ova nejednakost tačna za neki  $3 \leq n \in \mathbb{N}$  i imamo

$$2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 \stackrel{\text{pi}}{<} 2^n + 2 < 2^n + 2^2 = 2^{n+1}.$$

Dakle, time je pokazano da za  $3 \leq n \in \mathbb{N}$  je  $2n + 1 < 2^n$ , a samim tim je dokazana naša tvrdnja.

(i2) analogno kao (i1).

(i4) Baza indukcije. Neka su  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq b$ , tada za  $n = 2$  imamo

$$0 < (a-b)^2 \iff (a+b)^2 < 2(a^2 + b^2) = 2^2 \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za  $2 \leq n \in \mathbb{N}$  i sve  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq b$ . Sada redom nalazimo,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{jer } a+b>0}{<} (a+b)2^{n-1}(a^n + b^n) \leq 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}).$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} (a+b)(a^n + b^n) \leq 2(a^n + b^n) &\iff a^{n+1} - a^n b + b^{n+1} - a b^n \geq 0 \\ &\iff (a-b)(a^n - b^n) > 0, \end{aligned}$$

što je tačno jer je stepena funkcija monotona.

**1.71.** Za  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  definišemo niz

$$a_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad a_2 = \frac{1}{2}(\beta + a_1), \quad \text{za } n > 2 \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Pokažite da za svaki prirodan broj važi formula

$$a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \beta.$$

**Dokaz:** Baza indukcije. Kako rekurentna formula uključuje dva susedna člana niza bazu je potrebno proveriti za  $n = 1$  i  $n = 2$ .

$$n = 1 \implies \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right) \beta = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \beta = a_1,$$

$$n = 2 \implies \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \beta = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \alpha + \frac{1}{3} \frac{9}{4} \beta = \frac{1}{4} \alpha + \frac{3}{4} \beta = a_2.$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je data formula tačna za dva susedna prirodan broja  $n-1$  i  $n$ , sada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) \stackrel{\text{pi}}{=} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (1 - (-1)^{n-1}) \alpha + \frac{1}{3} (1 - (-1)^n) \alpha + \frac{1}{3} (2 + (-1)^{n-1}) \beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (2 + (-1)^n) \beta \right] = \frac{1}{3} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)\right) + \frac{1}{3} \beta \left(2 + \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)\right) = \frac{1}{3} (1 - (-1)^{n+1}) \alpha + \frac{1}{3} (2 + (-1)^{n+1}) \beta \\ \text{jer je} \quad &\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

**1.72.** Pokažite da važe sledeći identiteti,

$$(i1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 2^{n-1} n, \quad (i2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0,$$

$$(i3) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{m}{k} = \binom{m-1}{n},$$

$$(i4) \quad \forall n, k, m \in \mathbb{N}, k, m \leq n, \quad \sum_{j=0}^k \binom{n-m}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

Uopštite (i1) i (i2) povećavajući stepen od  $k$  u sumama.

# Nizovi

## 1. Limes niza

**2.1. Definicija.** Niz realnih brojeva (kraće niz) je svaka funkcija  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Broj  $a(n) \equiv a_n$  je  $n$ -ti član niza. Za niz koristimo oznake  $(a_n)$  ili  $\{a_n\}$ . Pri tome razlikujemo niz  $\{a_n\}$  od skupa  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , jer u nizu<sup>1</sup> svaki član ima tačno određeno mesto na kojem se nalazi, što nije slučaj kod skupa, jer u skupu nije bitan redosled elemenata<sup>2</sup>.

Nizove obično zadajemo: popisivanjem elemenata  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , formulom opšteg člana  $(a_n = n + 1)$  ili rekurentnom relacijom  $(a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1)$ .

**Primer.** Ako je niz zadat formulom, lako se može zapisati popisivanjem elemenata. Obratno je obično teže. Npr. niz

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \text{je} \quad 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots,$$

Za niz  $\{a_n\}$  kažemo da je **monoton** (rastući, opadajući, strogo rastući, strogo opadajući) ako je takav posmatran kao funkcija  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Slično, kažemo da je niz **ograničen** ako je  $\text{Im } a$  ograničen podskup u  $\mathbb{R}$ , tj. ako postoji  $M \in \mathbb{R}$  takav da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  važi,  $|a_n| \leq M$ . Analogno se definiše pojam ograničenosti niza

odozdo:  $(\exists m \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}),$  tako da je  $m \leq a_n$

odozgo:  $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N})$  tako da je  $a_n \leq M$ .

**Primer.** Niz sa opštim članom  $a_n = \frac{1}{n} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  je monoton (strogo opadajući) i ograničen jer je

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \quad \text{i jer je} \quad |a_n| \leq 1.$$

S druge strane, niz  $a_n = \frac{(-1)^n}{n} (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots)$  nije monoton,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} > -\frac{1}{2n+1} = a_{2n+1} < a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2},$$

ali je ograničen jer je  $|a_n| \leq 1$ . Postoje nizovi koji nisu monotoni i koji nisu ograničeni, takav je npr. niz  $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$ <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Niz možemo shvatiti kao uređenu  $\mathbb{N}$ -torku.

<sup>2</sup> tj. skupovi  $\{1, 2\}$  i  $\{2, 1\}$  su međusobno jednaki, a jednaki su npr. i skupu  $\{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1\}$ .

<sup>3</sup> Da li možete napisati opšti član ovog niza?

**2.2. Limes (granična vrednost) niza.** Realan broj  $b$  je granična vrednost ili limes niza  $\{a_n\}$  ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da za } n \geq n(\varepsilon) \implies |a_n - b| < \varepsilon.$$

Za niz koji ima limes kažemo da je **konvergentan** ili da niz **konvergira**. Niz koji nema limes zove se **divergentan** niz, tj. kažemo da niz **divergira**.

Iz definicije limesa zaključujemo da konvergentni niz ima svojstvo da svaka  $\varepsilon$ -okolina tačke  $b$ , tj. interval  $I_b^\varepsilon = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  sadrži beskonačno mnogo članova niza i da se izvan toga intervala nalazi samo konačno mnogo članova niza. Za skup  $A \subseteq \mathbb{N}$  kažemo da sadrži **skoro sve** članove niza  $\{a_n\}$  ako skup  $A^c = \mathbb{N} \setminus A$  sadrži samo konačan broj elemenata članove niza  $\{a_n\}$ . Dakle, ako je niz  $\{a_n\}$  konvergentan i ako je  $b$  njegov limes onda svaka  $\varepsilon$ -okolina<sup>4</sup> tačke  $b$  (tj. skup  $I_b^\varepsilon$ ) sadrži skoro sve elemente niza  $\{a_n\}$ .

Za konvergentne nizove kristimo oznake:

$$a_n \longrightarrow b, \quad \{a_n\} \longrightarrow a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b.$$

**Primer.** Dokažimo da je  $\lim \frac{1}{n} = 0$ . Zaista, neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan. Tada je

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

tako da možemo izabrati  $n(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , gde  $[x]$  predstavlja najveći celi broj manji od  $x$ . Npr. za  $\varepsilon = 0.12$  je  $n(\varepsilon) = [1/0.12] + 1 = [8.333] + 1 = 9$  pa se članovi niza  $a_9, a_{10}, a_{11}, \dots$  nalaze unutar intervala  $(-0.12, 0.12)$ . Primetimo da je  $n(\varepsilon)$  opadajuća funkcija od  $\varepsilon$ , tj. ako smanjimo  $\varepsilon$  veći broj (ali uvek konačan) članova niza ostaće izvan intervala  $I_b^\varepsilon$ . Interval  $I_b^\varepsilon$  sadrži **skoro sve** članove niza, tj.  $I_b^\varepsilon$  sadrži beskonačno članova konvergentnog niza, dok izvan  $I_b^\varepsilon$  uvek ima konačno članova niza  $a_n$ .

Kažemo da niz  $\{a_n\}$  **divergira prema  $+\infty$**  ako je

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da } n \geq n(M) \implies a_n > M.$$

Analogno, niz  $\{a_n\}$  **divergira prema  $-\infty$**  ako je

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da } n \geq n(M) \implies a_n < -M.$$

Na primer, niz  $a_n = n^3$  divergira u  $+\infty$ , a niz  $a_n = -n$  divergira u  $-\infty$ .

**Napomena.** Primetimo da ako proširimo skup  $\mathbb{R}$  sa tačkama  $-\infty, \infty$ <sup>5</sup>, tada divergenciju prema  $-\infty$  ili  $\infty$  u smislu definicije limesa (prema nekom realnom broju  $b$ ) postaje konvergencija u proširenom skupu  $\overline{\mathbb{R}}$ , tako da koristimo oznake  $\lim a_n = \pm\infty$ . Jedno od osnovnih svojstava konvergentnih nizova sadržano je u sledećoj teoremi.

**Teorema.** Niz može imati najviše jedan limes.

<sup>4</sup>bezobzira koliko je  $\varepsilon$  mali pozitivan broj, npr.  $\varepsilon = 0.000000000000000001$ .

<sup>5</sup>U čemu se tačke  $-\infty, \infty$  razlikuju od ostalih tačaka skupa  $\mathbb{R}$  ?

**Dokaz.** Pretpostavimo da niz  $\{a_n\}$  ima dva različita konačna limesa  $b$  i  $\bar{b}$ . Neka je  $\varepsilon = |b - \bar{b}|/2$ . Tada okolina  $I_b^\varepsilon$  mora sadržavati skoro sve članove niza  $\{a_n\}$ , tako da se izvan okoline  $I_b^\varepsilon$  nalazi samo konačno članova niza, pa i okolina  $I_{\bar{b}}^\varepsilon$  (koja je disjunktna sa okolinom  $I_b^\varepsilon$ ) sadrži konačno mnogo članova niza, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je  $\bar{b}$  limes niza  $\{a_n\}$ .  $\square$

## 2. Tačka nagomilavanja niza i podniz

**2.3. Tačka nagomilavanja niza.** Broj  $b$  je tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  ako se u svakoj  $\varepsilon$ -okolini broja  $b$  nalazi beskonačno mnogo članova niza, formalno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \text{ takav da } |a_m - b| < \varepsilon.$$

$+\infty$  tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  ako

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \text{ takav da } a_m > M,$$

$-\infty$  je tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  ako

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \text{ takav da } a_m < -M.$$

Najveća tačka nagomilavanja niza zove se **limes superior** i obeležava se sa  $\limsup$ , a najmanja tačka nagomilavanja niza zove se **limes inferior** i obeležavamo ga sa  $\liminf$ .

**Limes i tačka nagomilavanja niza.** Iz definicije je jasno da je limes niza i tačka nagomilavanja niza, obratno ne važi tj. tačka nagomilavanja niza ne mora biti limes niza, kao što pokazuje primer niza:  $a_n = (-1)^n$ , koji ima dve tačke nagomilavanja 1 i  $-1$ , ali niti jedna od njih nije limes tog niza jer izvan proizvoljne  $\varepsilon$ -okoline ( $\varepsilon < 1$ ) tačke 1 (ili  $-1$ ) postoji beskonačno mnogo članova niza. Ovaj primer je tipičan i pokazuje razliku između tačke nagomilavanja niza i limesa. Ta razlika se sastoji u tome što se unutar svake  $\varepsilon$ -okoline tačke nagomilavanja niza nalazi beskonačno članova tog niza, ali se i izvan te okoline može nalaziti beskonačno članova niza. Npr. u prethodnom primeru u svakoj dovoljno maloj  $\varepsilon$ -okolini  $\varepsilon < 1$  tačaka 1 i  $-1$  ima beskonačno mnogo članova niza sa (parnim odnosno neparnim indeksima). Odavde sledi da ako niz ima barem dve tačke nagomilavanja tada on nije konverentan. Primetimo da ako je niz  $\{a_n\}$  konverentan, tada je  $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$ .

**Primer** (a) Niz  $a_n = n^2(1 - (-1)^n)$ , odnosno  $2, 0, 8, 0, 18, 0, \dots$  je divergentan i ima tačke nagomilavanja 0 i  $+\infty$  i važi  $\liminf a_n = 0$  i  $\limsup a_n = +\infty$ .

(b) Primetimo da su tačke nagomilavanja niza  $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$  svi prirodni brojevi jer se svaki od njih pojavljuje beskonačno mnogo puta, drugim rečima niz može imati beskonačno tačaka nagomilavanja.

**2.4. Podniz.** Podniz niza  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  je svaka kompozicija  $a \circ \alpha$ , gdje je  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strogo rastuća funkcija.  $k$ -ti član podniza  $a \circ \alpha$  je

$$(a \circ \alpha)(k) = a(\alpha(k)) = a_{\alpha(k)} = a_{\alpha_k}.$$

Dakle, podniz se dobije ako iz polaznog niza izbacimo beskonačan broj članova polaznog niza. Jasno, podniz je opet niz.

**Primer.** Podniz  $\{a_{2n}\}$  niza  $a_n = (-1)^n$  je konstantan niz  $1, 1, 1, \dots$ , a podniz  $\{a_{2n-1}\}$  istog niza je konstantan niz  $-1, -1, -1, \dots$ .

## 2.5. Geometrijski niz. Niz

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \quad \text{ili} \quad q, q^2, q^3, q^4, \dots, q^n, \dots$$

zove se **geometrijski niz**. Za  $|q| < 1$  niz konvergira prema nuli. Za  $q = 1$  niz je konstantan,  $1, 1, 1, \dots$ , i konvergira prema 1. Za  $q = -1$  niz postaje  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$  pa ima dve tačke nagomilavanja (1 i  $-1$ ). Za  $|q| > 1$  niz divergira. Posebno, za  $q > 1$  niz konvergira prema  $+\infty$ , dok za  $q < -1$  niz ima dve tačke nagomilavanja  $+\infty$  i  $-\infty$ .

**2.6. Tačke nagomilavanja niza i podniz.** Kombinujući definicije podniza i tačke nagomilavanja zaključujemo:

- (i1) broj  $b$  je tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$  ako i samo ako postoji (barem jedan) njegov podniz  $\{a_{\alpha_k}\}$  koji konvergira prema  $b$ ,
- (i2) ako je niz  $\{a_n\}$  konvergentan, tada za svaki njegov podniz  $\{a_{\alpha_k}\}$  važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**2.7. Ograničenost i konvergencija.** Niz  $\{a_n = (-1)^n\}$  je svakako ograničen, ali nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. Sledeća teorema pokazuje da obrat važi.

**Teorema.** *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

**Dokaz.** Neka je  $a = \lim a_n$ . Izaberimo, npr.  $\varepsilon = 1$ . Tada se članovi niza  $a_{n(1)}, a_{n(1)+1}, a_{n(1)+2}, \dots$  nalaze unutar intervala  $(a - 1, a + 1)$ . Odatle sledi da za svaki  $n$  važi:

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a + 1\},$$

i dokaz je gotov. □

**2.8. Monotonost i kovergencija.** Ispitajmo sada odnos konvergencije nizova i podnizova sa motonošću i ograničenošću istih. U tom cilju imamo prvo sledeću jednostavnu teoremu.

**Teorema 1.** *Svaki niz ima monotoni podniz.*

**Dokaz.** Neka je dat niz  $\{a_n\}$ . Definišimo skup  $A = \{m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies a_n \geq a_m\}$ . Skup  $A$  može biti konačan ili beskonačan. Ako je  $A$  beskonačan tada u njemu možemo odabrati strogo rastući niz  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , odakle zbog definiciji skupa  $A$  imamo  $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k} \leq \dots$ . Dakle,  $\{a_{n_k}\}$  je rastući podniz niza  $\{a_n\}$  i u ovom slučaju dokaz je gotov. Ako je skup  $A$  konačan, izaberimo  $n_1 \in \mathbb{N}$  takav da je veći od svih elemenata od  $A$ . Tada opet postoji  $n_2 \in \mathbb{N}$  takav da je  $n_2 > n_1$  i  $a_{n_2} < a_{n_1}$ , jer bi u suprotnom  $n_1 \in A$ . Jasno, opet imamo  $n_2 \notin M$ . Nastavljajući ovu konstrukciju dolazimo do strogo rastućeg niza  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , koji je podskup skupa  $\mathbb{N} \setminus M$ . Takođe važi da je  $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots > a_{n_k} > \dots$ , pa je  $\{a_{n_k}\}$  strogo opadajući podniz niza  $\{a_n\}$ . □

Sledeća teorema veoma je važna u primenama, tj. u dokazivanjima da su neki nizovi konvergentni.

**Teorema 2.** *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

**Dokaz.** Dokažimo teoremu kada je niz  $\{a_n\}$  rastući. Neka je  $b$  supremum niza posmatranog kao podskup od  $\mathbb{R}$ . Tada za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  takav da  $a_{n(\varepsilon)} > b - \varepsilon$ , jer bi u suprotnom postojao  $\varepsilon_0 > 0$  takav da je  $a_n \leq b - \varepsilon_0$  za svako  $n$ , odakle bi sledilo da  $b$  nije supremum tog niza. Kako je niz  $\{a_n\}$  rastući imamo da za  $n \geq n(\varepsilon)$  važi  $b \geq a_n \geq a_{n(\varepsilon)} \geq b - \varepsilon$ , tj.  $|a_n - b| < \varepsilon$ , dakle,  $\lim a_n = b$  i teorema je dokazana. Analogno se tretira slučaj kada je niz  $\{a_n\}$  opadajući.  $\square$

Koristeći prethodne dve teoreme dobijamo poznatu Bolzano-Weierstrassovu teoremu.

**Teorema 3 (Bolzano – Weierstrass).** *Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.*

**Dokaz.** Prema Teoremi 1 svaki niz ima monoton podniz, kako je dati niz i ograničen, tada je i njegov monotoni podniz takođe ograničen pa taj podniz konvergira prema Teoremi 2.  $\square$

Primetimo da u  $\overline{\mathbb{R}}$  prethoda teorema glasi: **Svaki niz sadrži konvergentan podniz.** Ako je niz ograničen tada prema prethodnoj teoremi ima konvergentan podniz. Ako nije ograničen tada ima podniz koji konvergira prema  $+\infty$  ili prema  $-\infty$ .

### 3. Broj $e$

**2.9. Broj  $e$ .** Dokažimo da je niz,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i ograničen odozgo pa je na osnovu Teoreme 2 iz prethodne tačke konvergentan. Limes tog niza obeležavamo sa  $e$ ,<sup>6</sup> tj.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dokažimo sada da je zadani niz ograničen odozgo:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \frac{1}{n^0} \binom{n}{0} + \frac{1}{n} \binom{n}{1} + \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \cdots + \frac{1}{n^n} \binom{n}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3. \end{aligned}$$

Niz  $\{x_n\}$  je strogo rastući (zbog očiglednih nejednakosti  $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ):

<sup>6</sup>Broj  $e$  je transcendentan (nije nula niti jednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima) i prvih 50 cifara njegovog decimalnog zapisa su: 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995.

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.
\end{aligned}$$

#### 4. Svojstva limesa

**2.10. Algebarska svojstva limesa.** Algebarska svojstva limesa nizova sadržana su u sledećoj teoremi.

**Teorema.** Neka su data dva konvergentna niza  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$ . Tada važe formule:

- (i1)  $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$ ,
- (i2)  $\lim(ca_n) = c \lim(a_n)$ , za proizvoljno  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (i3)  $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$ ,
- (i4) ako za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi  $b_n \neq 0$  i ako je  $\lim b_n \neq 0$ , tada je  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ ,

Dokaz. Dokažimo (i1). Neka je  $\lim a_n = a$  i  $\lim b_n = b$ , tada:

$$(12) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(13) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da bismo dokazali (i1) izaberimo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$  važe obe nejednakosti iz (12) i (13), tako da imamo

$$|(a_n - b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti  $\varepsilon > 0$  iz definicije limesa sledi da je  $\lim(a_n + b_n) = a + b$ .

Za dokaz (i3), prvo primetimo,

$$(14) \quad |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|.$$

Da bismo mogli dovršiti dokaz potrebno je pogodno izabrati okoline ( $\varepsilon$ ) i iskoristiti činjenicu da je konvergentan niz ograničen. To možemo uraditi na sličan način kao u dokazu svojstva (i1). Dakle, kako je niz  $b_n$  konvergentan tada postoji  $M \in \mathbb{R}$  takav da je  $|b_n| < M$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Tada za  $a \neq 0$ <sup>7</sup> imamo,

$$(15) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2M} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

$$(16) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2|a|} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Sada izaberimo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$  važe obe nejednakosti iz (15) i (16), tako da desnu stranu od (14) možemo oceniti,

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M}|b_n| + \frac{\varepsilon}{2|a|}|a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

odakle zbog proizvoljnosti  $\varepsilon > 0$  iz definicije limesa sledi da je  $\lim(a_n b_n) = ab = \lim a_n \lim b_n$ .

Dokaz od (i2) direktno iz definicije; dokaz od (i4) je veoma sličan dokazu od (i3). □

<sup>7</sup> Objasnite kako tretirati slučaj ako je  $a = 0$ .



**Primer 1.** Koristeći da je  $\lim \frac{1}{n} = 0$ , zaključujemo (iz prethodne teoreme) da je,

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{za svaki } \alpha > 0. \\ \infty, & \text{za svaki } \alpha < 0. \end{cases}$$

**Primer 2.** Limes niza,

$$\xi_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 + b_0}, \quad a_i, b_j, \in \mathbb{R}, \quad a_k, b_j \neq 0,$$

nalazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} \lim \xi_n &= \lim \frac{(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0) \cdot \frac{1}{n^m}}{(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0) \cdot \frac{1}{n^m}} = \lim \frac{(a_k n^{k-m} + a_{k-1} n^{k-m-1} + \dots + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \frac{a_0}{n^m})}{(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m})} \\ &= \frac{\lim(a_k n^{k-m}) + \lim(a_{k-1} n^{k-m-1}) + \dots + \lim \frac{a_1}{n^{m-1}} + \lim(\frac{a_0}{n^m})}{\lim b_m + \lim \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \lim \frac{b_1}{n^{m-1}} + \lim \frac{b_0}{n^m}} \\ &= \frac{a_k \lim n^{k-m} + a_{k-1} \lim n^{k-m-1} + \dots + \lim a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \lim \frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1} \lim \frac{1}{n} + \dots + b_1 \lim \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \lim \frac{1}{n^m}} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } k < m, \\ \frac{a_k}{b_k}, & \text{ako je } k=m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right) \infty, & \text{ako je } k > m. \end{cases} \end{aligned}$$

**2.11. Limes i nejednakosti.** U dokazivanju mnogih teorema i nejednakosti koristi se dobro ponašanje limesa prema nejednakostima, kao što pokazuje sledeća teorema.

**Teorema (o dva policajca).** *Ako za nizove  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  i  $\{c_n\}$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da sve  $n \geq n_0$  važi nejednakost  $a_n \leq b_n \leq c_n$  i ako je  $\lim a_n = \lim c_n = \xi$ , tada je i  $\lim b_n = \xi$ .*

**Dokaz.** Iz pretpostavke da je  $\lim a_n = \lim c_n = \xi$ , za dati  $\varepsilon > 0$  sledi da postoje (kao u formulama (12) i (13))  $n_1 \in \mathbb{N}$  i  $n_2 \in \mathbb{N}$  takvi da svi članovi nizova  $\{a_n\}$  i  $\{c_n\}$  sa indeksima većim od  $n_1$  odnosno  $n_2$  pripadaju okolini  $I_\varepsilon^\xi$ . Prisetimo da ako uzmemo  $\tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$  tada će svi članovi sva tri niza  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  i  $\{c_n\}$  čiji su indeksi veći od  $\tilde{n}_0$  pripadati okolini  $I_\varepsilon^\xi$ : jer važi,

$$\xi - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \xi + \varepsilon.$$

Time smo pokazali da za dati  $\varepsilon > 0$  postoji okolina  $I_\varepsilon^\xi$  broja  $\xi$  koja sadrži gotovo sve članove niza  $\{b_n\}$ , pa je i  $\lim b_n = \xi$ .  $\square$

**Primer.** Pokažimo da je  $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$ . Zaista, kako je  $-1 \leq \cos n \leq 1$ , za svaki  $n \in \mathbb{N}$  važe nejednakosti

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Budući da  $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$  i  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , tvrđenje sledi iz prethodne teoreme.

**2.12. Umetnuti intervali.** Neka je dat niz intervala takvih da je

$$I_1 = [a_1, b_1] \supseteq I_2 = [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq I_n = [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

Ovakav niz podskupova od  $\mathbb{R}$  zove se niz umetnutih intervala. Osnovna osobina ovakvog niza sadržan je u sledećoj teoremi.

**Teorema (Koši – Kantor)**<sup>8</sup>. Za svaki niz umetnutih intervala postoji tačka  $c \in \mathbb{R}$  koja pripada svakom od intervala  $I_n$ .

Specijalno, ako je  $\lim(b_n - a_n) = 0$  tada je tačka  $c$  jedinstveno određena.

**Dokaz.** Primitimo da svaka dva intervala  $I_n = [a_n, b_n] \supseteq I_m = [a_m, b_m]$  važi da je  $a_m \leq b_n$  jer bi u suprotnom, tj.  $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$  sledilo  $I_n \cap I_m = \emptyset$ , što je nemoguće. Posmatrajmo sada monotone i ograničene nizove  $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$  i  $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Niz  $A$  je rastući i ograničen odozgo (npr. sa  $b_1$ ), dok je niz  $B$  opadajući i ograničen odozdo (npr. sa  $a_1$ ), pa su na osnovu gornje teoreme konvergentni, tj. važi da je  $\lim a_n = a = \sup A$  i  $\lim b_n = b = \inf B$ . Iz nejednakosti  $a_m \leq b_n, \forall n, m \in \mathbb{N}$  sledi da je  $a \leq b$ . Time je dokazan prvi deo teoreme jer sve tačke iz intervala  $[a, b]$  pripadaju svakom od intervala  $I_m$ .

Ako je još ispunjeno da je  $0 = \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$ , sledi da je  $a = b = c$ , tj. tačka  $c$  je jedinstveno određena.  $\square$

**2.13. Košijev (Cauchy) niz.** Postavlja se pitanje da li je moguće zaključiti da je neki niz konvergentan ako ne poznajemo limes. Odgovor je pozitivan i dobija se posmatranjem razlike susednih članova koje po apsolutnoj vrednosti moraju da teže 0. Preciznije imamo sledeću definiciju, niz  $\{a_n\}$  je niz Košijev (Cauchy) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \text{važi da je} \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

U skupu  $\mathbb{R}$  pojmovi konvergentnog i Košijevog niza su ekvivalentni, kao što tvrdi sledeća teorema.

**Teorema.** Niz je konvergentan ako i samo ako je Košijev.

**Dokaz.** Ako je niz konvergentan, tj. ako je  $\lim a_n = b$ , za  $\varepsilon/2$  postoji neki  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za sve  $n > n_0$  važi  $|a_n - b| < \varepsilon/2$ , odakle za svaki  $k \in \mathbb{N}$  sledi,

$$|a_{n+k} - a_n| = |(a_{n+k} - b) - (a_n - b)| \leq |a_{n+k} - b| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Obrat. Skica dokaza. Prvo se na sličan način kao i kod konvergentnih nizova pokaže da je Košijev niz ograničen<sup>9</sup>. Prema Bolcano-Wajerštrasovoj teoremi Košijev niz  $\{a_n\}$  ima konvergentan podniz. Ako sa  $b$  obeležimo taj limes, u poslednjem koraku pokazuje se da je on i limes polaznog niza.  $\square$

**Primedba 1.** Ova teorema ne vredi ako posmatramo nizove u polju  $\mathbb{Q}$ . Drugim rečima konvergencija Košijevih nizova je u vezi za aksiomom o supremumu, i pokazuje se da se skup  $\mathbb{R}$  može dobiti tako što se racionalnim brojevima (polju  $\mathbb{Q}$ ) dodaju limesi svih racionalnih Košijevih nizova.

**Primedba 2.** Zbog prethodne teoreme Košijevi nizovi su pogodni za dokazivanje konvergencije realnih nizova, pogotovo ako su ti nizovi monotoni (ograničeni jesu), a što se često dešava kod redova sa pozitivnim članovima.

**Primer.** Znamo da je niz  $\{a_n = 1/n\}$  konvergentan i pokažimo koristeći samo definiciju da je i Košijev. Primitimo,

$$\left| \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon + \frac{1}{n+k}.$$

<sup>8</sup>Cauchy – Cantor

<sup>9</sup> Potrebno je u dokazu teoreme za konvergentne nizove zameniti  $b$  sa  $a_n$ , odnosno  $a_n$  sa  $a_{n+k}$ .

Poslednja nejednakost je sigurno ispunjena ako je  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , tako da možemo uzeti npr.  $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ .

**2.14. Neki važni limesi.** Sada navodimo nekoliko važnih limesa,

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0, \quad a > 0, & \text{(i2)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} &= 0, \quad a > 1, \\ \text{(i3)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n &= 0, \quad |q| < 1, & \text{(i4)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \quad a > 0, \\ \text{(i5)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} &= 0, \quad a < 1, & \text{(i6)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1, \\ \text{(i7)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) &= 1. \end{aligned}$$

## 5. Redovi i njihova konvergencija

**2.15. Red realnih brojeva.** Neka je  $\{a_n\}$  niz realnih brojeva, tada sumu

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m \quad (n \leq m), \quad \text{obeležavamo simbolom} \quad \sum_{k=n}^m a_k.$$

Želimo da damo smisao izrazu  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  kao sumi svih članova niza  $\{a_n\}$ . Red realnih brojeva (kraće red) u oznaci,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum a_k$  je niz parcijalnih suma  $\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}$ . Kažemo da red  $\sum a_k$  konvergira (divergira) ako konvergira (divergira) niz parcijalnih suma  $\{s_n\}$ . U tom smislu koristimo zapis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \iff \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Broj  $a_n$  zove se  $n$ -ti član reda, i očigledno važi da je  $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$ .

**Primer.** Geometrijski red,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{odnosno} \quad 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n \dots$$

Za  $q = 1$  očigledno je  $s_k = k$  pa je  $\sum q^{n-1} = \sum 1^{n-1} = +\infty$ . Iz

$$s_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q},$$

za  $|q| < 1$  važi  $q^k \rightarrow 0$  (vidi primer geometrijskog niza), pa geometrijski red konvergira i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Za  $q \geq 1$  je  $\sum q^n = +\infty$ , a za  $q \leq -1$  niz  $\{s_k\}$  nema limes.

**Primer: Zenonov paradoks.** Ahil se nalazi 1 metar iza kornjače, a 10 puta je brži. Ako krenu istovremeno, dok Ahil stigne do početnog položaja kornjače, kornjača će preći neki put do novog položaja. Kad Ahil stigne do novog položaja kornjače, kornjača će biti u novom položaju, itd. Prema tome, Ahil nikad neće stići kornjaču. Objasnite u čemu se sastoji ovaj paradoks.

**2.16. Nužan uslov konvergencije reda.** Kod redova postavljaju se dva prirodna pitanja:

- (1) Da li red konvergira?
- (2) Ako red konvergira, koja mu je suma?

Prvi korak u odgovoru na prvo pitanje sadržan je u sledećoj teoremi.

**Teorema.** *Ako je red  $\sum a_n$  konvergentan, onda je  $\lim a_n = 0$ .*

Dokaz. Neka je  $s = \sum a_n = \lim s_n$ . Kako je  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , imamo redom

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0,$$

i teorema je dokazana. □

**Primer.** Red  $\sum \frac{1}{n}$ , spada među najvažnije redove i naziva se harmonijski red. Harmonijski red ispunjava nužan uslov konvergencije jer je  $\lim \frac{1}{n} = 0$ , ali nije konvergentan,

tj. red je divergentan jer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ .

Dokažimo ovu tvrdnju. Niz parcijalnih suma  $\{s_k\}$  je strogo rastući, a za njegov podniz  $\{s_{2^m}\}$  važi,

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + (\dots) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, iz  $s_{2^m} > 1 + m/2$  sledi da je  $\lim s_{2^m} = +\infty$ , pa je i  $\lim s_k = +\infty$ .

**Primedba.** Red  $\sum \frac{1}{n^p}$  konvergira za  $p > 1$ , a divergira za  $p \leq 1$ .

**2.17. Kriterijumi konvergencije redova.** U slučajevima geometrijskog reda i harmonijskog reda odgovorili smo na pitanje da li redovi konvergiraju i našli njihove sume. Obično je lakše dati odgovor na pitanje da li red konvergira, nego mu naći sumu (ako znamo da konvergira). U slučaju redova čiji su svi članovi pozitivni<sup>10</sup>, ispitivanje konvergencije svodi se na ispitivanje ograničenosti niza parcijalnih suma  $\{s_n\}$ , jer je niz parcijalnih suma monoton i ograničen, pa na osnovu Teoreme 2 iz 3.8 red konvergira.

<sup>10</sup> Redovi sa pozitivnim članovima.

Neka su  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  redovi s pozitivnim članovima, tj.  $a_n, b_n > 0$  za  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za  $n \geq n_0$  je  $a_n \leq b_n$ , red  $\sum b_n$  nazivamo **majorantom** reda  $\sum a_n$ , a red  $\sum a_n$  **minorantom** reda  $\sum b_n$ . Sada dajemo nekoliko kriterijuma konvergencije redova sa pozitivnim članovima.

**Teorema.** Neka su  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  redovi s pozitivnim članovima. Tada važe sledeći kriterijumi konvergencije:

- (i1) Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.
- (i2) Neka je  $\lim \frac{a_n}{b_n} = r$ . Ako je
  - (a)  $0 < r < +\infty$ , tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;
  - (b)  $r = 0$  i red  $\sum a_n$  divergira, tada i red  $\sum b_n$  divergira;
  - (c)  $r = 0$  i red  $\sum b_n$  konvergira, tada i red  $\sum a_n$  konvergira;
  - (d)  $r = +\infty$  i red  $\sum a_n$  konvergira, tada i red  $\sum b_n$  konvergira;
  - (e)  $r = +\infty$  i red  $\sum b_n$  divergira, tada i red  $\sum a_n$  divergira.
- (i3) **Dalamberov kriterijum.** Neka je  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Ako je  $q < 1$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira, a ako je  $q > 1$ , tada red  $\sum a_n$  divergira.
- (i4) **Košijev kriterijum.** Neka je  $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$ . Ako je  $q < 1$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira, a ako je  $q > 1$ , tada red  $\sum a_n$  divergira.
- (i5) **Rabeov kriterijum.** Neka je  $\lim n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = q$ . Ako je  $q > 1$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira, a ako je  $q < 1$ , tada red  $\sum a_n$  divergira.
- (i6) **Gausov kriterijum.** Neka postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $s > 1$  i  $M > 0$  takvi da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = q + \frac{\alpha}{n} + \frac{f(n)}{n^s}, \quad \text{za } n \geq n_0,$$

gde je  $|f(n)| \leq M$  za sve  $n \geq n_0$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira, ako je  $q > 1$  ili ako je  $q = 1$  i  $\alpha > 1$ , i divergira ako je  $q < 1$  ili  $q = 1$  i  $\alpha \leq 1$ .

**Dokaz.** Dokažimo prvu varijantu poredbenog kriterijuma (i1), dok dokaze ostalih tvrdnji izostavljamo.

Neka red  $\sum a_n$  ima konvergentnu majorantu  $\sum b_n = b$  i neka je  $a_n \leq b_n$ . Niz parcijalnih suma  $\{s_k\}$  reda  $\sum a_n$  ograničen je odozgo,  $s_k \leq b$ . Kako je  $a_n > 0$ , niz  $\{s_k\}$  je i strogo rastući pa konvergira prema Teoremi 2 iz 3.8. Druga tvrdnja je očigledna. Dokazi svih pomenutih kriterijuma zasnivaju se na poredbenom kriterijumu datog reda sa geometrijskim ili harmonijskim redom.  $\square$

Rabeov kriterijum se koristi ako Dalamberov kriterijum ne daje odgovor, tj. kada je  $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$ , a Gausov ako ni Rabeov kriterijum ne daje odgovor.

**Primer 1.** Kako je  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , red  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergira jer ima divergentnu minorantu  $\sum \frac{1}{n}$ . Istu ideju možemo primeniti i na red  $\sum \frac{1}{n^p}$ , koji divergira za  $p < 1$ .

**Primer 2.** Ispitajmo konvergenciju reda  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ .

Zbog  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  važi

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

sledi da  $\lim s_k = 1$ . Red  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  takođe konvergira jer ima konvergentnu majorantu  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ . Tada konvergira i red

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \sum \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sada zbog poredbenog kriterijuma red  $\sum \frac{1}{n^p}$  konvergira za  $p \geq 2$ .

**Primer 3.** Ispitajmo konvergenciju reda  $\sum \frac{n}{3^n}$  koristeći Dalamberov kriterijum.

Red konvergira po Dalamberovom kriterijumu jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Red konvergira i po Košijevom kriterijumu jer je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

**Primer 4.** Dokazati konvergenciju reda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

koristeći Dalamberov kriterijum.

## 6. Apsolutna i uslovna konvergencija. Alternirani redovi

**2.18. Apsolutna konvergencija.** U prethodnoj tački dati su kriterijumi konvergencije za redove s pozitivnim članovima. U ovoj tački bavimo se redovima čiji članovi imaju različite predznake. U nekim slučajevima pomaže nam teorema o apsolutnoj konvergenciji.

Kažemo da je red  $\sum a_n$  apsolutno konvergentan (ili da konvergira apsolutno) ako konvergira red  $\sum |a_n|$ .

Primetimo, da za redove s pozitivnim članovima koje smo razmatrali u prethodnoj tački (jer je  $a_n = |a_n|$ ) nema razlike između konvergencije i apsolutne konvergencije. Navedimo sada nekoliko osnovnih teorema o apsolutno konvergentnim redovima.

**Teorema 1.** *Ako je red  $\sum a_n$  apsolutno konvergentan, tada je on i konvergentan.*

**Dokaz.** U dokazu koristimo činjenicu da je svaki Košijev niz konvergentan, koju primenimo na red parcijalnih suma. Kako je red  $\{s_k = \sum_{i=0}^k |a_i|\}$  konvergentan on je i Košijev, tako da  $\forall \varepsilon > 0$  postoji neko  $n_0$  takvo da za sve  $n > n_0$  i za sve  $m \in \mathbb{N}$  sledi da je

$$(17) \quad |s_{n+m} - s_n| = \left| \sum_{i=0}^{n+m} |a_i| - \sum_{i=0}^n |a_i| \right| = \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon.$$

Sada posmatrajmo niz parcijalnih suma reda  $\sum a_n$ , tj. niz  $\{p_k = \sum_{i=0}^k a_i\}$ . Koristeći nejednakost (17), kao i nejednakost mnogouglja za apsolutnu vrednost

$$|p_{n+m} - p_n| = \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon,$$

odakle sledi da je red  $\{p_k\}$  Košijev<sup>11</sup>, pa je i konvergentan.  $\square$

Apsolutno konvergentni redovi imaju sledeće svojstvo.

**Teorema 2.** Redosled sabiranja apsolutno konvergentnog reda  $\sum a_n$  ne utiče na sumu reda. Preciznije, za proizvoljnu bijekciju  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  i apsolutno konvergentni red  $\sum a_n$  važi da je  $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$ .

**Primedba.** Redovi koji su konvergentni, ali nisu apsolutno konvergentni zovu se **uslovno konvergentni redovi**. Uslovno konvergentni redovi nemaju svojstvo iz prethodne teoreme.

**Primer.** Primitimo da npr. redovi

$$(18) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots$$

$$(19) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots$$

apsolutno konvergiraju jer se njihovi redovi apsolutnih vrednosti podudaraju sa konvergentnim geometrijskim redom  $\sum 1/2^{n-1}$ .

Prema prethodnoj teoremi sume redova (18) jednaka su:

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots\right) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

**2.19. Alternirani redovi.** Pitanja konvergencije i pronalaženja suma redova čiji članovi imaju različite predznake, a koji nisu apsolutno konvergentni, je komplikovanije. Red  $\sum a_n$  za koji je  $\text{sign } a_{n+1} = -\text{sign } a_n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$  zove se **alternirani red**. U slučaju alterniranog reda, imamo sledeću teoremu poznatu kao i Lajbnicov kriterijum konvergencije.

**Teorema (Lajbnic).** Alternirani red  $\sum a_n$  konvergira ako važi:

- (i1)  $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$  takav da za  $n \geq n_0$  sledi  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ ,
- (i2)  $\lim a_n = 0$ .

**Primer.** (i1) Alternirani harmonijski red

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

<sup>11</sup> Primitimo da smo pokazali da  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N})$  takvo da za sve  $n > n_0$  i za sve  $m \in \mathbb{N}$  sledi da je  $|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon$ .

konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red apsolutnih vrijednosti  $\sum \frac{1}{n}$  divergira.

(i2) Alternirani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

takođe konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red  $\sum \frac{1}{2n-1}$  divergira. Dakle, pomoću ovog reda moguće je izračunati numeričku vrednost broja  $\pi$ , iako je konvergencija vrlo spora, pa se u praksi koriste drugi redovi koji značajno brže konvergiraju.

**Primedba.** Pokažimo da **Teorema 2** iz prethodne tačke ne važi za alternirani harmonijski red, tj. da suma reda koji je konvergentan ali nije apsolutno konvergentan ovisi o redosledu sabiranja. Prvo primetimo da su i pozitivni i negativni deo alterniranog harmonijskog reda beskonačni, tj.

$$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Pretpostavimo da je dat proizvoljni realni broj  $\alpha$  (npr.  $\alpha > 0$ ), tada uzmemo onoliko početnih pozitivnih članova reda dok njihova suma ne bude veća od  $\alpha$ , zatim uzmemo onoliko početnih negativnih članova niza tako da ukupna suma pozitivnih i negativnih članova ne bude manja od  $\alpha$ , zatim onoliko pozitivnih članova dok ne pređemo  $\alpha$ , i tako dalje. Ovaj algoritam možemo ponavljati unedogled jer je svaki ostatak od pozitivnog i negativnog dela i dalje beskonačan. Dakle, suma reda biće jednaka  $\alpha$ . Ovo je samo specijalni slučaj poznate Rimanove (Riemann) teoreme.

**Teorema (Riman).** Neka je  $\sum a_n$  uslovno konvergentan red i neka je  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ <sup>12</sup>, tada postoji bijekcija  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je  $\alpha = \sum a_{\sigma(n)}$ .

<sup>12</sup> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .



# Neprekidne funkcije

## 1. Limes funkcije

**3.1. Limes funkcije.** Neka je data funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Broj  $a \in \mathbb{R}$  zove se limes ili granična vrednost funkcije  $f$  u tački  $x_0$ , ako je  $f$  definisana na nekoj okolini tačke  $x_0$  (tj. na nekom intervalu  $(c, d) \subseteq D$ ) osim možda u tački  $x_0$ ,

ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takvo da za sve  $x$  za koje je

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ važi } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Podsetimo se da skup  $|x - x_0| < \delta$  možemo zapisati i kao okolinu  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_{x_0}^\delta$  i kako u gornjoj definiciji tačka  $x_0$  ne mora biti u domenu funkcije  $f$  uvedimo oznaku  $\dot{I}_{x_0}^\delta = I_{x_0}^\delta \setminus \{x_0\}$ . Sada se gornji iskaz može napisati u skraćenoj formi kao:

ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takvo da za  $x \in \dot{I}_{x_0}^\delta$  sledi da je  $f(x) \in I_a^\varepsilon$ .

Oznaka koja se koristi za limes funkcije u tački je,

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Primedba.** Pojam limesa funkcije može se definisati na ekvivalentan način preko konvergencije limesa nizova: za funkciju  $f$  koja je definisana na nekoj okolini tačke  $x_0$ , osim možda u tački  $x_0$ , kažemo da ima graničnu vrednost (limes)  $a$  u tački  $x_0$  ako za svaki niz  $\{x_n\}$  koji konvergira ka  $x_0$  niz njegovih slika  $\{f(x_n)\}$  konvergira ka  $a$ .

Ova druga definicija limesa funkcije preko limesa nizova obično se koristi u dokazivanju da neki niz nije konvergentan, jer je dovoljno naći (samo!) jedan niz  $\{x_n\}$  koji konvergira ka  $x_0$ , ali niz njegovih slika  $\{f(x_n)\}$  ne konvergira ka  $a$ .

**3.2. Limes sleva i sdesna.** Ponekad je potrebno ispitati da li funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ima limes sleva (levi limes) ili sdesna (desni) limes. Definicija je slična kao i kod definicije limesa samo je potrebno  $\delta$ -okolinu tačke  $x_0$  zameniti u slučaju levog limesa intervalom  $(x_0 - \delta, x_0)$ , a u slučaju desnog limesa okolinom  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Preciznije,  $a \in \mathbb{R}$  zove se levi limes funkcije  $f$  u tački  $x_0$ , ako je  $f$  definisana na nekoj okolini tačke  $x_0$  (tj. ne nekom intervalu  $(c, d)$  pri čemu je  $c < x_0 < d$ ) osim možda u tački  $x_0$ ,

ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  takvo da za sve  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,

$$\text{važi } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Oznake koje se koriste za limese funkcije sleva odnosno sdesna su:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

**Primer.** Posmatrajmo funkciju *signum* koja je definisana na sledeći način

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x > 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \\ -1, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Kako je funkcija *signum* konstanta na  $(-\infty, 0)$  i  $(0, \infty)$  vidimo da je  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$  i  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ . Dakle, levi limes funkcije i desni limes funkcije se razlikuju međusobno, ali se oba razlikuju i od vrednosti funkcije u posmatranoj tački jer je  $\operatorname{sgn}(0) = 0$ .

**3.3. Limes u  $\overline{\mathbb{R}}$ .** Prirodno se nameće pitanje definisanje limesa funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  u  $\overline{\mathbb{R}}$ , tj. kada  $x \rightarrow \pm\infty$  (u ovom slučaju domen  $D$  funkcije  $f$  mora biti neograničen sa one strane sa koje tražimo limes) ili kada  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ . Definicije ovih limesa zapravo zahtevaju razlikovanje tačaka  $\pm\infty$  od ostalih tačaka skupa  $\mathbb{R}$ . Tako dobijamo sledeće definicije iskazane na formalnom jeziku:

- (i1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists \delta > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap \dot{I}_{x_0}^\delta \implies f(x) > M$ .
- (i2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists \delta > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap \dot{I}_{x_0}^\delta \implies f(x) < -M$ .
- (i3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (N, +\infty) \implies |f(x) - a| < \varepsilon$ .
- (i4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N < 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies |f(x) - a| < \varepsilon$ .
- (i5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) > M$ .
- (i6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) < -M$ .
- (i7)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) > M$ .
- (i8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0)$  tako da za sve  $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) < -M$ .

**Primer 1.** Primetimo prvo da se za limese tipa (i1) i (i2) iz gornje liste mogu posmatrati levi i desni limesi funkcije. Tako npr. za funkciju  $f(x) = 1/x$  važi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

**Primer 2.** Funkcija  $f(x) = 1/x$  je primeri za limese tipa (i3) i (i4), jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0_+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0_-.$$

Oznake  $0_-$  i  $0_+$  znače da se 0 približavamo preko negativnih odnosno pozitivnih brojeva.

**Primer 3.** Funkcija  $f(x) = e^x$  je primer za limese tipa (i4) i (i5) jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Primetimo da je funkcija  $g(x) = -e^x$  je primer za limese tipa (i6), funkcija  $h(x) = e^{-x}$  je primer za limese tipa (i7), dok je funkcija  $i(x) = -e^{-x}$  primer za limese tipa (i8).

## 2. Svojstva limesa funkcija

**3.4. Svojstva limesa funkcije.** Kao što je i za očekivati limesi funkcija u tački i limesi nizova imaju mnoge slične osobine. Dokazi tih osobina su takođe vrlo slični. Tako imamo sledeće teoreme.

**Teorema 1.** *Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  tada je on jedinstven.*

**Dokaz.** Pretpostavimo da postoje dva različita limesa funkcije  $f$  u tački  $x_0$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  i  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, a < b$ . Tada za  $\varepsilon = (b - a)/4$ , postoje  $\delta_a > 0$  i  $\delta_b > 0$  takvi da kada je

$$(a) \quad x \in I_{x_0}^{\delta_a} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_a^\varepsilon, \quad (b) \quad x \in I_{x_0}^{\delta_b} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_b^\varepsilon.$$

Sada za  $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$  sledi da je  $f(x) \in I_a^\varepsilon$  i  $f(x) \in I_b^\varepsilon$ , tj.  $f(x) \in I_a^\varepsilon \cap I_b^\varepsilon = \emptyset$ , što je nemoguće i dokaz je gotov.  $\square$

**Teorema 2.** *Neka funkcije  $f$  i  $g$  imaju limese kada  $x \rightarrow x_0$ . Tada važi*

$$\begin{aligned} (i1) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ (i2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (c f)(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \\ (i3) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ (i4) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{ako je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Dokaz je analogan kao i kod nizova samo je potrebno malo izmeniti frazeologiju:

...  $(\exists n_0) (\forall n \geq n_0) \implies |a_n - b| < \varepsilon$  kod nizova potrebno je zameniti sa,

...  $(\exists \delta) (\forall x \in D) |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$ , kod funkcija.

**Napomena.** Ista svojstva, kao u prethodnoj teoremi, važe i za levi ( $x \rightarrow x_{0-}$ ) i desni ( $x \rightarrow x_{0+}$ ) limes.

**Teorema 3 ('dva policajca').** *Neka je  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Ako postoji  $\delta > 0$  takvo da je za neku funkciju  $h$  ispunjeno*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

tada je  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

**Dokaz.** Analogan onom kod nizova.  $\square$

**Teorema 4.** *Neka je  $f : D \rightarrow E$  i  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dve funkcije. Ako su ispunjeni sledeći uslovi,*

$$(i1) \quad \text{postoji} \quad \lim_{y_0 \rightarrow y} g(y),$$

(i2) ako za svaku okolinu  $\dot{I}'_{y_0} = \dot{I}_{y_0} \cap E$  tačke  $y_0 \in E$  koja ne sadrži  $y_0$  postoji isto takva okolina tačke  $x_0 \in D$ ,  $\dot{I}'_{x_0} = \dot{I}_{x_0} \cap D$  tako da je  $f(\dot{I}'_{x_0}) \subseteq \dot{I}'_{y_0}$ .

tada postoji i  $\lim_{x_0 \rightarrow x} (g \circ f)(x)$  i važi formula:

$$\lim_{x_0 \rightarrow x} (g \circ f)(x) = \lim_{y_0 \rightarrow y} g(y), \quad \text{gde je } y = f(x).$$

**3.5. Jedan važan limes.** Pokažimo da je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Koristimo Teoremu 3 iz prethodne tačke, primenjenu na funkcije  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \tan x$  i  $h(x) = x$ . Dobro je poznato da za  $\pi/2 > x > 0$  važi,

$$(20) \quad \sin x < x < \tan x, \quad \text{ili nakon deljenja sa } \sin x > 0$$

$$(21) \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{ili nakon uzimanja recipročnih vrednosti}$$

$$(22) \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

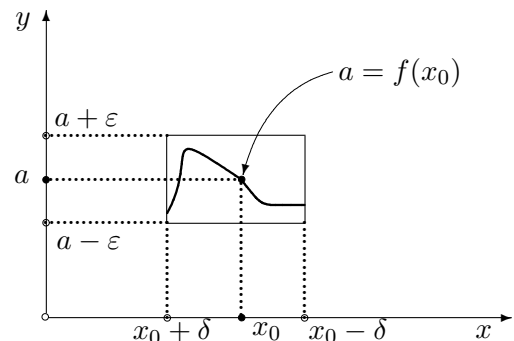
Kako su sve tri funkcije  $\sin x$ ,  $x$  i  $\tan x$  neparne za  $x \in (-\pi/2, 0)$  važiće nejednakosti (21), jer za  $x < 0$  dobijamo suprotne nejednakosti od onih u (20), ali nakon množenja sa  $\sin x < 0$  dobijamo nejednakosti (21). Kako je  $\lim_{h \rightarrow 0} 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \cos x$ , iz prethodne teoreme i nejednakosti (22) sledi tvrdnja.

### 3. Nепrekidnost

**3.6. Nепrekidne funkcije.** Posmatramo funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , gde je  $D \subseteq \mathbb{R}$ , koja je definisana u nekoj okolini  $I_a$  tačke  $a$ . Opisno govoreći funkcija  $f$  nепrekidna je u tački  $a \in D$  ako se njene vrednosti  $f(x)$  približavaju vrednosti  $f(a)$  kada se  $x$  približava tački  $a$ . Preciznije imamo sledeću definiciju.

Funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  nепrekidna je u tački  $a \in D$ , ako  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D)$  takav da iz  $D \supseteq |x - a| < \delta$  sledi  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Geometrijska interpretacija limesa funkcije  $f$  (čiji domen sadrži neku okolinu tačke  $a$ ) u tački  $a$  sastoji se u tome da postoji neki pravougaonik  $[a - \delta, a + \delta] \times [f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon]$  koji sadrži grafik funkcije  $f$  restringovan na segment  $[a - \delta, a + \delta]$ , tj. sadrži skup  $f([a - \delta, a + \delta]) \subseteq [f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon]$  (vidi Sliku 1). Pojam nепrekidnosti funkcije  $f$  u tački  $a$  ekvivalentan je sa



**Slika 1.** Nепrekidnost funkcije u tački

postojanjem limesa funkcije u tački  $a$ , koji je jednak vrednosti funkcije u toj tački, tj.  $f(a)$ . Drugim rečima funkcija  $f$  je nепrekidna u tački  $a$  ako komutira sa znakom

limesa, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \rightarrow a} x).$$

Funkcija  $f$  je neprekidna na skupu  $E \subseteq D$  ako je neprekidna u svakoj tački skupa  $E$ . Funkcija  $f$  je neprekidna ako je neprekidna u svakoj tački svoga domena  $D$ . Skup svih neprekidnih funkcija na skupu  $E \subseteq \mathbb{R}$  obeležava se sa  $C(E, \mathbb{R})$  ili kraće  $C(E)$ .

**Primer 1.** Konstantna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a$  je neprekidna u svakoj tački  $x \in \mathbb{R}$ . Jasno, sa proizvoljni  $\varepsilon > 0$  može se uzeti bilo koji broj  $\delta > 0$ .

**Primer 2.** Funkcija  $f(x) = x$  neprekidna je na  $\mathbb{R}$ .

Zaista, za proizvoljnu tačku  $x_0 \in \mathbb{R}$  važi da je  $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$  ako je  $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ .

**Primer 3.** Funkcija  $f(x) = \sin x$  je neprekidna na  $\mathbb{R}$ .

Zaista, za proizvoljnu tačku  $x_0 \in \mathbb{R}$  važi da je

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

odakle je  $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ .

Ovde smo koristili da je  $|\sin x| \leq |x|$ .

**3.7. Tačke prekida.** Neka je funkcija  $f$  definisana u nekoj okolini tačke  $x_0$ ,  $I_{x_0}^\varepsilon$  ( $I_{x_0}^\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ), osim eventualno u samoj tački  $x_0$ . Funkcija  $f$  ima otklonjivi prekid u tački  $x_0$  ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

pri čemu  $f$  ili nije definisana u tački  $x_0$  ili je  $f(x_0) \neq a$ . Prekid se otklanja tako što definišemo  $f(x_0) = a$ .

Funkcija  $f$  ima prekid prve vrste u tački  $x_0$  ako postoje levi i desni limesi u tački  $x_0$  koji su konačni i različiti.

Funkcija  $f$  ima prekid druge vrste u tački  $x_0$  ako je barem jedan od levog i desnog limesa u tački  $x_0$  beskonačan ili ne postoji.

**Primer 1.** Funkcija  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ima otklonjivi prekid u tački  $x = 0$ . Prekid se otklanja tako što definišemo  $f(0) = 1$ , jer je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , i tako dobijamo neprekidnu funkciju na čitavom  $\mathbb{R}$ .

Funkcija  $\operatorname{sgn}(x)$  ima u tački  $x = 0$  prekid prve vrste. Zaista, u toj tački postoje levi i desni limes koji su konačni, ali različiti.

Funkcija  $1/x$  ima prekid druge vrste u tački  $x = 0$ , jer su levi i desni limes beskonačni.

**Primer 2.** Funkcija  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ima prekid druge vrste u tački  $x = 0$ , jer kada  $x \rightarrow 0_+$  limes zdesna ne postoji (u svakom, ma kako malom, intervalu oko nule  $f(x)$  poprimi sve vrednosti između  $-1$  i  $1$ ).

**Primer 3.** Funkcija  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ima u svakoj tački prekid druge vrste, jer u svakoj ma kako maloj okolini bilo kojeg realnog broja  $r$  ima beskonačno mnogo racionalnih i iracionalnih brojeva, pa npr. za  $\varepsilon = 1/2$  neće postojati  $\delta > 0$  tako da za svako  $x \in I_r^\delta$  važi da je  $|f(x) - f(r)| < 1/2$ . Drugim rečima za svako  $\delta > 0$  postojaće u okolini  $I_r^\delta$  broj  $r_\delta$  takav da je  $|f(r_\delta) - f(r)| = 1 > 1/2$ .<sup>1</sup>

**3.8. Lokalna svojstva neprekidnih funkcija.** Lokalna svojstva funkcija odnose se na ponašanja funkcija u nekoj maloj okolini tačaka iz domena funkcije, npr. sama neprekidnost funkcije u tački je lokalno svojstvo. Najvažnija svojstva neprekidnih funkcija sadržaj su sledeće teoreme.

**Teorema.** Neka je  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja je neprekidna u tački  $x_0 \in D$ . Tada važe sledeća svojstva:

- (i1) Funkcija  $f$  je ograničena u nekoj okolini tačke  $x_0$ .
- (i2) Ako je  $f(x_0) \neq 0$ , tada postoji okolina  $I_{x_0}$  tačke  $x_0$  u kojoj funkcija ne menja znak.
- (i3) Ako je  $g : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$  funkcija neprekidna na nekoj okolini tačke  $x_0$  u kojoj je i  $f$  neprekidna. Tada su i funkcije
  - (a1)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,
  - (a2)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,
  - (a3)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , (ako je  $g(x) \neq 0$ ),

definisane u nekoj okolini tačke  $x_0$  i neprekidne u  $x_0$ .

- (i4) Ako je funkcija  $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$  neprekidna u tački  $y_0 \in E$  pri čemu je  $f : D \longrightarrow E$ ,  $f(x_0) = y_0$  i  $f$  je neprekidna u tački  $x_0$ , tada je i kompozicija  $(g \circ f)$  definisana na  $D$  i neprekidna je u tački  $x_0$ .

**Dokaz.** (i1) sledi direktno iz definicije.

(i2) Neka je npr.  $f(x_0) > 0$ , tada za  $\varepsilon = f(x_0)/2$  postoji  $\delta > 0$  tako da za sve  $x \in I_a^\delta$  važi da je  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ , tj.

$$0 < f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon = \frac{3}{2} f(x_0).$$

Dakle, na okolini  $I_a^\delta$  funkcija  $f$  je pozitivna, tj. ima isti znak kao i u tački  $f(x_0)$ . Slično, se tretira i slučaj kada je  $f(x_0) < 0$ .

(i3) sledi iz svojstava limesa Teoreme 2 iz tačke 4.4 i činjenice da ako je funkcija neprekidna u tački  $x_0$  da onda primena limesa i dejstva funkcije komutiraju.

(i4) slično kao u dokazu (i3), tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(f(x))) = \lim_{y \rightarrow y_0} (g(y)) = g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0). \quad \square$$

<sup>1</sup> Ako je  $r \in \mathbb{Q}$  tada izaberemo da je  $r_\delta$  iracionalan i obratno.

**Važna primedba.** Svojstva (i3) i (i4) iz prethodne teoreme znatno pojednostavljaju praktično nalaženje limesa funkcija. Jedna od osnovnih ideja u rešavanju raznih problema (a pogotovo matematičkih) jeste svođenje polaznog problema na već rešeni. U ovom kursu ta ideja se provodi na sledeći način<sup>2</sup>: prvo se po definiciji nađu osnovni i važni limesi (vidi tačku 3.14), a zatim se iskoriste svojstva limesa (izvoda, integrala) iz ove teoreme i njoj analognih za izračunavanje komplikovanijih limesa (izvoda, integrala).

**Primer 1.** Polinom  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , pri čemu su koeficijenti  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ , je neprekidna u svakoj tački skupa  $\mathbb{R}$ , jer je funkcija  $g(x) = x$  neprekidna za svako  $x \in \mathbb{R}$ , pa prvo primena (a2) iz (i3) prethodne teoreme daje da je  $a_m x^m$  neprekidna, a zatim primena svojstva (a1) iz iste teoreme daje da je  $f(x)$  neprekidna.

**Primer 2.** Racionalna funkcija  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , gde su  $P(x)$  i  $Q(x)$  polinomi, je neprekidna na čitavom domenu tj. gde je  $Q(x) \neq 0$ . Ovo sledi iz prethodnog primera i svojstva (i2) (a3) iz prethodne teoreme.

## 4. Globalna svojstva neprekidnih funkcija

**3.9. Globalna svojstva neprekidnih funkcija.** Globalno svojstvo funkcija je ono koje se odnosi na čitav domen funkcije.

**Teorema (Bolcano-Koši).** Neka je  $f$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$  takva da je  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (tj. brojevi  $f(a)$  i  $f(b)$  su suprotnih znakova), tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je  $f(c) = 0$ .

**Dokaz.** Podelimo segment  $[a, b]$  na dva segmenta jednakih dužina  $I_1 = [a, (a+b)/2]$  i  $I_2 = [(a+b)/2, b]$ . Ako je  $f((a+b)/2) = 0$ , onda smo gotovi, ako je  $f((a+b)/2) \neq 0$  tada tačno jedan od segmenata  $I_1$  i  $I_2$  ima istu osobinu kao i polazni segment  $[a, b]$ , tj. proizvod vrednosti funkcije u njegovim krajevima je manji od 0. Sada sa tim segmentom ponovimo proceduru i nastavimo na isti način dalje. Tada ili u jednom od koraka nađemo tačku  $c$  (koja je središte jednog od segmenata) takvu da je  $f(c) = 0$  ili dobijemo niz umetnutih segmenata  $\{I_n\}$  pri čemu njihova dužina teži 0 (jer u svakom koraku podelimo prethodni segment na dva dela i tako mu prepолоvimo dužinu) i svaki od njih ima osobinu da vrednosti funkcije  $f$  u njegovim krajevima ima suprotan znak. U drugom slučaju postoji jedinstvena tačka  $c \in (a, b)$ , vidi Teorema iz 3.12 koja se nalazi u svakom od segmenata. Iz definicije umetnutih intervala  $\{I_n\}$  dobijamo dva niza levih  $\{a_n\}$ , odnosno desnih  $\{b_n\}$  krajeva segmenata, takvih da je npr.  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$  i  $\lim a_n = \lim b_n = c$ . Prema osobini limesa sledi da je

$$\lim f(a_n) = c \leq 0 \quad \text{i} \quad \lim f(b_n) = c \geq 0$$

odakle sledi da je  $f(c) = 0$ . Dakle, u oba slučaja sledi da postoji  $c \in (a, b)$  takva da je  $f(c) = 0$ . □

**Primedba.** Dokaz prethodne teoreme sadrži i algoritam (metoda polovljenja segmenta) za traženje nula neprekidne funkcije  $f(x)$ .

**Posledica.** Ako je  $\phi : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i ako je  $\phi(a) = A$  i  $\phi(b) = B$ , tada za svaki  $C \in (A, B)$  postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je  $\phi(c) = C$ .

<sup>2</sup>I u traženju limesa nizove, limesa funkcija, izvoda funkcija i integrala.

**Dokaz.** Posmatrajmo funkciju  $f(x) = \phi(x) - C$ , koja je neprekidna na intervalu  $I$  i kako je  $f(a) \cdot f(b) = (A - C)(B - C) < 0$ , prema prethodnoj teoremi zaključujemo da postoji  $c \in I$  takav da je  $0 = f(c) = \phi(c) - C$ , odakle sledi tvrdnja.  $\square$

**Primer.** Neka je  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima, tj. neka je  $n = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  i  $a_n \neq 0$ . Tada se za dovoljno veliko  $M \in \mathbb{R}$  polinom  $f(x)$  ponaša kao njegov vodeći član (koji je po apsolutnoj vrednosti veći od sume svih ostalih članova). Dakle, ako je  $a_n > 0$  ( $a_n < 0$ ) tada je za sve  $x > M$   $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) i za sve  $x < -M$   $f(x) < 0$  ( $f(x) > 0$ ) i primena prethodne teoreme implicira egzistenciju nekog realnog broja  $c$  takvog da je  $f(c) = 0$ . Time smo pokazali sledeće tvrđenje: *polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima ima barem jednu realnu nulu.*

Polinom parnog stepena sa realnim koeficijentima, npr.  $f(x) = x^2 + 1$ , ne mora imati realnu nulu.

**3.10. Teorema (Vajerštrasa o ekstremnim vrednostima).** *Neka je funkcija  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna. Tada je  $f$  ograničena na  $I$ , i postoje tačke iz  $I$  u kojima funkcija prima najmanju i najveću vrednost.*

**Dokaz.** Zbog lokalnih svojstava neprekidne funkcije Teorema (i1) iz 4.8., sledi da za svaku tačku  $x \in I$  postoji okolina  $I_x$  takva da je na skupu  $I'_x = I \cap I_x$  funkcija  $f$  ograničena. Unija svih takvih okolina  $I_x$ ,  $x \in I$  obrazuje otvoreno pokrivanje<sup>3</sup> segmenta  $I$ , pa prema lemi o konačnom pokrivanju možemo naći konačno pokrivanje segmenta  $I$  okolinama  $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_k}$ . Kako je funkcija ograničena na svakoj od okolina  $I'_j$ , imamo da je  $m_j \leq f(x) \leq M_j$ ,  $m_j, M_j \in \mathbb{R} \forall j = 1, 2, \dots, k$ . Time smo pokazali da za svaki  $x \in I$  važi da je

$$\min\{m_1, m_2, \dots, m_k\} \leq f(x) \leq \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\},$$

tj. funkcija  $f$  je ograničena na  $I$ .

Za drugi deo dokaza obeležimo sa  $M = \sup\{f(x), x \in I\}$  ( $m = \inf\{f(x), x \in I\}$ ). Pretpostavimo da je za svaki  $x \in I$ ,  $f(x) < M$ , jer u suprotnom nemamo šta dokazivati. Tada je funkcija  $M - f(x)$  neprekidna i pozitivna na segmentu  $I$  i poprima vrednosti po volji bliske 0<sup>4</sup>. Posmatrajmo funkciju  $1/(M - f(x))$  koja je (zbog lokalnih svojstava neprekidnih funkcija), neprekidna na segmentu  $I$ , a s druge strane je neograničena na  $I$  što je u kontradikciji sa upravo dokazanom ograničenosti neprekidne funkcije na segmentu.

Dakle, postoji tačka  $x_M \in I$  takva da je  $f(x_M) = M$ . Analogno se pokazuje da postoji tačka  $x_m \in I$  takva da je  $f(x_m) = m$ .  $\square$

**Posledica.** *Neka je funkcija  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna. Tada je  $f([a, b]) = [m, M]$ .*

**3.11. Neprekidnost i monotonost.** Neka je  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Ako je funkcija strogo rastuća ili strogo opadajuća na  $I$  onda je ona očigledno injektivna. Ali važi i obrat, jer ako pretpostavimo da nije tako tada postoje tri tačke  $x_1 < x_2 < x_3$  segmenta  $[a, b]$  takve da  $f(x_2)$  nije između  $f(x_1)$  i  $f(x_3)$ . U ovom slučaju ili je  $f(x_3)$  između  $f(x_1)$  i  $f(x_2)$ , ili je  $f(x_1)$  između  $f(x_2)$  i  $f(x_3)$ . Razmotrimo drugu mogućnost, tada je funkcija  $f$  neprekidna na segmentu  $[x_2, x_3]$  i postoji tačka (prema 4.9 Posledica)  $y \in [x_2, x_3]$  takva da je  $f(y) = f(x_1)$ . Dakle, pronašli smo tačku  $y > x_1$

<sup>3</sup> Kažemo da je sistem  $F = \{X\}$  skupova pokrivanje skupa  $Y$  ako je  $Y \subseteq \bigcup_{X \in F} X$ . Važi sledeća lema (Borel-Lebeg). U svakom sistemu intervala koji pokrivaju segment  $[a, b]$  postoji konačan podsistem koji takođe pokriva segment  $[a, b]$ .

<sup>4</sup> Sledi iz definicije supremuma skupa  $A$ .



takvu da je  $f(y) = f(x_1)$ , što je u kontradikciji sa injektivnosti funkcija  $f$ . Time smo pokazali propoziciju.

**Propozicija 1.** *Neprekidna funkcija  $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  je injektivna akko je  $f$  strogo monotona na segmentu  $I$ .*

Takođe dve sledeće propozicije sadrže važna svojstva neprekidnih funkcija.

**Propozicija 2 (kriterijum neprekidnosti monotone funkcije).** *Monotona funkcija na  $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  je neprekidna ako i samo ako je  $f(I) = [f(a), f(b)]$  ( $f$  rastuća) ili  $f(I) = [f(b), f(a)]$  ( $f$  opadajuća).*

**Propozicija 3.** *Neka je funkcija  $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  strogo monotona i neprekidna, tada je  $f(I) = J$ , segment ( $f(I) = [f(a), f(b)]$  ili  $f(I) = [f(b), f(a)]$ ) i inverzna funkcija  $f^{-1} : J \longrightarrow I$  je dobro definisana i neprekidna.*



# Diferencijalni račun

## 1. Izvod funkcije

**4.1.** Definicija. Neka je data funkcija  $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  i  $x_0 \in (a, b)$ , tada ako postoji broj

$$(23) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazivamo ga izvodom funkcije  $f$  u tački  $x_0$ . Takođe tada kažemo da je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x_0$ . Primetimo da se (23) može zapisati na ekvivalentne načine

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \text{ili}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ako uvedemo oznaku  $h = x - x_0$  tada linearnu funkciju  $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)h$  u  $h$  nazivamo diferencijalom funkcije  $f$  u tački  $x_0$ . Sada možemo reformulisati definiciju izvoda na sledeći način: funkcija  $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  je diferencijabilna u tački  $x_0 \in (a, b)$  ako

$$(24) \quad f(x + h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x, h),$$

gde je  $x \longrightarrow A(x)h$  linearna funkcija u  $h$ , i  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} = 0$ . Sledeće veličine igraju važnu ulogu,

$$\text{priraštaj argumenta: } \Delta x(h) = (x + h) - x = h,$$

$$\text{priraštaj funkcije: } \Delta f(x; h) = f(x + h) - f(x).$$

Za diferencijal se koristi i oznaka  $df(x)(h) = A(x)h = f'(x)h$ , i on predstavlja linearnu aproksimaciju funkcije  $f$  u okolini tačke  $x$ . Iz definicije izvoda (vidi naredni Primer) očigledno sledi da je za  $f(x) = x$  njen izvod  $f'(x) = 1$ , odakle nalazimo i da je

$$dx(h) = 1 \cdot h = h,$$

tako da ponekad kažemo da se diferencijal nezavisne promenljive podudara sa njenim priraštajem. Takođe, imamo

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \quad \text{ili} \quad df(x) = f'(x)dx,$$

zbog čega za izvod koristimo oznaku (Lajbnic)  $\frac{df(x)}{dx}$ . Napomenimo da je oznaku  $f'(x)$  uveo Lagranž.

Ako je za funkciju  $f$  definisana  $f'$  za sve tačke nekog skupa  $E \subseteq D$  tada kažemo da je  $f$  diferencijabilna na  $E$  i  $f'$  je realna funkciju na  $E$ . Ako je  $E = D$  tada kažemo da je funkcija  $f$  diferencijabilna funkcija.

**Primedba.** Iz definicije limesa sledi da za izolovane tačke skupa  $D$  (tj. takve tačke za koje postoji neka okolina  $I$  u kojoj nema drugih tačaka skupa  $D$ ), izvod nije definisan iako sama funkcija može biti definisana. Sledeća teorema pokazuje da je diferencijabilnost specijalnije svojstvo od neprekidnosti.

**Teorema.** *Ako je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x_0$  onda je ona i neprekidna u toj tački.*

**Dokaz.** Iz definicije izvoda funkcije  $f$  u tački  $x_0$  imamo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

Drugim rečima važi da je  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ , tj. funkcija  $f$  je neprekidna u tački  $x_0$ , vidi 4.6.  $\square$

**Primedba.** Iz prethodne teoreme vidimo da je biti diferencijabilna funkcija 'bolje' svojstvo od biti samo neprekidna funkcija. Zbog toga za funkcije koje su neprekidne na skupu  $D$  kažemo da su klase  $\mathcal{C}^0(D)$ , a funkcije čiji je izvod neprekidan na skupu  $D$  nazivamo funkcijama klase  $\mathcal{C}^1(D)$ .

**4.2. Primer.** (a) Izvod konstantne funkcije  $f(x) = c$  nalazimo iz definicije,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(b) Slično, za funkciju  $f(x) = x$  nalazimo,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(c) Za funkciju  $f(x) = x^2$  imamo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + (h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

(d) Pokažite<sup>1</sup> da je  $(x^n)' = n x^{n-1}$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

(e) Da bismo našli izvod funkcije  $f(x) = \sin x$  potrebna nam je sledeća formula

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y,$$

koja je posledica adicijonih formula za funkcije  $\sin x$  i  $\cos x$ . Sada nalazimo,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin[(x + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2}] - \sin[(x + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2}]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos(\lim_{h \rightarrow 0} (x + \frac{h}{2})) = \cos x. \end{aligned}$$

(f) Analogno se dokazuje da je  $(\cos x)' = -\sin x$ .

<sup>1</sup>Indukcijom ili primenom binomne formule.

**4.3. Geometrijska i mehanička interpretacija izvoda.** Izvodi funkcija su neophodni u rešavanju mnogih problema u mnogim naukama kao što su: fizika, mehanika, hemija, biologija, ekonomija, i sl. Njutn (Isaac Newton)<sup>2</sup> je u XVII. veku počeo razvijati diferencijalni račun baveći se problemom određivanja brzine.

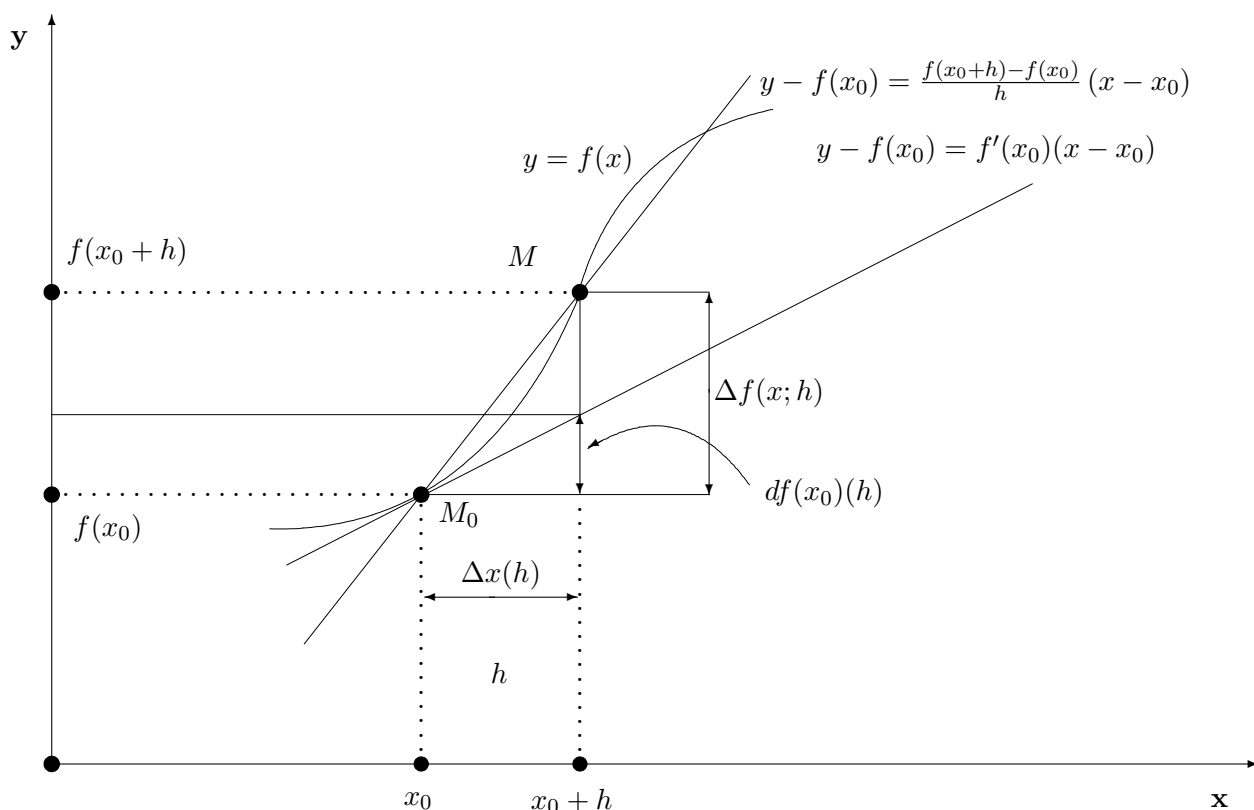
**Problem brzine.** Neka je formulom,  $s = f(t)$ , dat zakon kojim se tačka  $M$  kreće, pri čemu  $s$  označava pređeni put u nekom vremenskom trenutku  $t$ . Preciznije pretpostavljamo da je kretanje počelo u trenutku  $t = 0$  i da je  $f(0) = 0$ . Tada tačka  $M$  do trenutka  $t = t_0$  pređe put  $s_0 = f(t_0)$ . Prosečna brzina kojom se tačka  $M$  kretala od trenutka  $t_0$  do trenutka  $t$  ( $t > 0$ ) jednaka je

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Jasno, ako je  $f$  diferencijabilna funkcija, tada kada  $t \rightarrow t_0$  gornji izraz teži ka trenutnoj brzini tačke  $M$  u trenutku  $t_0$ ,

$$v_0 = v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Dakle, brzina predstavlja izvod puta po vremenu. Slično se može pokazati i da je ubrzanje (akceleracija) izvod brzine po vremenu.



<sup>2</sup> Isaac Newton 1642–1727, engleski fizičar, teorijski mehaničar, astronom i matematičar, jedan od najvećih naučnika u istoriji formulisao je između ostalog (sa Lajbnicom) osnove diferencijalnog računa.

**Slika 1.** Geometrijska interpretacija izvoda

**Problem tangente.** Otprilike u isto vreme (u XVII. veku) *Lajbnic* (*Gottfried Wilhelm Leibniz*)<sup>3</sup> je nezavisno od Njutna razvio osnove diferencijalnog računa rešavajući problem određivanja tangente na datu krivu u nekoj tački iste.

Neka je data kriva svojom jednačinom  $y = f(x)$ , gde je  $f$  diferencijabilna funkcija. **Sečica** (**sekanta**) krive  $y = f(x)$  koja prolazi kroz tačke  $M_0(x_0, f(x_0))$  i  $M(x, f(x))$ , za  $x_0 \neq x$ , je prava čiji je koeficijent pravca,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kada  $x \rightarrow x_0$ , sečica teži **tangenti** krive  $y = f(x)$  u tački  $M_0(x_0, f(x_0))$ , čiji je koeficijent pravca jednak  $\operatorname{tg} \alpha_0$ . Dakle,

$$x \rightarrow x_0 \quad \implies \quad \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

Stoga je jednačina tangente na krivu  $y = f(x)$  u tački  $x_0$ ,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Normala** na krivu  $y = f(x)$  u tački  $x_0$  je prava koja prolazi kroz tačku  $M_0(x_0, f(x_0))$  i normalna je na tangentu u toj tački. Kako za koeficijente pravaca  $k_1$  i  $k_2$ , normalnih pravih  $p_1$  i  $p_2$  važi veza  $k_1 \cdot k_2 = -1$  lako nalazimo jednačinu normale (uz  $f'(x_0) \neq 0$ ),

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

**4.4. Levi i desni izvod.** Kako se izvod definiše preko limesa i kako smo videli ranije šta je levi odnosno desni limes funkcije u nekoj tački  $x$  znamo i šta su levi i desni izvod. Preciznije imamo,

$$(25) \quad \text{levi izvod funkcije } f \text{ u tački } x \text{ je broj: } f'(x_-) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$(26) \quad \text{desni izvod funkcije } f \text{ u tački } x \text{ je broj: } f'(x_+) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ukoliko limesi na desnim stranama jednakosti (25) i (26) postoje.

Jasno, zaključujemo da izvod  $f'(x)$  u tački  $x$  postoji ako i samo ako postoje levi i desni izvod i ako su oni jednaki.

**Primer.** Pronađimo izvod apsolutne vrednosti, tj. funkcije definisane na uobičajen način:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz 1646–1716, nemački filozof i matematičar, zajedno sa Njutnom formulisao osnove diferencijalnog računa.

Funkcija  $|x|$  je neprekidna, a za njen izvod važi :

$$|x|' = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \implies |x|' = \operatorname{sgn}(x)$$

Primetimo da  $|x|'$  ima u tački  $x = 0$  prekid prve vrste, i da funkcija  $|x|$  ima u tački  $x = 0$  levi i desni izvod koji se ne podudaraju.

## 2. Svojstva diferenciranja

**4.5. Algebarska svojstva diferenciranja.** U ovoj tački bavimo se osnovnim algebarskim svojstvima diferenciranja koja znatno olakšavaju računanje izvoda datih funkcija. Kako se izvodi definišu preko limesa za očekivati je da je izvod funkcije kompatibilan sa osnovnim algebarskim operacijama (vidi tačka 4.4 Teorema 2).

**Teorema.** Neka su funkcije  $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilne na skupu  $E \subseteq D$ , tada za svaki  $x \in E$  važi

$$(i1) \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(i2) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$(i3) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{ako je } g(x) \neq 0.$$

Svojstvo (i2) zove se *Lajbnicovo pravilo* za izvod proizvoda funkcija.

Dokaz. Dokažimo (i3), ostala tvrđenja dokazuju se analogno<sup>4</sup>. Sada redom imamo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

**Posledica.** Iz veze diferencijala i izvoda, prethodna teorema može se zapisati i u terminima diferencijala. Tako uz pretpostavke prethodne teoreme imamo,

$$(i1) \quad d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x),$$

$$(i2) \quad d(f \cdot g)(x) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x),$$

$$(i3) \quad d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad \text{ako je } g(x) \neq 0.$$

**Primer.** Koristeći tačku 5.2 i svojstva diferenciranja iz prethodne teoreme možemo izračunati sledeće izvode.

<sup>4</sup>Ali dokazi tvrđenja (i1) i (i2) su jednostavniji.

- (a)  $(x^4)' = (x^2 \cdot x^2)' = (x^2)' \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 4x^3$ .
- (b)  $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,
- (c)  $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**4.6. Izvod kompozicije funkcija.** Sledeća teorema pokazuje da se diferenciranje dobro ponaša i prema kompoziciji funkcija jer važi:

**Teorema.** *Neka je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x \in D(f)$ , a funkcija  $g$  u tački  $y = f(x) \in D(g)$ , tada je kompozicija  $g \circ f$  diferencijabilna u tački  $x$  i važi formula:*

$$(27) \quad [g(f(x))]' = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Formula (27) je od velike važnosti jer ima veliku primenu u praksi budući je kompozicija funkcija jedan od osnovnih načina konstrukcija novih funkcija iz već poznatih.

**Primer.** Primenimo prethodnu teoremu, kao i ostala svojstva diferenciranja da bismo našli izvode funkcija.

- (a)  $[(x^3 + 4x^2 - 3x)^3]' = 3(x^3 + 4x^2 - 3x)^2(x^3 + 4x^2 - 3x)' = 3(x^3 + 4x^2 - 3x)^2(3x^2 + 8x - 3)$ .
- (b)  $(\cos(\sin x))' = -\sin(\sin x)(\sin x)' = -\sin(\sin x) \cos x$ .

**4.7. Izvod inverzne funkcije.** Veoma često se postavlja pitanje pronalaženja izvoda inverzne funkcije, kao i analitičkih osobina iste. Sledeća teorema i njene generalizacije (višedimenzionalne) daju odgovor na to pitanje.

**Teorema.** *Neka su  $f : D \rightarrow E$  i  $f^{-1} : E \rightarrow R$  ( $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ) uzajamno inverzne i neprekidne funkcije u tačkama  $x_0 \in E$  i  $y_0 = f(x_0)$ . Ako je funkcija  $f$  diferencijabilna u  $x_0$  i  $f'(x_0) \neq 0$  tada je i funkcija  $f^{-1}$  diferencijabilna u tački  $y_0$  i važi formula*

$$(28) \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Primedba.** Štaviše iz ove teoreme (i nekih drugih) sledi da svaka funkcija klase  $C^1$  (diferencijabilna i čiji je izvod neprekidan) u okolinama tačaka u kojima se njen izvod ne poništava, ima inverznu funkciju koja je takođe klase  $C^1$  u odgovarajućim tačkama, tj. ako je  $f$  klase  $C^1$  na nekoj okolini  $I_{x_0}$  i ako je  $f'(x_0) \neq 0$ , tada postoji okolina  $I_{y_0}$  tačke  $y_0 = f(x_0)$  takva da je  $C^1$  na  $I_{y_0}$  i  $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$ .

**Primer.** (a) Funkcija  $y = x^2$ , koja ima inverznu funkciju za  $x \geq 0$  prema i prethodnoj teoremi imamo:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Primetimo da na levoj i desnoj strani imamo funkciju od  $y$  pa možemo zameniti  $y$  s  $x$  i tako dobijamo standardni zapis,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0. \text{ Prisetimo da tačka } x = 0 \text{ nije u domenu ove funkcije.}$$



(b) Funkcija  $y = \sin x$  ima inverznu funkciju za  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$  i važi:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

odnosno, nakon zamene  $y$  sa  $x$ ,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

funkcija  $\arcsin x$  je definisana na segmentu  $[-1, 1]$ , a njen izvod nije definisan u rubovima tog intervala.

(c) Funkcija  $y = \operatorname{tg} x$  ima inverznu funkciju za  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  i važi

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

ili nakon zamene  $y$  sa  $x$ ,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**4.8. Izvod implicitno zadate funkcije.** Neka je implicitno zadata funkcija svojom jednačinom  $F(x, y) = 0$ , njen izvod tražimo tako da jednu promenljivu (obično to je  $y$ ) shvatimo kao funkciju one druge promenljive (a to je obično  $x$ , tj.  $y = y(x)$ ) i primenimo pravila koja su data u teoremama iz tačaka **5.5.** i **5.6.**

**Primer.** Odrediti tangentu elipse,

$$(29) \quad F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

u tački  $(x_0, y_0)$  ( $-a < x_0 < a$ ). Pretpostavimo da je  $y = y(x)$  i kako su leva i desna strana jednačine (29) jednake, jednaki su im i izvodi. Dakle,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0 \quad \implies \quad y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y(x_0)} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Sada iz jednačine tangente (vidi **5.3.**) redom nalazimo,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ili nakon zamene} \quad y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

nakon množenja poslednje jednakosti sa  $a^2 y_0$  dobijamo

$$a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = b^2 x_0^2 - b^2 x x_0 \quad \text{kako je} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2,$$

napokon dobijamo

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 b^2 \quad \text{ili nakon deljenja sa} \quad a^2 b^2 \quad \text{dobijamo} \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Specijalno, odredimo tangentu na elipsu

$$F(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0,$$

u tački  $M(2, y_0 > 0)$ . Sada prvo nalazimo  $y_M = 5/3$ , a zatim prema upravo izvedenoj formuli dobijamo jednačinu tangente,

$$1 = \frac{2x}{9} + \frac{5y}{5 \cdot 3} = \frac{2x}{9} + \frac{y}{3} \quad \text{ili} \quad 2x + 3y = 9.$$

**Primer.** Dokažite da jednačine tangenti na hiperbolu odnosno parabolu

$$(h) \quad F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (p) \quad G(x, y) = -2lx + y^2 = 0, \quad l > 0,$$

u tački sa koordinatama  $M(x_0, y_0)$  su:

$$(h) \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0, \quad (p) \quad y_0 y = l(x + x_0).$$

**4.9. Izvod parametarski zadate funkcije.** Ispostavlja se da je najprirodniji<sup>5</sup> način zadavanja funkcija u sledećem vidu,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in D \subseteq \mathbb{R},$$

koji se naziva **parametarski oblik** zadavanja funkcija. Izvod parametarski zadate funkcije računamo na sledeći način,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\psi(t))}{d(\varphi(t))} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Često koristimo kraći zapis  $y' = \dot{y}/\dot{x}$ ,  $\dot{y} = \psi'(t)$ ,  $\dot{x} = \varphi'(t)$ , gde smo sa  $y'$  obeležili izvod po nezavisnoj promenljivoj  $x$ , a  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$  obeležava izvod po parametru  $t$ .

**Primer.** Odredimo tangentu na krivu zadatu sa

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

u tački  $x = 1, y > 0$ . Gornja formula daje

$$y' = \frac{\cos t}{-2 \sin t}.$$

Iz  $x = 1 = 2 \cos t$  nalazimo da je  $\cos t = 1/2$  tako da je  $t = \pi/3$  ili  $t = -\pi/3$ . Uslov  $y > 0$  implicira  $t = \pi/3$  i  $y = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ . Dakle,

$$y'(1) = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{-2 \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

tako da je jednačina tražene tangente,  $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

<sup>5</sup>U smislu generalizacije u višim dimenzijama.

### 3. Izvodi elementarnih funkcija

**4.10. Izvodi elementarnih funkcija.** Jedan važan element u procesu pronalaženja izvoda jeste tabela elementarnih funkcija. Izvode svih elementarnih moguće je naći po definiciji ili korišćenjem već ranije pomenutih svojstava izvoda.

Tabela izvoda elementarnih funkcija

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$(x^r)' = r x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, x > 0$	$(C)' = 0$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
Eksponecijalne funkcije	Logaritamske funkcije
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 1 \neq a > 0, x \in \mathbb{R}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 1 \neq a > 0, x > 0$
$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (1, +\infty)$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

**4.11. Logaritamski izvod.** Logaritamski izvod koristimo za diferenciranje funkcija oblika

$$(30) \quad y = h(x) = f(x)^{g(x)}.$$

U onim tačkama u kojima izvod postoji važi,

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Procedura kojom nalazimo izvod ovom metodom sastoji se od tri karakteristična koraka:

- (i1) logaritmiraju se obe strane jednakosti (30),
- (i2) diferenciramo obe strane jednakosti dobijene u koraku (i1) pri čemu  $y$  tretiramo kao složenu funkciju<sup>6</sup>,
- (i3) sredimo dobijene formule.

**Primer.** Nađimo izvod funkcije  $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

Primenom logaritma na obe strane imamo

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x),$$

a zatim diferenciranje obe strane ove jednakosti daje,

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1,$$

Sređivanjem ove jednakosti dobijamo,

$$y' = y \left( -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{x} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x} \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right).$$

**Primer.** Izračunajte izvod funkcija  $y = x^{x^2}$  i  $y = x^{x^x}$ .

**4.12. Primena diferencijala: približno računanje.** Kao što znamo diferencijal je najbolja linearna aproksimacija vrednosti diferencijabilne funkcije  $f$  u nekoj okolini tačke njenog domena. Zbog toga je jedna od osnovnih primena diferencijala nalaženje približnih vrednosti funkcije  $f$  u nekim tačkama.

Ako je vrednost nezavisne promenljive  $x$  određena (izmerena u nekom eksperimentu) sa pogreškom koja po apsolutnoj vrednosti ne prelazi neki broj  $h$  i ako uz tako izračunat  $x$  želimo odrediti vrednost funkcije  $y = f(x)$ , tada apsolutna pogreška vrednosti funkcije približno iznosi

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)h|, \quad \text{a relativna pogreška je } \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

**Primer.** Izračunajmo približno  $\sqrt[4]{84}$  koristeći činjenicu da je  $\sqrt[4]{81} = 3$ .

<sup>6</sup> kompoziciju.

Primetimo da je

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81 + 3} = 3\sqrt[4]{1 + \frac{1}{27}}.$$

Posmatrajmo funkciju  $f(x) = 3\sqrt[4]{1+x}$ , a zatim izaberimo  $x_0 = 0$  i  $h = 1/27$ . Koristeći diferencijal nalazimo,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{84} = f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + \frac{3}{4}(1+x_0)^{-\frac{3}{4}}h \\ &= 3 + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{27} = 3.02\dot{7}.\end{aligned}$$

Napomenimo da je tačna vrednost broja  $\sqrt[4]{84}$  na četiri decimale 3.0274.

#### 4. Izvodi višeg reda

**4.13. Izvodi i diferencijali višeg reda.** Neka je data funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Njen izvod (ako postoji),  $f' : D' \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcija pa je možemo pokušati diferencirati. Ako je  $f'$  diferencijabilna tada funkciju  $(f')' = f''$  nazivamo drugim izvodom funkcije  $f$ . Dakle,

$$f'' \equiv (f')' : D'' \subseteq D' \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sada indukcijom nastavljamo dalje i definišemo <sup>7</sup>  $n$ -ti izvod funkcije  $f$  kao izvod njenog  $(n-1)$ -og izvoda, tj.  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ . Sada je moguće posmatrati funkcije koje su  $n$ -puta diferencijabilne i čiji je  $n$ -ti izvod neprekidna funkcija na nekom skupu  $D \subseteq \mathbb{R}$ , koje obeležavamo sa  $\mathcal{C}^n(D)$ . Od posebnog su interesa funkcije klase  $\mathcal{C}^\infty(D)$ , tj. one koje imaju izvode svih redova i ti izvodi su neprekidni.

**Primer.** (a) Nađimo izvode višeg reda funkcije  $y = e^{kx}$ .

Sada redom nalazimo,

$$y' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}, \quad y'' = ke^{kx} \cdot k = k^2e^{kx}, \quad y''' = k^2e^{kx} \cdot k = k^3e^{kx},$$

i indukcijom lako nalazimo da je  $n$ -ti izvod jednak  $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ .

(b) Za polinom  $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  lako nalazimo da je

$$y' = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \quad y'' = 6a_3x + 2a_2, \quad y''' = 6a_3, \quad y^{IV} = 0, \quad y^j = 0, \text{ za } j > 4.$$

Iz ovog primera vidimo da i u opštem slučaju polinoma  $p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ,  $n$ -tog stepena vredi

$$p_n^{(n)}(x) = a_n n!, \quad p_n^{(k)}(x) = 0, \quad k > n.$$

**Diferencijal višeg reda** definišemo analogno. Neka je  $y = f(x)$  dva puta diferencijabilna funkcija. Diferencijal drugog reda funkcije  $f$  je diferencijal njenog diferencijala  $dy$ , odnosno  $d^2f \equiv d^2y = d(dy)$ . Analogno dalje, ako je  $y = f(x)$

<sup>7</sup> Ako postoje svi potrebni izvodi funkcije  $f$ .

$n$ -puta diferencijabilna funkcija, tada je diferencijal  $n$ -tog reda funkcije  $f$  jednak  $d^n f \equiv d^n y = d(d^{n-1})y = f^{(n)}dx^n$ . Prema definicionoj formuli za diferencijal važi,

$$d^2 y = d(dy) = (dy)'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Primetimo da važi da je  $d(dx) = 0$ . Prethodna formula i definicija diferencijala opravdavaju sledeće oznake<sup>8</sup>

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots \dots \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

**Važna primedba.** Uvedena oznaka za izvod veoma je korisna jer pomoću nje mogu se lako zapisati pravila za diferenciranje kompozicije funkcija, inverzne funkcije i parametarski zadate funkcije,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Primer: Drugi izvod parametarski zadate funkcije. Formulu za drugi izvod parametarski zadate funkcije dobijamo primenom prethodne formule i formule iz tačke 5.9., tj.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}dt} = \frac{(\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x})dt}{\dot{x}^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

## 5. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

**4.14. Osnovne teoreme diferencijalnog računa I.** Ako je neka funkcija diferencijabilna tada ona ima određene dobre osobine koje su posledica njene diferencijabilnosti. Zbog toga je veoma važno znati koja osnovna svojstva funkcija su posledica diferencijabilnosti što je sadržaj ove i nekoliko narednih tačaka.

**Lema (Ferma<sup>9</sup>).** Neka je data funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i tačka  $x_0 \in D$  takva da su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) postoji okolina  $I_{x_0}$  tačke  $x_0$  takva da je  $I_{x_0} \subseteq D$ ,
- (i2) funkcija  $f$  je diferencijabilna u tački  $x_0$ ,
- (i3) tačka  $x_0$  je tačka u kojoj funkcija  $f$  ima ekstremalnu vrednost (minimum ili maksimum) na  $I_{x_0}$ .

Tada je  $f'(x_0) = 0$ .

**Dokaz.** Budući da je po pretpostavci funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $x_0$  važi,

$$(31) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x_0, h)h = (f'(x_0) + \alpha(x_0, h))h,$$

pri čemu  $\alpha(x_0, h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow 0$  (za  $x_0 + h \in I_{x_0}$ ). Kako je  $x_0$  ekstremalna tačka leva strana jednakosti (31) je nenegativna ili nepozitivna za sve  $x \in I_{x_0}$ . Kada bi  $f'(x_0) \neq 0$  za dovoljno mali  $h$  veličina  $f'(x_0) +$

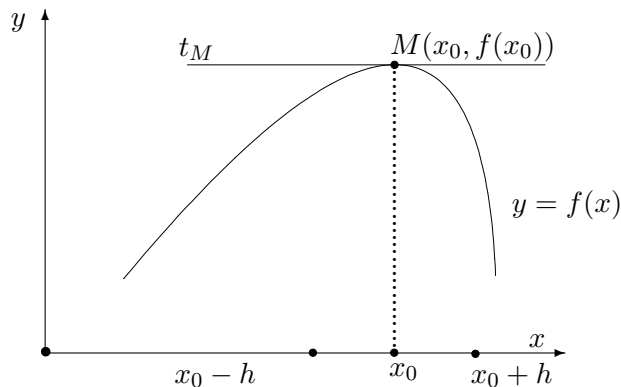
<sup>8</sup> Ove oznake je uveo Lajbnić.

<sup>9</sup> Pierre de Fermat, 1601–1665, čuveni francuski matematičar.

$\alpha(x_0, h)$  imala bi isti znak kao i  $f'(x_0)$ , jer  $\alpha(x_0, h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow 0$  ( $x_0 + h \in I_{x_0}$ ). Primitimo da u jednakosti (31)  $h$  može poprimiti i pozitivne i negativne vrednosti, a kako se znak izraza  $f'(x_0) + \alpha(x_0, h)$  ne menja za dovoljno malo  $h$  (po apsolutnoj vrednosti), zaključujemo da će desna strana jednakosti (31) na okolinama  $(x_0 - \delta, x_0)$  i  $(x_0, x_0 + \delta)$  (za dovoljno malo  $\delta$ ) imati suprotne znakove (tj. funkcija  $f$  će promeniti znak pri prolasku kroz tačku  $x_0$ ) što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je tačka  $x_0$  tačka lokalnog ekstrema.  $\square$

**Primedba 1.** Fermaova lema daje neophodan uslov da bi neka tačka bila ekstremalna tačka diferencijabilne funkcije.

**Primedba 2.** Geometrijski smisao Fermaove leme je očigledan (vidi Sliku 2.): tangenta na grafik krive u tački ekstremuma je paralelna sa  $Ox$  osom, tj. horizontalna je.



Slika 2. Fermaova teorema

**Teorema 1 (Rol<sup>10</sup>).** Neka je data funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidna na segmentu  $[a, b]$ ,
- (i2) diferencijabilna na intervalu  $(a, b)$ ,
- (i3)  $f(a) = f(b)$ .

Tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je  $f'(c) = 0$ .

**Dokaz.** Budući da je funkcija  $f$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$  postoje tačke  $x_m, x_M \in [a, b]$  u kojima ona redom poprima svoju najmanju i najveću vrednost.

(i) Ako je  $f(x_m) = f(x_M)$  onda je funkcija  $f$  konstanta na  $[a, b]$  pa je  $f'(x) \equiv 0$  na  $(a, b)$  i dokaz je u tom slučaju gotov.

(ii) Ako  $f(x_m) < f(x_M)$  i kako je,  $f(a) = f(b)$ , tada barem jedna od tačaka  $x_m$  i  $x_M$  pripada intervalu  $(a, b)$  i ako nju obeležimo sa  $c$  prema Fermaovoj lemi za nju će važiti da je  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**4.15. Osnovne teoreme diferencijalnog računa II.** U ovoj tački bavimo sa teoremama o srednjoj vrednosti, a koje se ponekad zovu i teoremama o konačnim priraštajima. Prva od njih Lagranžova teorema povezuje priraštaj funkcije na segmentu sa izvodom funkcije na tom segmentu.

**Teorema 1 (Lagranž<sup>11</sup>).** Neka je data funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidna na segmentu  $[a, b]$ ,
- (i2) diferencijabilna na intervalu  $(a, b)$ .

Tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je

$$(32) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

<sup>10</sup> Michel Rolle, 1652–1719, francuski matematičar.

<sup>11</sup> Joseph Louis Lagrange, 1736–1813, čuveni francusko-italijanski matematičar, teorijski mehaničar, astronom,..

Dokaz. Da bismo dokazali ovu teoremu posmatramo funkciju

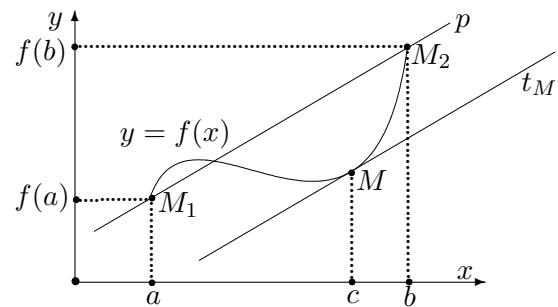
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

koja je očigledno neprekidna na segmentu  $[a, b]$  (jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem neprekidnih funkcija na segmentu  $[a, b]$ ), diferencijabilna na intervalu  $(a, b)$  (jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem diferencijabilnih funkcija na intervalu  $(a, b)$ ) i za koju važi da je  $F(a) = F(b) = f(a)$ . Drugim rečima funkcija  $F$  ispunjava sve uslove Rolove teorema, tako da za nju važe i zaključci Rolove teoreme, tj. postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

i teorema je dokazana. □

**Primedba 1.** Geometrijski smisao Lagranžove teoreme: postoji neka tačka  $M(c, f(c))$  pri čemu je  $c \in (a, b)$ , takva da je tangenta na grafik funkcije  $f(x)$  u tački  $M$  paralelna sa pravom određenom tačkama  $M_1(a, f(a))$  i  $M_2(b, f(b))$ , tj. krajnjim tačkama grafika funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$ .



Slika 3. Lagranžova teorema

**Primedba 2.** Mehanički smisao Lagranžove teoreme. Ako promenljivu  $x$  shvatimo kao vreme, a  $f(b) - f(a)$  kao put koji je neka materijalna čestica prešla za vreme  $b - a$  krećući se po pravoj, tada Lagranžova teorema tvrdi da postoji trenutak vremena  $c \in (a, b)$  u kojem materijalna čestica ima brzinu  $f'(c)$  takvu da ako bi se kretala njom u svakom trenutku vremena iz  $[a, b]$  (tj. kretala bi se konstantnom brzinom) ona bi prešla put  $f(b) - f(a)$ . Dakle, brzina  $f'(c)$  predstavlja srednju (prosečnu) brzinu kretanja materijalne čestice u vremenskom segmentu  $[a, b]$ .

**Primedba 3.** Formuli (32) iz Lagranžove teoreme moguće je dati drugu formu. Npr. ako uvedemo oznaku  $\vartheta \equiv \frac{c - a}{b - a}$ , vidimo da važi  $c = a + \vartheta(b - a)$ ,  $0 < \vartheta < 1$ , tako da formula (32) prima sledeći oblik,

$$(33) \quad f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ako uvedemo oznake  $a = x$  i  $b = x + h$  možemo (32) prepisati kao,

$$(34) \quad \Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = f'(x + \vartheta h) h, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

**Posledica 1.** Ako u svakoj tački nekog intervala  $(a, b)$  važi da je  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) tada je funkcija rastuća (opadajuća) na intervalu  $(a, b)$ .

Dokaz. Neka su  $x_1, x_2$  tačke intervala  $(a, b)$  i neka je npr.  $x_1 < x_2$ . Tada je  $x_2 - x_1 > 0$  a po formuli (32) važi

$$(35) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b),$$



odakle sledi da za  $f'(\xi) > 0$  ( $f'(\xi) < 0$ ) imamo  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  ( $f(x_2) - f(x_1) < 0$ ) ili drugim rečima da je  $f$  rastuća (opadajuća) funkcija<sup>12</sup>.  $\square$

**Posledica 2.** Neka je  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Funkcija  $f$  je konstanta akko je  $f'(x) = 0$  za sve tačke segmenta  $[a, b]$  (ili  $(a, b)$ ).

**Dokaz.** Ako je  $f$  konstanta onda jasno sledi da je  $f'(x) = 0$  za sve tačke segmenta  $[a, b]$ . Obratno, ako je  $f'(x) \equiv 0$  na  $[a, b]$  tada prema Lagranžovoj teoremi, za  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , ( $x_1 < x_2$ ) imamo da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

jer je  $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$  pa je  $f'(\xi) = 0$ . Odakle sledi da je  $f(x_2) = f(x_1)$  i dokaz je gotov.  $\square$

**Teorema 2 (Koši<sup>13</sup>).** Neka su data funkcije  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  za koje su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidne na segmentu  $[a, b]$ ,
- (i2) diferencijabilne na intervalu  $(a, b)$ .

Tada postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je

$$(36) \quad g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Specijalno, ako je  $f'(x) \neq 0$  za sve  $x \in (a, b)$ , tada je i  $f(a) \neq f(b)$  i važi,

$$(37) \quad \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}.$$

**Dokaz.** Budući da funkcija,

$$F(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)),$$

zadovoljava sve pretpostavke Rolove teoreme na segmentu  $[a, b]$ , (neprekidnost na  $[a, b]$ , diferencijabilnost na  $(a, b)$  i  $F(a) = F(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a)$ ) sledi da postoji tačka  $c \in (a, b)$  takva da je  $F'(c) = 0$ , tj. imamo da je

$$0 = F'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a)) \iff g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Primetimo da iz Lagranžove teoreme sledi da ako je  $f'(x) \neq 0$  na  $(a, b)$  tada je  $f(b) \neq f(a)$  i možemo podeliti jednakost (36) sa  $f'(c)(f(b) - f(a))$  i dobiti jednakost (37).  $\square$

**Primedba.** Prisetimo da ako u Košijevoj teoremi izaberemo  $g(x) = x$ , tada je očigledno  $g'(x) = 1$  i  $g(b) - g(a) = b - a$  i dobijamo kao posledicu Lagranžovu teoremu.

## 6. Tejlorova formula

**4.16. Tejlorova<sup>14</sup> formula.** Prisetimo da Lagranžovu formulu možemo prepisati na sledeći način,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \quad \text{gde je } \xi \text{ između } x_0 \text{ i } x.$$

Ova formula nam s jedne strane pokazuje na koji način možemo vrednosti diferencijabilne funkcije  $f$  aproksimirati polinomom 1.-og stepena, a sa druge strane dovodi u vezu vrednosti funkcije  $f$  u okolini tačke  $x_0$  i njene vrednosti  $f(x_0)$ . Postavlja se

<sup>12</sup> Pokazali smo da  $x_1 < x_2 \implies f(x_2) > f(x_1)$ , ako je  $f'(\xi) > 0$  i  $x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)$ , ako je  $f'(\xi) < 0$ .

<sup>13</sup> Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, čuveni francuski matematičar.

<sup>14</sup> Brook Taylor, 1685–1731, engleski matematičar.

prirodno pitanje generalizacije ove formule koje je dovelo do pojma Tejlorove formule neke funkcije. Da bismo objasnili ovu generalizaciju prvo uzmemo polinom,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

koji ima izvode proizvoljnog reda i pokušajmo ga napisati u obliku

$$(38) \quad P_n(x) = b_n (x - x_0)^n + b_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + \dots + b_1 (x - x_0) + b_0, \quad b_n \neq 0.$$

Primetimo da ako uvrstimo u (38)  $x = x_0$  dobićemo da je  $b_0 = P_n(x_0)$ . Ako diferenciramo polinom  $P_n$  dat formulom (38), dobićemo

$$(39) \quad P'_n(x) = n b_n (x - x_0)^{n-1} + (n-1) b_{n-1} (x - x_0)^{n-2} + \dots + 2 b_2 (x - x_0) + b_1,$$

i ako opet uvrstimo u formulu (39)  $x = x_0$  dobijamo da je  $b_1 = P'_n(x_0)$ . Nastavljajući analogno dalje indukcijom nalazimo da je

$$(40) \quad b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{tako da je:}$$

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{P'_n(x_0)}{1!} (x - x_0) + P_n(x_0).$$

Sada bismo istu ideju hteli da primenimo sa proizvoljnom  $(n+1)$ -puta diferencijabilnom funkcijom u nekoj okolini  $I_{x_0} \subseteq D$  tačke  $x_0 \in D$ . Preciznije tada ćemo imati,

$$(41) \quad f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0),$$

gde je

$$(42) \quad P_n(x; x_0) = P_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + f(x_0),$$

Taylorov polinom  $n$ -tog stepena funkcije  $f$  u okolini tačke  $x_0$ , a  $R_n(x; x_0) = R_n(x)$ , je  $n$ -ti ostatak. Formula (41) zove se Tejlorova formula funkcije  $f$ . Ako izaberemo  $x_0 = 0$  dobijamo Makloranovu formula funkcije  $f$ , tj.

$$(43) \quad f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} (x)^{n-1} + \dots + \frac{f'(0)}{1!} (x) + f(0) + R_n(x).$$

Ova ideja imaće smisla ako pod nekim uslovima ostatak  $R_n(x)$  teži ka 0 kada  $x \rightarrow x_0$ . Zato je potrebno opisati  $n$ -ti ostatak funkcije  $f$  i ispitati kada će se to desiti. Tako imamo sledeću teoremu.

**Teorema 1.** *Neka je funkcija  $f$  klase  $\mathcal{C}^n$  na segmentu čiji su krajevi tačke  $x$  i  $x_0$  i neka je  $(n+1)$ -puta diferencijabilna u svakoj tački intervala sa krajevima  $x$  i  $x_0$ . Tada za proizvoljnu funkciju  $\phi$ , koja je neprekidna na tom segmentu i čiji se izvod ne anulira niti u jednoj njegovoj unutrašnjoj tački, postoji tačka  $\xi$  između  $x$  i  $x_0$  takva da je*

$$(44) \quad R_n(x; x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n.$$

**Posledica 1 (Oblici ostataka).** Uz pretpostavke i oznake prethodne teoreme važi.

(Ko) *Košijev oblik ostatka:*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) (x - \xi)^n (x - x_0).$$

(La) *Lagranžov oblik ostatka:*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^{n+1}.$$

Dokaz. Ako u formuli (44) stavimo  $\phi(t) = x - t$  dobijamo Košijev oblik ostatka, a izbor  $\phi(t) = (x - t)^{n+1}$  daje Lagranžov oblik.  $\square$

## 7. Lopitalovo pravilo

**4.17. Lopitalovo (L'Hospital) pravilo.** Lopitalovo pravilo koristi se za računanje limesa neodređenih oblika,

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Neodređeni oblici  $0/0$  i  $\infty/\infty$  rešavaju se pomoću Lopitalovog pravila, a ostali neodređeni oblici svode na jedan od ova dva oblika.

**Teorema 1 (Lopitalovo pravilo).** *Neka za date funkcije  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  koje su diferencijabilne na  $(a, b)$ <sup>15</sup> i  $g'(x) \neq 0$  na  $(a, b)$  za koje važi*

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad (-\infty \leq \alpha \leq +\infty).$$

*Tada u svakom od slučajeva:*

$$(i1) \quad \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad (i2) \quad \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = \infty.$$

*važi da je  $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ . Analogna tvrđenja važe uz analogne pretpostavke i u slučaj kada  $x \rightarrow b_-$ .*

Dokaz. Kako je  $g'(x) \neq 0$ , prema Lagranžovoj teoremi,  $g(x)$  je strogo monotona na  $(a, b)$ , sledi da je  $g(x) \neq 0$  na intervalu  $(a, b)$ . Tako da za  $x, y \in (a, b)$  prema Košijevoj teoremi postoji tačka  $c \in (x, y)$  takva da je

$$(45) \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(y)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

Pređemo li u prethodnoj relaciji na limes kada  $x \rightarrow a_+$  tada pogodnim izborom  $y$  koji će takođe težiti  $a_+$  vidimo da u oba slučaja možemo postići da je

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(y)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a_+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0,$$

i pri tome kako  $x$  i  $y$  teže ka  $a_+$ , i  $c$  će težiti  $a_+$ , tako da obe strane poslednje jednakosti u (45) teže ka  $\alpha$ . I dokaz je gotov.  $\square$

**Primedba.** Lopitalovo pravilo može se primeniti:

(i1) kada  $x \rightarrow \pm\infty$  za neodređeni oblik  $\infty/\infty$  te za limese i izvode sleva i sdesna.

<sup>15</sup>  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

- (i2) više puta uzastopno ako se nakon njegove primene ponovo dobije jedan od neodređenih oblika  $0/0$  ili  $\infty/\infty$  i ako dobijene funkcije ispunjavaju uslove prethodne teoreme.
- (i3) i na ostale neodređene oblike, koji se pogodnim transformacijama mogu svesti na jedan od oblika  $0/0$  ili  $\infty/\infty$ .

**Primer.** (a) Limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  kojeg smo izračunali pre korišćenjem nekih nejednakosti i teoreme o dva policajca možemo jednostavnije izračunati primenom Lopitalovog pravila,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Da li je moguće izračunati limes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$  primenom Lopitalovog pravila?

(b) Sledeći primer zahteva primenu Lopitalovog pravila dva puta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Uopštenjem ovog primera matematičkom indukcijom lako možemo zaključiti da eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 raste brže od bilo koje stepene funkcije.

(c) U ovom primeru pokazujemo neke od transformacija koje je potrebno izvršiti na polaznim funkcijama dok ne dođemo do oblika na kojem možemo primeniti prethodnu teoremu. Računamo,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x}.$$

Primetimo, da smo u poslednjoj jednakosti koristili neprekidnost funkcije  $e^x$ . Sada nalazimo limes u eksponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} x = 0.$$

Dakle, traženi limes je  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = e^0 = 1$ .

**4.18. Monotonost i izvod.** Na osnovu posledice Lagranžove teoreme (vidi **5.15 Posledica 1.**), predznak izvoda na nekom intervalu određuje monotonost funkcije na tom istom intervalu. Podsetimo se da za diferencijabilnu funkciju  $f$  na intervalu  $(a, b)$  važi:

- (i1) funkcija  $f$  je rastuća na intervalu  $(a, b)$  akko  $f'(x) \geq 0$  za svaki  $x \in (a, b)$ ,
- (i2) funkcija  $f$  je opadajuća na intervalu  $(a, b)$  akko  $f'(x) \leq 0$  za svaki  $x \in (a, b)$
- (i3) ako je  $f'(x) > 0$  za svaki  $x \in (a, b)$  tada je funkcija  $f$  strogo rastuća na intervalu  $(a, b)$ ,
- (i4) ako je  $f'(x) < 0$  za svaki  $x \in (a, b)$  tada je funkcija  $f$  strogo opadajuća na intervalu  $(a, b)$ .

**Primedba.** Primitimo da prve dve tvrdnje ((i1) i (i2)) važe u oba smera (akko = ako i samo ako), dok za poslednje dve tvrdnje ((i3) i (i4)) važi samo nužnost (ali ne važi dovoljnost). Sledeći primer funkcije  $y = x^3$  na čitavom skupu  $\mathbb{R}$  pokazuje da kod poslednje dve tvrdnje ne važi dovoljnost, jer je data funkcija strogo rastuća na  $\mathbb{R}$ , ali je  $y'(0) = 0$ .

**Primer.** Odredimo intervale monotonosti funkcije  $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$ . Kako je  $f'(x) = 6x^2 - 6$ , funkcija  $f$  raste za  $6x^2 - 6 \geq 0$ , tj.  $x^2 - 1 \geq 0$ . Nakon rešavanja ove jednostavne nejednačine zaključujemo da je  $f$  rastuća na intervalima  $(-\infty, -1)$  i  $(1, +\infty)$ . Budući da je u prethodnoj nejednakosti jednakost važi samo za  $x = -1$  i  $x = 1$ , zaključujemo da je na tim intervalima  $f$  strogo rastuća. Analogno, funkcija  $f$  opada za  $x^2 - 1 \leq 0$ , tj.  $f$  je strogo opadajuća na intervalu  $(-1, 1)$ .

## 8. Ekstremne vrednosti funkcije

**4.19. Ekstremne vrednosti i izvod.** Podsetimo se definicije ekstremne vrednosti funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Kažemo da funkcija  $f$  ima lokalni minimum  $f(c)$  u tački  $c \in D$  ako postoji okolina  $I_c^\varepsilon$  tačke  $c$  takva da je  $f$  neprekidna u toj okolini i da je  $f(x) > f(c)$  za svaki  $x \in I_c^\varepsilon$ . Funkcija  $f$  ima globalni minimum  $f(c)$  u tački  $c \in D$  ako je  $f(x) \geq f(c)$  za svaki  $x \in D$ .

Analogno, funkcija  $f$  ima lokalni maksimum  $f(c)$  u tački  $c \in D$  ako postoji okolina  $I_c^\varepsilon$  tačke  $c$  takva da je  $f$  neprekidna u toj okolini i da je  $f(x) < f(c)$  za svaki  $x \in I_c^\varepsilon$ . Funkcija  $f$  ima globalni maksimum  $f(c)$  u tački  $c \in D$  ako je  $f(x) \leq f(c)$  za svaki  $x \in D$ .

Primitimo da se u definiciji lokalnih ekstrema zahteva da je vrednost funkcije u tački ekstrema strogo najmanja ili najveća na nekoj okolini tačke  $c$ . S druge strane u definiciji globalnih ekstrema dozvoljeno je da se globalni ekstrem nalazi u više tačaka (štaviše sve tačke nekog intervala mogu biti ekstremne, npr. u slučaju funkcije  $\text{sgn}(x)$ ).

Za određivanja ekstremnih vrednosti neke funkcije  $f$  važna su nam njena analitička svojstva, tj. kojoj od klasa  $\mathcal{C}^k$  funkcija pripada na svom domenu (ili delu domena). Neka je izvod funkcije  $f$  neprekidan (tj. funkcija  $f$  je klase  $\mathcal{C}^1$ ) u tački  $c$ . Kažemo da je tačka  $c$  stacionarna tačka funkcije  $f$  ako je  $f'(c) = 0$ . Tačka  $c$  je kritična tačka funkcije  $f$  ako je  $c$  stacionarna ili ako  $f$  nije diferencijabilna u tački  $c$ .

Primitimo da je nužan uslov<sup>16</sup> dat u sledećoj modifikovanoj verziji Fermaove leme: *Ako je funkcija  $f$  neprekidna u tački  $c$  i ako u njoj ima lokalni ekstrem, tada je  $c$  kritična tačka funkcije  $f$  (ako je  $f$  diferencijabilna u  $c$  tada je  $f'(c) = 0$ ).*

**Primer.** (a) Funkcija  $f(x) = x^4$  ima lokalni (i globalni) minimum u tački  $x = 0$  i primitimo da je  $f'(x) = 2x$  pa je i  $f'(0) = 0$ .

(b) Funkcija  $f(x) = |x|$  ima lokalni (i globalni) minimum u tački  $x = 0$ . Primitimo da ovo nije u suprotnosti sa (modifikovanom) Fermaovom lemom jer funkcije nije diferencijabilna u tački 0.

<sup>16</sup> Ispunjava ga svaka tačka u kojoj funkcija ima lokalnu ekstremnu vrednost.

(c) Za funkciju  $f(x) = x^3$  važi da je  $f'(x) = 3x^2$  tako da je  $f'(0) = 0$ . Ali,  $f(0)$  nije lokalni ekstrem, odakle sledi da ne vredi obrat Fermaove leme. Jednostavnije rečeno svaka kritična (stacionarna<sup>17</sup>) tačka ne mora bit tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

Sada ćemo se baviti dovoljnim uslovima za postojanje lokalne ekstremne vrednosti, tj. uslovima koji moraju važiti u okolini (ili u samoj tački) da bi neka kritična tačka bila i tačka lokalnog ekstrema.

**Teorema 1 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 1).** *Ako prvi izvod  $f'$  funkcije  $f$  menja znak u kritičnoj tački  $c$ , tada funkcija  $f$  ima lokalni ekstrem u  $c$ . Štaviše vredi:*

- (i1) ako  $f' < 0$  za sve  $x \in (c - \varepsilon, c)$  i  $f' > 0$  za sve  $x \in (c, c + \varepsilon)$  tada u tački  $c$  funkcija  $f$  ima lokalni minimum,
- (i2) ako  $f' > 0$  za sve  $x \in (c - \varepsilon, c)$  i  $f' < 0$  za sve  $x \in (c, c + \varepsilon)$  tada u tački  $c$  funkcija  $f$  ima lokalni maksimum.

Dokaz. (i1) Ako je  $f' < 0$  za sve  $x \in (c - \varepsilon, c)$  i  $f' > 0$  za sve  $x \in (c, c + \varepsilon)$  tada funkcija  $f$  strogo pada na intervalu  $(c - \varepsilon, c)$  i strogo raste na intervalu  $(c, c + \varepsilon)$ . Prema tome, funkcija  $f$  ima u tački  $c$  lokalni minimum. Analogno se tretira i drugi slučaj.  $\square$

Kriterijum iz prethodne Teoreme 1. zahteva poznavanje ponašanja izvoda funkcije na nekoj njenoj okolini. Ako funkcija  $f$  ima bolja analitička svojstva u kritičnoj tački, tj. ako u njoj postoje izvodi viših redova, tada je moguće dobiti drugi kriterijum uz korišćenje Tejlorove formule, u kojem je potrebno znati izvode viših redova u stacionarnoj tački. Preciznije važi sledeća teorema.

**Teorema 2 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 2).** *Neka je funkcija  $f$   $n$  puta diferencijabilna u nekoj okolini  $I_c$  tačke  $c$ . Ako je  $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ , i  $f^{(n)}(c) \neq 0$  tada*

- (n) ako je  $n$  neparan, funkcija  $f$  nema lokalni ekstremum u tački  $c$ ,
- (p) ako je  $n$  paran, funkcija  $f$  ima u tački  $c$  ima lokalni ekstremum i to lokalni minimum ako je  $f^{(n)}(c) > 0$ , i lokalni maksimum ako je  $f^{(n)}(c) < 0$ .

Dokaz. Prema Tejlorovoj formuli imamo,

$$(46) \quad f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \alpha(x)(x - c)^n = \left( \frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - c)^n,$$

gde  $\alpha(x) \rightarrow 0$  kada  $x \rightarrow c$ . Budući da  $f^{(n)}(c) \neq 0$  i  $\alpha(x) \rightarrow 0$  kada  $x \rightarrow c$  suma  $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x)$  ima znak kao i  $f^{(n)}(c)$  (jer je član  $\alpha(x)$  zanemariv u odnosu na  $f^{(n)}(c)$  u okolini  $I_c^\delta$  za dovoljno malo  $\delta$ ) kada je  $x$  dovoljno blizu  $c$ .

(n) Ako je  $n$  neparan tada izraz  $(x - c)^n$  menja znak pri prolasku  $x$  kroz  $c$ <sup>18</sup> i na taj način menja se znak izraza desne strane jednakosti (46), a time, naravno, i njegove leve strani, odakle onda odmah sledi da u tački  $c$  funkcija  $f$  nema ekstremum.

<sup>17</sup> Ako je funkcija  $f$  klase barem  $\mathcal{C}^1$  na nekoj okolini tačke  $c$ .

<sup>18</sup> Preciznije,  $(x - c)^n$  je negativno na  $(c - \delta, c)$  i pozitivno na  $(c, c + \delta)$  ili obratno.

(p) Ako je  $n$  paran tada sličnom analizom kao u slučaju (n) zaključujemo da izraz  $(x - c)^n$  ne menja znak pri prolasku  $x$  kroz  $c$ , tako da leva strana izraza (46) neće promeniti znak, odakle sledi da u tački  $c$  funkcija  $f$  ima ekstremum, i to lokalni minimum ako je  $f^{(n)}(c) > 0$ , i lokalni maksimum ako je  $f^{(n)}(c) < 0$ .  $\square$

**Primer.** Za funkciju  $f(x) = x^2$ , koja ispunjava uslove Teoreme 2 u tački  $x = 0$ , jer je  $f'(0) = 0$ , a  $f''(0) = 2 > 0$  pa u tački  $x = 0$  nalazi lokalni minimum. Teoremu 2 ne možemo primeniti na funkciju  $f(x) = |x|$  u tački  $x = 0$ , jer nije diferencijabilna u toj tački. Teoremu možemo primeniti na funkciju  $f(x) = x^3$  u tački  $x = 0$ , jer je  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ , i  $f'''(0) = 6$ , i zaključiti da  $f$  nema ekstremuma u tački  $x = 0$ .

## 9. Konveksnost i konkavnost funkcija

**4.20. Zakrivljenost i izvod.** U ovoj tački ispitujemo i opisujemo zakrivljenost (konkavnost i konveksnost) funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  u zavisnosti od njenih izvoda.

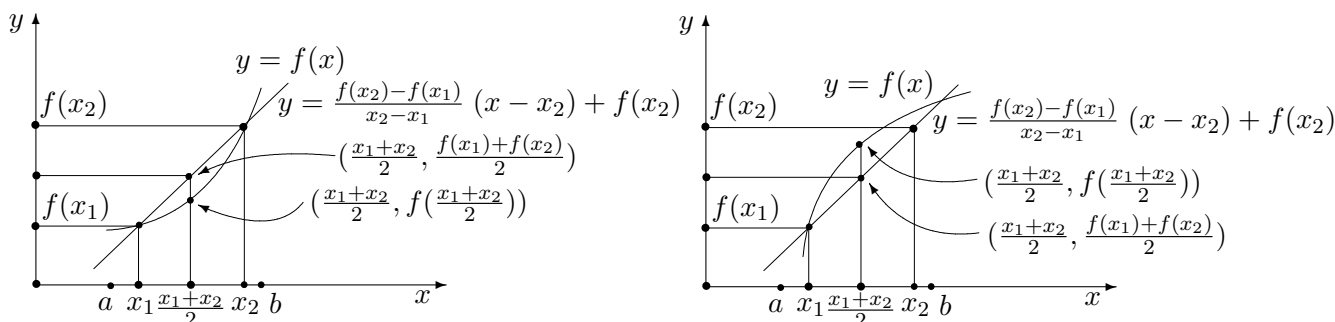
Kažemo da je funkcija  $f$  je konveksna na intervalu  $(a, b) \subseteq D$  ako za proizvoljne tačke  $x_1, x_2 \in (a, b)$  takve da je  $x_1 < x_2$  važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Slično, funkcija  $f$  je konkavna na intervalu  $(a, b) \subseteq D$  ako za proizvoljne tačke  $x_1, x_2 \in (a, b)$  takve da je  $x_1 < x_2$  važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

U slučaju strogih nejednakosti u prethodnim nejednakostim funkcija  $f$  kažemo da je funkcija strogo konveksna odnosno strogo konkavna.



**Slika 4.** Konveksnost i konkavnost funkcije

Geometrijski smisao konveksnosti i konkavnosti vidi se na gornjoj slici (Slika 4), funkcija  $f$  je konveksna ako je grafik duži određene tačkama  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$  iznad grafika funkcije  $y = f(x)$ , a funkcija  $f$  je konkavna ako je grafik duži određene tačkama  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$  ispod grafika funkcije  $y = f(x)$ .

Konveksnost i konkavnost funkcije mogu se odrediti na osnovu znaka drugog izvoda funkcije  $f$ . Preciznije, važi sledeća teorema.

**Teorema 1.** Neka je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  dva puta diferencijabilna na intervalu  $(a, b) \subseteq D$ . Ako je  $f''(x) > 0$  za svaki  $x \in (a, b)$ , tada je funkcija  $f$  strogo konveksna na intervalu  $(a, b)$ . Ako je  $f''(x) < 0$  za svaki  $x \in (a, b)$ , tada je funkcija  $f$  strogo konkavna na intervalu  $(a, b)$ .

*Dokaz.* Prema Tejlorovoj teoremi primenjenoj na tačku  $c = (x_1 + x_2)/2$ , i to prvo za  $x = x_1$ , a zatim za  $x = x_2$ , nalazimo

$$(47) \quad f(x_1) = f(c) + f'(c)(x_1 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2} (x_1 - c)^2$$

$$(48) \quad f(x_2) = f(c) + f'(c)(x_2 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2} (x_2 - c)^2.$$

Kako je

$$(49) \quad x_1 - c = x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{2} = -(x_2 - c),$$

sabiranjem jednakosti (47) i (48) uz korišćenje (49) konačno dobijamo,

$$(50) \quad \begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= 2f(c) + \frac{(x_1 - c)^2}{2} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) && \iff \\ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} &= f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{(x_1 - c)^2}{4} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)). \end{aligned}$$

Kako tačke  $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$  dobijamo da:

- (i1) ako je  $f''(x) > 0$  na  $(a, b)$   $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$  tj.  $f$  je konveksna na  $(a, b)$ .  
 (i2) ako je  $f''(x) < 0$  na  $(a, b)$   $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$  tj.  $f$  je konkavna na  $(a, b)$ .

Time je dokaz završen. □

Ova teorema daje samo potreban uslov, ali ne i dovoljan uslov zakrivljenosti. Na primer, funkcija  $f(x) = x^4$  je konveksna na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ , ali je  $f''(0) = 0$ . Od posebnog interesa su tačke u kojima se menja zakrivljenost, tj. neprekidna funkcija  $f$  ima **prevojnu tačku**  $c$  ako postoji okolina  $I_c^\varepsilon$  tačke  $c$ , takva da je  $f$  strogo konveksna na intervalu  $(c - \varepsilon, c)$  i strogo konkavna na intervalu  $(c, c + \varepsilon)$  ili obratno. Neophodan uslov za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

**Teorema 2.** Ako funkcija  $f$  ima prevojnu tačku  $c$  i ako postoji  $f''(c)$ , tada je  $f''(c) = 0$ .

*Dokaz.* Kako  $f''(c)$  postoji, iz definicije izvoda sledi da postoji i prvi izvod  $f'$  u nekoj okolini tačke  $c$ , a zatim i da je  $f'$  neprekidna u tački  $c$ . Neka funkcija  $f$  ima prevojnu tačku  $c$  i to npr. ako je strogo konveksna levo od tačke  $c$  i strogo konkavna desno od tačke  $c$ , tada je  $f'$  strogo rastuća levo od tačke  $c$  i strogo opadajuća desno od tačke  $c$ , tj.  $f'$  ima lokalni maksimum u tački  $c$ , pa prema Fermaovoj teoremi sledi da je  $f''(c) = 0$ . Analogno se tretira i drugi slučaj. □

Prethodna teorema daje samo nužan, ali ne i dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke. Npr. za funkcije  $f(x) = x^3$  i  $f(x) = x^4$  važi  $f''(0) = 0$ , a samo prva funkcija ima prevojnu tačku  $x = 0$ , a druga nema. U sledećim teoremama bavimo se dovoljnim uslovima za postojanje prevojne tačke.



**Teorema 3.** Neka je funkcija dva puta diferencijabilna na nekoj okolini  $I_c^\varepsilon$  tačke  $c$ , osim možda u tački  $c$ . Ako  $f''$  menja znak pri prolasku kroz tačku  $c$ , tada je tačka  $c$  prevojna tačka funkcije  $f$ .

Dokaz. Neka  $f''$  menja znak u tački  $c$ , tada je prema Teorem 1 funkcija  $f$  konveksna levo od tačke  $c$ , a konkavna desno od tačke  $c$ , ili obratno, drugim rečima  $c$  je prevojna tačka funkcije  $f$ .  $\square$

Primer. Za funkciju  $f(x) = \tan x$  važi da je  $f''(x) = (-2) \cos^{-3} x (-\sin x)$ , odakle je  $f''(0) = 0$ . Očigledno je  $f''(x) < 0$  za  $-\pi/2 < x < 0$  i  $f''(x) > 0$  za  $0 < x < \pi/2$ . Dakle, funkcija  $\tan x$  je konkavna za  $-\pi/2 < x < 0$  i konveksna za  $0 < x < \pi/2$ , tako da je tačka  $c = 0$  prevojna tačka funkcije  $f$ .

Slično, kao i kod ispitivanja lokalnih ekstremuma, dovoljan uslov za prevojnu tačku može se dobiti korišćenjem izvoda višeg reda funkcije. Preciznije, važi sledeća teorema.

**Teorema 4.** Neka je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $\mathcal{C}^n$  na nekoj okolini,  $I_c$ , tačke  $c$ , pri čemu je  $n \geq 3$  i neka je  $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$  i  $f^{(n)}(c) \neq 0$ . Ako je  $n$  neparan, tada funkcija  $f$  ima prevojnu tačku  $c$ .

Dokaz. Analogan dokazu Teoreme 1.  $\square$

Primetimo, prema 5.19 Teorema 2., ako je  $n$  paran i ako je uz to još i  $f'(c) = 0$ , tada funkcija  $f$  ima lokalni ekstremum u tački  $c$  i to minimum ako  $f^{(n)}(c) > 0$  i maksimum ako je  $f^{(n)}(c) < 0$ .

Primer. (a) Za funkciju  $f(x) = x^4$  važi  $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$  i  $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$ . Kako je  $f^{(4)}(0) > 0$ , funkcija ima po 5.19 Teorema 2. lokalni minimum u tački  $x = 0$ .

(b) Za funkciju  $f(x) = x^5$  važi  $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ , i  $f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$ . Kako je  $n = 5$  neparan, prema prethodnoj teoremi sledi da funkcija ima prevojnu tačku u  $x = 0$ . U ovom slučaju radi se o *horizontalnoj prevojnoj tački*, jer je  $f'(0) = 0$ , pa je tangenta u prevojnoj tački paralelna sa  $x$ -osom.

(c) Za funkciju  $f(x) = \tan x$  važi  $f''(0) = 0$ , i  $f'''(0) = 2 \neq 0$ , pa prema prethodnoj teoremi  $x = 0$  je prevojna tačka. U ovom slučaju radi se o *kosoj prevojnoj tački*, jer je  $1 = f'(0) \neq 0$ , i tangenta u prevojnoj tački nije paralelna sa  $x$ -osom (gradi ugao  $\pi/4$  sa  $x$ -osom).

## 10. Ispitivanje toka funkcija

**4.21. Ispitivanje funkcija i skiciranje njihovog grafika.** Ispitivanje funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ <sup>19</sup> je složena procedura u kojoj se primenjuje sve što smo do sada naučili o funkcijama, izvodima i sl. Ispitivanje funkcije  $y = f(x)$  sastoji se od sledećih koraka:

1. **Određivanje domena funkcije.** Kako se obično funkcije zadaju pomoću elementarnih funkcija (kao njihove kompozicije, sume, razlike, proizvodi, količnici i sl.)

<sup>19</sup>Pretpostavljamo da je funkcija  $f$  barem neprekidna, a u praksi obično funkcija  $f$  ima bolja analitička svojstva, tj. ima izvode višeg reda.

potrebno je DOBRO poznavati elementarne funkcije, kao i rešavati jednačine i nejednačine u koje su sastavljene od elementarnih funkcija.

2. **Parnost i neparnost.** Potrebno je ispitati da li je funkcija parna ( $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$ ) ili neparna ( $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in D$ ) na svom domenu, koji mora biti centralno simetričan s obzirom na 0 (ako domen  $D$  nije centralno simetričan tada funkcija svakako nije ni parna ni neparna). Ako je funkcija parna ili neparna na domenu  $D$  onda se ispitivanje funkcije svodi na njeno ispitivanje na skupu  $\mathbb{R}_0^+ \cap D$ . Većina funkcija nije ni parna ni neparna.
3. **Periodičnost.** Potrebno je proveriti da li je funkcija  $f$ , periodična, tj. da li postoji osnovni period<sup>20</sup>  $T > 0$  takav da je  $f(T + x) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$ . Ako je funkcija periodična onda je dovoljno da funkciju ispitamo na intervalu dužine  $T$ , jer onda znamo sve o funkciji na čitavom domenu  $D$ . Većina funkcija nije periodična.
4. **Nule funkcije.** Pokušavamo da odredimo tačno ili da lociramo nule jednačine  $f(x) = 0$ , koristeći neprekidnost i Bolcano-Košijevu teoremu (vidi tačku 4.9)
5. **Ispitivanje funkcije na rubovima domena.** Ova tačka prvo podrazumeva da odredimo granice domena, kojeg smo odredili u tački 1, a zatim da odredimo asimptote: vertikalne, horizontalne i kose. Određivanje asimptota svodi se na nalaženje određenih limesa.

- (v) **Vertikalne asimptote** su prave čija je jednačina  $x = a$ , pri čemu funkcija  $f$  nije definisana u tački  $a \in \mathbb{R}$ , ali jeste barem u jednoj od okolina  $(a - \varepsilon, a)$  ili  $(a, a + \varepsilon)$ , i pri tome je barem jedan od  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  jednak  $\pm\infty$ . Npr. funkcija  $y = \tan(x)$  ima beskonačno mnogo vertikalnih asimptota i to su sve prave  $x_k = \pi/2 + k\pi$ , gdje je  $k$  proizvoljan celi broj.
- (h) **Horizontalne asimptote** su prave čija je jednačina  $y = b$ , ako postoji i ako je barem jedan od  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  jednak  $b$ . Funkcija može imati najviše dve horizontalne asimptote i to ako je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1 \neq b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Npr. funkcija  $\arctan(x)$  za koju važi  $\pi/2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  i  $-\pi/2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (k) **Kose asimptote** postoje ako se funkcija  $f$  ponaša u beskonačnosti kao prava  $y = kx + l$ ,  $k \neq 0$ . Ako kosa asimptota postoji kada  $x \rightarrow +\infty$  tada je

$$0 \neq k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Iste formule važe ako postoji kosa asimptota kada  $x \rightarrow -\infty$ . Jasno, funkcija  $f$  može imati najviše dve kose asimptote. Napomenimo, da ako postoji horizontalna asimptota funkcije  $f$  kada  $x \rightarrow +\infty$  tada ne postoji kosa asimptota funkcije  $f$  kada  $x \rightarrow +\infty$ , i obratno<sup>21</sup>. Isto važi i za horizontalne i kose asimptote funkcije  $f$  kada  $x \rightarrow -\infty$ .

<sup>20</sup> Najmanji pozitivan realni broj  $P$  takav da je  $f(P + x) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$

<sup>21</sup> Ako postoji kosa asimptota funkcije  $f$  kada  $x \rightarrow +\infty$  tada ne postoji horizontalna asimptota funkcije  $f$  kada  $x \rightarrow +\infty$ ,

6. **Ekstremne vrednosti.** Potrebno je naći sve lokalne ekstremne vrednosti funkcije  $f$  koristeći rezultate tačke **5.19**. Da bismo odredili lokalne ekstremume funkcije  $f$  (ako je ona diferencijabilna) potrebno je pronaći sve njene stacionarne tačke što uključuje:
- (a1) određivanje izvoda funkcije  $f$
  - (a2) određivanje domena prvog izvoda  $f'$ ,
  - (a3) određivanje nula funkcije  $f'$ , tj. potrebno je rešiti jednačinu  $f'(x) = 0$ ,
  - (a4) proveriti, korišćenjem **Teorema 1.** i **2.** iz tačke **5.19**, koja od stacionarnih tačaka je ekstremna tačka.
7. **Intervali monotonosti.** Intervali monotonosti određuju se primenom **5.15 Posledica 1** na izvod funkcije  $f'$  nakon što smo ga izračunali u prethodnoj tački 6. Drugim rečima potrebno je ispitati znak funkcije  $f'$  na intervalima određenim stacionarnim tačkama (presečenim sa domenom funkcije  $f$ ), koje smo izračunali u prethodnoj tački 6.
8. **Prevojne tačke.** Slično kao i kod traženja ekstremalnih vrednosti, za određivanje prevojnih tačaka funkcije  $f$  potrebno je:
- (a1) odrediti drugi izvod funkcije  $f$ , tj. funkciju  $f''$ ,
  - (a2) odrediti domen funkcije  $f''$ ,
  - (a3) odrediti nula funkcije  $f''$ , tj. potrebno je rešiti jednačinu  $f''(x) = 0$ ,
  - (a4) proveriti, korišćenjem **Teorema 3.** i **4.** iz tačke **5.20**, koje od rešenja jednačine  $f''(x) = 0$  je prevojna tačka funkcije  $f$ .
9. **Intervali zakrivljenosti.** Određivanje intervala zakrivljenosti, analogno je određivanju intervala monotonosti, samo je potrebno uraditi analogno ispitivanje funkcije  $f''$  (umesto funkcije  $f'$ ). Potrebno je ispitati znak funkcije  $f''$  jer prema **Teoremi 1** iz **5.20**. o tom znaku zavisi da li je funkcije  $f$  konvekna ( $f''(x) > 0$ ) ili konkavna ( $f''(x) < 0$ ) na nekom intervalu. Dakle, potrebno je ispitati znak funkcije  $f''$  na intervalima određenim rešenjima jednačine  $f''(x) = 0$  (presečenim sa domenom funkcije  $f$ ), koje smo izračunali u prethodnoj tački 8.
10. **Grafik funkcije.** Na osnovu svih podataka dobijenih u prethodnim tačkama o funkciji  $f$  potrebno je skicirati suvislu sliku.  
Napomenimo da prilikom crtanja grafika funkcije moguće je otkriti neke pogreške u prethodnim računima, i nakon toga ih otkloniti.

**4.22. Primer.** Ispitati i nacrtati grafik funkcije  $y = f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ .

1. Domen funkcije je  $D = \mathbb{R}$ .

2. **Parnost.** Kako je  $f(-1) = \sqrt[3]{2 + 1} = \sqrt[3]{3}$ , a  $f(1) = \sqrt[3]{2 - 1} = \sqrt[3]{1} = 1$ , zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna jer za sve  $x \in D$  ne važi ni da je  $f(-x) = f(x)$  (npr. za  $x = 1$ ) ni da je  $f(-x) = -f(x)$  (npr. za  $x = 1$ ).

3. **Periodičnost.** očigledno funkcija nije periodična jer polinomi stepena većeg ili jednakog 1 nisu periodične funkcije.

4. **Nule funkcije.** Rešimo jednačinu  $y = 0$ . Imamo,

$$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} = 0 \iff 2x^2 - x^3 = 0 \iff x^2(2 - x) = 0,$$

odakle sledi da su nule funkcije  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 2$ .

5. **Asimptote.** Funkcija *nema vertikalnih asimptota* jer je  $D = \mathbb{R}$ . Ispitajmo da li postoje horizontalne asimptote. Računamo,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left( \frac{2}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = (\pm\infty) \cdot (-1) = \mp\infty$$

odakle sledi da *funkcija nema horizontalnih asimptota* (ni u  $-\infty$  ni  $+\infty$ ). Ispitajmo da li funkcija ima kosih asimptota, tako redom imamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left( \frac{2}{x} - 1 \right)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} \right) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1 \equiv k.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left( \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1 \right) = (-\infty \cdot 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{2}{x} - 1 \right)^{-2/3} \left( -\frac{2}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3} \left( \frac{2}{x} - 1 \right)^{-2/3} = \frac{2}{3} \equiv l. \end{aligned}$$

Dakle, prava  $y = -x + \frac{2}{3}$  je kosa asimptota i u  $-\infty$  i u  $+\infty$ .

6. **Ekstremalne vrednosti.** Nađimo prvi izvod:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-2/3}(4x - 3x^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(4 - 3x)}{\sqrt[3]{x^4(2 - x)^2}}.$$

Domen funkcije  $f'$  je  $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ . Dakle, dve kritične tačke funkcije su  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 2$ . Za  $x \in \mathcal{D}_{f'}$  imamo,

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 - 3x}{\sqrt[3]{x(2 - x)^2}},$$

odakle vidimo da je stacionarna tačka (tj. treća kritična tačka) jednaka  $x_3 = 4/3$ . Prema tome, imamo tri tačke koje zadovoljavaju nužan uslov za egzistenciju ekstremuma, tj. u kojima funkcija može imati lokalne ekstremume. Da bismo proverili koja od kritičnih tačaka jeste ekstremum koristimo **Teoremu 1** iz **5.19.**, tj. proverićemo da li u kritičnim tačkama prvi izvod menja znak. Imamo tri slučaja:

- (i1) za  $x < 0$  brojilac je pozitivan, a imenilac je negativan, tako da je  $f'(x) < 0$ . Drugim rečima, funkcija  $f$  je strogo opadajuća na intervalu  $(-\infty, 0)$ ,
- (i2) za  $x \in (0, 4/3)$  imenilac i brojilac su pozitivni, pa je  $f'(x) > 0$ , tj. funkcija  $f$  je strogo rastuća na intervalu  $(0, 4/3)$ .
- (i3) za  $x > 4/3$  je brojilac negativan, a imenilac pozitivan, tako da je  $f'(x) < 0$ , dakle funkcija  $f$  je strogo opadajuća na intervalu  $(4/3, +\infty)$ .

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da:

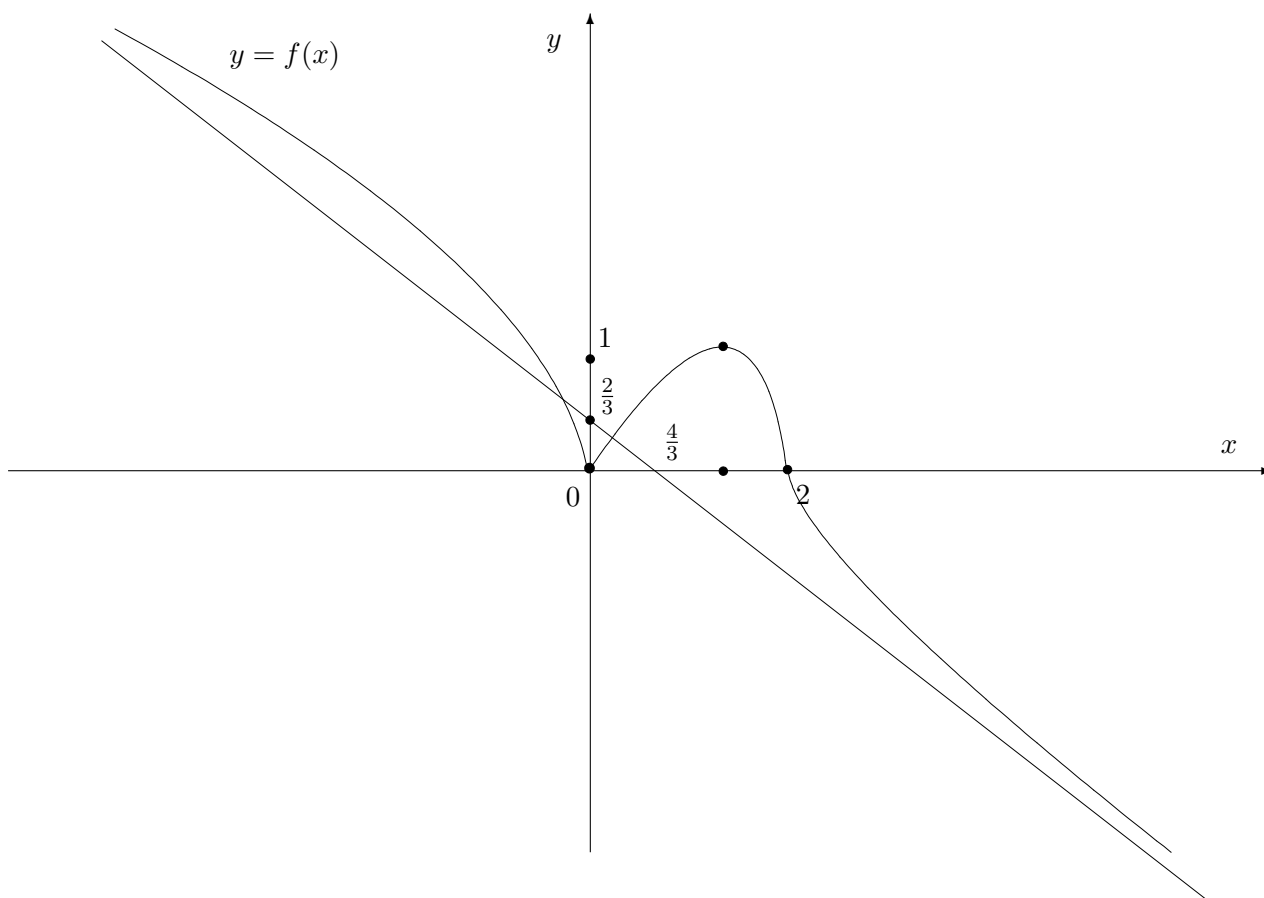
- (i1) funkcija *ima lokalni minimum* u kritičnoj tački  $x_1 = 0$  i vrednost lokalnog minimuma je  $f(0) = 0$ ,
- (i2) funkcija *ima lokalni maksimum* u kritičnoj tački  $x_3 = 4/3$ , i vrednost lokalnog maksimuma je  $f(4/3) = 2\sqrt[3]{4}/3$ ,
- (i3) funkcija *nema lokalni ekstremum* u kritičnoj tački  $x_2 = 2$ , jer prva izvod ne menja znak u toj tački.

Funkcija nema globalni maksimum ni globalni minimum jer je kodomen jednak  $\mathbb{R}$ .

7. **Intervali monotonosti.** Monotonost funkcije smo praktički već ispitali u prethodnoj tački: funkcija je strogo opadajuća na intervalima  $(-\infty, 0)$  i  $(4/3, +\infty)$ , a strogo rastuća na intervalu  $(0, 4/3)$ .

8. **Prevojne tačke.** Da bismo ispitali da li funkcija ima prevojnih tačaka moramo prvo izračunati drugi izvod funkcije  $f$ . Tako nalazimo,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - \frac{4-3x}{3[x(2-x)^2]^{2/3}}[(2-x)^2 + x \cdot 2(2-x)(-1)]}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(x(2-x)^2) - \frac{1}{3}(4-3x)(2-x)(2-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^8}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}, \end{aligned}$$



Slika 5. Grafik funkcije

odakle vidimo da je domen funkcije  $f''$  jedna  $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = D_{f'}$ . Drugi izvod nema nula i jedine tačke u kojima funkcija  $f$  može imati prevojnu tačku su  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 2$ . Da bismo odredili da li se radi o prevojnim tačkama koristićemo **Teoremu 3. iz 5.20.** Kako je znak od  $f''$  suprotan od znaka izraza  $2 - x$ , sledi da za  $x < 2$  je  $f''(x) < 0$ , a za  $x > 2$  je  $f''(x) > 0$ . Dakle, funkcija  $f''$  menja znak pri prolasku kroz tačku  $x = 2$ , tako da je ona jedina prevojna tačka funkcije  $f$ .

**9. Intervali zakrivljenosti.** Na ovo pitanje smo odgovorili u prethodnoj tački u kojoj smo analizirali drugi izvod funkcije  $f$ . Kako je  $f''(x) < 0$ , za  $x < 2$ , sledi da je funkcija  $f$  konkavna na intervalu  $(-\infty, 2)$  i kako je  $f''(x) > 0$  za  $x > 2$ , sledi da je funkcija  $f$  konveksna na intervalu  $(2, +\infty)$ .

**10. Grafik funkcije.** Kombinujući sve prethodne rezultate dobijamo grafik date funkcije koji je prikazan na Slika 5.

## 11. Zadaci

**4.23.** Ispitajte sledeće funkcije i skicirajte njihove grafike;

$$(i1) f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$(i2) f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right),$$

$$(i3) f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$(i4) f(x) = x^{2/3}(1+x)^3,$$

$$(i5) f(x) = (x-1)e^{\frac{x+1}{x-1}},$$

$$(i6) f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}},$$

$$(i7) f(x) = xe^{-\frac{x}{4} + \frac{3}{4x}}.$$

# Integralni račun

## 1. Neodređeni integral

**5.1. Definicija.** Kao što smo videli u ranijim glavama, kada imamo neku operaciju prirodno se postavlja pitanje egzistencije i nalaženja njene inverzne operacije. Diferenciranje je zapravo linearno preslikavanje<sup>1</sup> sa skupa,  $\mathcal{C}^k(D)$ ,  $k \geq 1$ ,  $k$ -puta diferencijabilnih funkcija na skupu  $D \subseteq \mathbb{R}$  na skup  $\mathcal{C}^{k-1}(D')$ ,  $D' \subseteq D$ ,  $k \geq 1$ , tj.

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^k(D) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(D').$$

Preciznije, neka je  $f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$  na skupu  $D$ , tada kažemo da je funkcija  $F(x)$  primitivna funkcija (antiizvod, antiderivacija) funkcije  $f(x)$  na skupu  $D$ <sup>2</sup>. Mi ćemo za  $D$  obično uzimati segment  $[a, b]$ .

**Propozicija 1.** *Ako su  $F$  i  $F_1$  primitivne funkcije, funkcije  $f$  na  $D$  tada postoji  $C \in \mathbb{R}$  takvo da je  $F(x) = F_1(x) + C$  na intervalu  $[a, b]$ .*

Dokaz. Kako je  $f(x) = F'(x) = F_1'(x)$  na  $D$ , tada je  $F'(x) - F_1'(x) = 0$ , i na osnovu neke ranije Propozicije  $F(x) - F_1(x) = C$ , za neko  $C \in \mathbb{R}$ . □

Dakle, ako je  $F$  neka primitivna funkcija funkcije  $f$  na  $D$ , tada postoji čitava familija funkcija, parametrizovana skupom  $\mathbb{R}$ , koje su primitivne funkcije od  $f$ . I pod oznakom  $\int f(x) dx$  podrazumevamo taj čitav skup primitivnih funkcija od  $f$  i zovemo ga **neodređeni integral** funkcije  $f$ ,

$$(51) \quad \int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \{\text{ili kraće}\} = F(x) + C,$$

njen neodređeni integral na  $(a, b)$ .

## 5.2. Neka svojstva neodređenih integrala i tabela elementarnih integrala.

Kako je diferenciranje inverzna operacija od traženja integrala mnoge osobine diferenciranja prenose se i na integralenje.

**Propozicija 2.** *Neka je  $F$  primitivna funkcija od  $f$  na  $D$ . Tada je*

$$(i1) \quad d(\int f(x) dx) = f(x) dx \quad \iff \quad \frac{d}{dx}(\int f(x) dx) = f(x),$$

$$(i2) \quad \int dF(x) = F(x) + C = \int f(x) dx.$$

$$(i3) \quad \int k f(x) dx = k F(x) = k (\int f(x) dx).$$

<sup>1</sup> tj. linearni operator

<sup>2</sup> ili kraće primitivna funkcija od  $f$  na  $D$ .

(i4) Neka je  $G$  primitivna funkcija od  $g$  na  $D$  tada je

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz činjenice da je neodređeni integral inverzna operacija od diferenciranja. Pokažimo još npr. (i4) Iz  $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$  sledi da je  $F + G$  primitivna funkcija od  $f + g$ , i primena (i2) na  $F + G$  daje traženu jednakost.  $\square$

Sada koristeći Tabelu izvoda elementarnih funkcija lako dobijamo sledeću tabelu elementarnih integrala.

Tabela elementarnih integrala

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int a dx = ax + C, \quad a \in \mathbb{R}.$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$\int \cos x = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C,$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$	
Eksponecijalna funkcija	Logaritamska funkcija
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + C$
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arth} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$	



Primetimo da se osnovna metoda za određivanje neodređenih integrala sastoji iz sledeća dva koraka:

- (i1) Koristeći znanja o izvodima napišemo tabelu osnovnih neodređenih integrala elementarnih funkcija.
- (i2) Pomoću pravila (od kojih zasada znamo samo neka) i svojstava neodređenih integrala polazni neodređeni integral svodimo na poznate (zasada na one iz Tabele, a kasnije na one koje smo već izračunali).

Primeri. Izračunajmo, sledeće neodređene integrale:

$$(i1) \int x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} dx = \int x^{\frac{31}{16}} dx = \frac{x^{\frac{31}{16}+1}}{\frac{31}{16}+1} + C = \frac{16}{47} x^{\frac{47}{16}} + C.$$

$$(i2) \int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2} dx = \int \frac{2-x+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{2}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= -\frac{2}{x} - \ln|x| - 4x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

## 2. Osnovne metode integracije neodređenog integrala

**5.3. Smena promenljive.** U ovoj tački skup pravila neodređenog integrala obogaćujemo jednim od najvažniji pravila.

**Teorema.** Neka je  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija funkcije  $f$  i neka je  $g : D' \rightarrow A$  funkcija klase  $C^1$  na  $D'$ . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju

$$f(g(x))g'(x) : D' \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{i važi formula} \quad \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Dokaz. Iz

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(g(x))g'(x) dx \right) = f(g(x))g'(x) = F'(g(x))g'(x) = \frac{d}{dx} (F(g(x)) + C),$$

sledi da je funkcija  $F(g(x)) + C$  primitivna funkcija od  $f(g(x))g'(x)$ . Prema tome,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C. \quad \square$$

Ova teorema omogućuje da uvedemo smenu u neodređenom integralu na sledeći način

$$t = g(x) \implies dt = d(g(x)) = g'(x)dx, \quad \text{tako da je}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C.$$

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale, pretpostavljajući da je  $a \neq 0$ , a u (i6) da je  $a > 0$ . Napomenimo da za nalaženje nekih integrala koristimo rešenja prethodnih, npr. rezultat iz (i4) koristimo u (i5), a (i5) u (i6).

$$(i1) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln \frac{1}{|\cos x|} + C.$$

$$(i2) \quad \int x^k e^{x^{k+1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = t \\ (k+1)x^k dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{k+1} \cdot e^t = \frac{e^t}{k+1} + C = \frac{e^{x^{k+1}}}{k+1} + C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(i3) \quad \int f(ax+b) dx = \left\{ \begin{array}{l} ax+b=t \\ a dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

$$(i4) \quad \int \cos(ax+b) dx = \left\{ \begin{array}{l} ax+b=t \\ a dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \cos t dt = \frac{1}{a} \sin t + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$$

$$(i5) \quad \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$(i6) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a \cos t dt \\ = a^2 \int |\cos t| \cos t dt = \begin{cases} a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t > 0. \\ -a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t < 0. \end{cases}$$

Napomenimo da ćemo se u slučajevima poput (i6) u daljnjem tekstu ograničavati samo na prvi slučaj<sup>3</sup> ( $\sqrt{h(x)^2} = h(x)$ ,  $h(x) \geq 0$ ), vodeći računa da postoji i drugi slučaj ( $\sqrt{h(x)^2} = -h(x)$ ,  $h(x) \leq 0$ ).

**5.4. Parcijalna integracija.** Parcijalna integracija je jedna od najvažnijih metoda integracije, koja je posledica Lajbnicove formule za izvod proizvoda funkcija. Preciznije, važi sledeća teorema.

**Teorema.** Neka su  $f$  i  $g$  diferencijabilne funkcije na  $D$  i neka postoji primitivna funkcija za  $f'g$ , tada postoji primitivna funkcija i za funkciju  $fg'$  na  $D$  i važi formula

$$\int f(x) g(x)' dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

**Dokaz.** Iz Lajbnicove formule,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

integracijom obe strane nalazimo

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx,$$

odakle sledi formula. □

Ponekad se ova formula zapisuje na sledeći način,

$$\int f(x) d(g(x)) dx = f(x)g(x) - \int g(x) d(f(x)) dx.$$

**5.5. Primeri.** Izračunajmo sada nekoliko tipičnih integrala metodom parcijalne integracije.

<sup>3</sup>radi jednostavnijeg zapisa.

$$(i1) \quad \int \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad df = \frac{1}{x} \, dx \\ dg = dx \quad g(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad df = dx \\ dg = \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = -x \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \mathbf{6.3(i6)} = \\ = \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

$$(i3) \quad \int x^2 \arcsin(x) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \arcsin(x) \quad df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ dg = x^2 \, dx \quad g(x) = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x \, dx \end{array} \right\} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \int \frac{1-t}{t^{\frac{1}{2}}} \, dt = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \left( \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt \right. \\ \left. + \int t^{\frac{1}{2}} \, dt \right) = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \\ - \frac{1}{9} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} + C = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{9} \sqrt{1-x^2} (2+x^2) + C.$$

$$(i4) \quad I = \int e^x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin x \quad df = \cos x \, dx \\ dg = e^x \, dx \quad g(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \cos x \quad df = -\sin x \, dx \\ dg = e^x \, dx \quad g(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - I, \\ \text{odakle sledi da je: } I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

$$(i5) \quad \int x \arcsin(x) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \arcsin(x) \quad df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ dg = x \, dx \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ = (i2) = \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2} \left( -x \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} \right) \\ = \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{\arcsin(x)}{4} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

$$(i6) \quad \int e^{\alpha x} \cos(\beta x) \, dx, \quad \alpha \beta \neq 0,$$

$$(i7) \quad \int x^2 \ln x \, dx$$

$$(i8) \quad \int x^n e^x \, dx$$

### 3. Integracija racionalnih funkcija

**5.6. Integracija racionalnih funkcija.** Kao što znamo svaka racionalna funkcija ima oblik

$$(52) \quad R(x) = \frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = A(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

pri čemu je  $A(x)$  polinom stepena  $n - m$  ako je  $n \geq m^4$ , a  $P(x)/Q(x)$  je prava racionalna funkcija, tj. ona kod koje je  $\partial P < \partial Q$ . Svaka prava racionalna funkcija može predstaviti u vidu sume parcijalnih razlomaka tj. kao

$$(53) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_j^i}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_j^i x + C_j^i}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}, \quad \text{ako je}$$

$$Q(x) = b_m (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_t x + q_t)^{s_t}$$

gde je  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $p_1, \dots, p_t, q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}$  i  $p_i^2 - 4q_i < 0$ , za svako  $i = 1, \dots, t$ , i  $m = r_1 + \dots + r_k + 2(s_1 + \dots + s_t)$ .

Iz formula (52) i (53), kao iz linearnosti integrala, jasno je da se problem izračunavanja neodređenog integrala racionalnih funkcija svodi na izračunavanje neodređenih integrala parcijalnih razlomaka

$$(54) \quad \frac{A}{(x - \alpha)^j}, \quad \text{i} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Nalaženjem neodređenih integrala parcijalnih razlomaka rešeno je u sledećoj propoziciji.

**Propozicija.** Za neodređene integrale parcijalnih razlomaka važi:

$$(i1) \quad \int \frac{A}{(x - \alpha)^j} dx = \frac{A}{(1 - j)(x - \alpha)^{j-1}} + K, \quad K \in \mathbb{R}, j > 1,$$

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$(i2) \quad \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + K.$$

$$B, C, p, q, K \in \mathbb{R}.$$

$$(i3) \quad \text{Ako uvedemo oznake } I_j = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^j} \text{ i } J_j = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j} dx,$$

tada za integrale  $I_j$  i  $J_j$  vaše rekurentne veze

$$I_j = \frac{2x + p}{(j - 1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{j-1}} + \frac{2(2j - 3)}{(j - 1)(4q - p^2)} I_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$J_j = \frac{B}{2(1 - 1)(x^2 + px + q)^{j-1}} + (C - \frac{1}{2} Bp) I_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

**Dokaz.** (i1) Slučaj  $j = 1$  nalazi se u tabeli, a za  $j > 1$  imamo

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^j} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x - \alpha \\ dt = dx \end{array} \right\} = A \int \frac{dt}{t^j} = \frac{A}{1 - j} t^{-j+1} + K = \frac{A}{1 - j} \frac{1}{(x - \alpha)^{j-1}} + K.$$

<sup>4</sup>ako je  $m > n$  onda je  $A = 0$ .

(i2) za  $j = 1$  primetimo da je

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q} = \frac{B}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{C - \frac{1}{2}Bp}{x^2 + px + q} = \frac{B}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{C - \frac{1}{2}Bp}{(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}},$$

tako da imamo

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + (C - \frac{1}{2}Bp) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p) dx \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + p/2 \\ du = dx \end{array} \right\} = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + K$$

Nađimo sada  $J_j$

$$J_j = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^j} dx + (C - \frac{1}{2}Bp) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^j} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p) dx \end{array} \right\}$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{dt}{t^j} + (C - \frac{1}{2}Bp) I_j = \frac{B}{2(1-j)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + (C - \frac{1}{2}Bp) I_j.$$

Na kraju nalazimo rekurentnu vezu za  $I_j$ .

$$I_{j-1} = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{j-1}} = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = (x^2 + px + q)^{-j+1} \\ df = (-j+1)(2x+p)(x^2 + px + q)^{-j} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dg = dx \\ g(x) = x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + (j-1) \int \frac{2x^2 + px}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}}$$

$$+ 2(j-1) \int \frac{x^2 + px + q - \frac{p}{2}x - q}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + 2(j-1)I_{j-1}$$

$$- \frac{(j-1)p}{2} \int \frac{(2x+p) + (\frac{4q}{p} - p)}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + 2(j-1)I_{j-1} + \frac{p}{2(x^2 + px + q)^{j-1}}$$

$$- \frac{(j-1)(4q - p^2)}{2} I_j,$$

odakle dobijamo

$$I_j = \frac{2x + p}{(j-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{j-1}} + \frac{2(2j-3)}{(j-1)(4q - p^2)} I_{j-1}. \quad \square$$

**5.7. Primeri.** Primeri (i1)-(i4) korišćeni su u dokazu prethodne leme.

$$(i1) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} x = ta \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + a^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

$$(i3) \quad \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x+p) dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln(x^2 + px + q) + C, \quad p^2 - 4q < 0.$$

$$(i4) \quad \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^j} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x+p) dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^j} = \frac{1}{(1-j)(x^2+px+q)^{j-1}} + C.$$

$$(i5) \quad \int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx = \int \left( x^2 + x - 3 + \frac{5x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{5x+2}{(x+1)^2} dx = (*)$$

kako je  $\frac{5x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A+A(x+1)+B}{(x+1)^2}$  odakle nalazimo  $A+B=2$ ,  $A=5$ ,  $B=-3$ ,

tako da imamo  $\int \frac{5x+2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{5dx}{x+1} - \int \frac{3dx}{(x+1)^2} dx = 5 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$

i konačno  $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx = (*) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + 5 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$

$$(i6) \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) + C$$

$$(i7) \quad \int \frac{3x-1}{x^2+5x+6} dx = 10 \ln(3+x) - 7 \ln(2+x) + C.$$

**5.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija.** Ova tačka pokazuje važnost integrala racionalnih funkcija jer se i neke klasa integrala iracionalnih funkcija pogodnim smenama svode na integrale racionalnih funkcija koje znamo da rešimo.

**(i1)** Neka je  $R$  racionalna funkcija u  $k+1$  promenljivoj tada integral oblika

$$(55) \quad \int R \left( x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \quad n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

rešavamo smenom

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{gde je } n = NZS(n_1, \dots, n_k). \text{ Tada je}$$

$$x = \frac{b-t^nd}{t^nc-a} \quad \text{i} \quad dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2} dt. \quad \text{Nakon smene integral (55) postaje}$$

$$\int R \left( \frac{b-t^nd}{t^nc-a}, t^{m_1}, t^{m_2}, \dots, t^{m_k} \right) dx \quad m_i = \frac{n}{n_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Primetimo da je poslednji integral, integral racionalne funkcije (u  $t$ ), time je pokazano da se ova klasa integrala iracionalnih funkcija svodi na integraciju racionalnih funkcija.

**(i2)** Neka je  $R$  racionalna funkcija u dve promenljive, tada se integral

$$(56) \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

može svesti na integral racionalne funkcije jednom od Ojlerovih (Euler) smena

- (a) ako je  $a > 0$  koristimo smenu:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ , iz koje nalazimo  
 $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$  i  $dx = \frac{2(bt + \sqrt{a}(t^2 + c))}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$  odakle sledi da je integral (56)

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, t\right) \frac{2(bt + \sqrt{a}(t^2 + c))}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

integral racionalne funkcije.

- (b) ako je  $c > 0$  koristimo smenu:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$ , iz koje nalazimo  
 $x = \frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}$  i  $dx = -\frac{2(a\sqrt{c} + t(b + \sqrt{c}t))}{(a - t^2)^2} dt$  odakle sledi da je integral

$$(56) \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \\ = \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}, t \frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a} - \sqrt{c}\right) \frac{-2(a\sqrt{c} + t(b + \sqrt{c}t))}{(a - t^2)^2} dt,$$

integral racionalne funkcije.

- (c) ako je  $\alpha$  jedan realan koren polinoma  $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$  tada koristimo smenu:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$  iz koje nalazimo

$$x = \frac{t^2\alpha - a\beta}{t^2 - a} \quad \text{i} \quad dx = \frac{-2ta(\alpha - \beta)}{(a - t^2)^2} dt \quad \text{odakle sledi da je integral (56)}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2\alpha - a\beta}{t^2 - a}, t(x - \alpha)\right) \frac{2ta(-\alpha + \beta)}{(a - t^2)^2} dt$$

integral racionalne funkcije.

**Primer.** Primeri integrala koji se rešavaju Ojlerovim smenama.

$$(i1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x^2} = t - x, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t} \\ dx = \frac{1 + t^2}{2t^2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} \frac{1}{t - \frac{t^2 - 1}{2t}} dt = \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{dx}{(1 + x^2)(\sqrt{1 - x^2})} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - x^2} = t(x + 1), \quad x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1 + t^2)^2} dt \end{array} \right\} =$$

$$(i3) \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt{1 + x + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x + x^2} = t - x, \quad x = \frac{-1 + t^2}{1 + 2t} \\ dx = \frac{2(1 + t + t^2)}{(1 + 2t)^2} dt \end{array} \right\} =$$

**(i3)** Integral oblika

$$(57) \quad \int x^m (a x^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

poznatiji kao **diferencijalni binom** može se svesti na integral racionalne funkcije u sledećim slučajevima:

- (a) ako je  $p \in \mathbb{Z}$  i  $p > 0$ , tada izraz  $(a x^n + b)^p$  razvijamo po binomnoj formuli, a ako je  $p < 0$  smenom  $x = t^q$  gde je  $q = \text{NZS}(\text{imenilac brojeva } m \text{ i } n)$ .
- (b)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$  integral se smenom  $t^r = a x^n + b$  gde je  $r = \text{imenilac od } p$ .
- (c)  $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$  integral se smenom  $t^r = a + b x^{-n}$  gde je  $r = \text{imenilac od } p$ .

**Primer.** Izračunajte sledeće integrale iracionalnih funkcija.

$$(i1) \quad \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \dots$$

$$= 6 \left( \ln|t| - \frac{1}{4} \ln|t+1| - \frac{3}{8} \ln(2t^2-t+1) - \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \right) + C$$

$$= \ln \frac{x}{(x^{\frac{1}{6}}+1)^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1)^{\frac{9}{4}}} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}} = \left\{ \begin{array}{l} 3+2x = t^6, \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{3t^2}{t-1} dt = \frac{3}{2} (t-1)(t+3) + 3 \ln|t-1| + C$$

$$= \frac{3}{2} ((3+2x)^{\frac{1}{6}}-1)((3+2x)^{\frac{1}{6}}+3) + 3 \ln((3+2x)^{\frac{1}{6}}-1) + C.$$

$$(i3) \quad \int \sqrt{x^3+x^4} dx = \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1}{x}+1}, \quad x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt. \end{array} \right\} = -2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^4} dt = \dots$$

**5.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija.** Pri računanju integrala čija podintegralna funkcija sadrži sinuse i kosinuse primenjujemo adicione formule sa idejom da smanjimo stepene sinusa i kosinusa u podintegralnoj funkciji (ako je to moguće). Korisno je koristiti sledeće transformacione formule:

$$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

Neka je  $R(\sin x, \cos x)$  racionalna funkcija u  $\sin x$  i  $\cos x$ , tada se univerzalnom smenom:

$$(58) \quad \tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2},$$



integral  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  svodi na integral racionalne funkcije. S obzirom da se ovom smenom obično dobijaju komplikovane racionalne funkcije (tj. stepeni polinoma  $P(x)$  i  $Q(x)$  su prilično veliki), korisno je izbeći ovu smenu ako je to ikako moguće. To je moguće sigurno u sledećim slučajevima:

- (a)  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  ili  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  tada koristimo smenu

$$\cos x = t \text{ (ili } \sin x = t), \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \text{ (ili } \cos x = \sqrt{1-t^2}) \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ (ili } dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}).$$

- (b)  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  tada koristimo smenu

$$\tan x = t, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

**Primer.** Primeri integrala trigonometrijskih funkcija.

$$(i1) \quad \int \sin(6x) \cos(7x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-x) + \sin(13x)) dx = \frac{1}{2} \left( \cos x - \frac{1}{13} \cos(13x) \right) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 3} = \left\{ \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \arctan(2t + 1) + C = \arctan(2 \tan \frac{x}{2} + 1) + C.$$

$$(i3) \quad \int \frac{dx}{1 + \tan x} = \left\{ \begin{array}{l} \tan x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1) (1 + t)} = \frac{1}{2} (\arctan(t) + \ln |1 + t|) - \frac{1}{4} \ln(1 + t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) + C.$$

$$(i4) \quad \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^2(1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$(i5) \quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = \dots = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + C.$$

## 4. Određeni integral

**5.10. Definicija.** Neka je data neprekidna funkcija  $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ , ona je ograničena na segmentu  $[a, b]$ , tada je i površina lika ograničenog pravama  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  i grafikom krive  $y = f(x)$  (tj. površina 'ispod grafika') konačna, jer je manja od  $(b-a)M$ , gde je  $M$  maksimum funkcije  $f$  na  $[a, b]$ . Sada se postavlja prirodno pitanje kako da odredimo površinu ispod grafika krive. Ideja koju je predložio Riman<sup>5</sup> sastoji se u sledećem: podelimo segment  $[a, b]$  na  $n$  delova tačkama

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n | a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b\} = P.$$

<sup>5</sup>Riemann,

Sada vidimo (vidi Sliku 1) da je tražena površina jednaku zbiru površina  $n$  krivolinijskih trapeza određenih tačkama skupa  $P$ . Ako dužinu podintervala obeležimo sa  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), i neka je  $\chi(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$  parametar podele  $P$ , i

izaberimo tačke  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  i definišimo skup  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . Jasno je da je  $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < x_n$ . Ako su dužine svih intervala  $[x_{i-1}, x_i]$  jednake onda kažemo da je raspodela ekvidistantna.

Motivisani Rimanovom idejom posmatramo funkciju,  $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , tada uređeni par  $(P, \Xi)$  zovemo **podelom segmenta**  $[a, b]$ , a zbir

$$(59) \quad \Sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

nazivamo **integralnom sumom** funkcije  $f$  za podelu  $(P, \Xi)$ . Napomenimo da u opštem slučaju funkcija  $f$  ne mora biti neprekidna na  $[a, b]$ .

Primetimo da integralna suma  $\Sigma(f, P, \Xi)$  predstavlja aproksimaciju površine ispod grafika krive  $f$  na  $[a, b]$ . Postavlja se prirodno pitanje kada ta aproksimacija teži pomenutoj površini.

Za broj  $I$  kažemo da je granična vrednost integralne sume  $\Sigma(f, P, \Xi)$  kada parametar podele  $\chi(P) \longrightarrow 0$  i pišemo

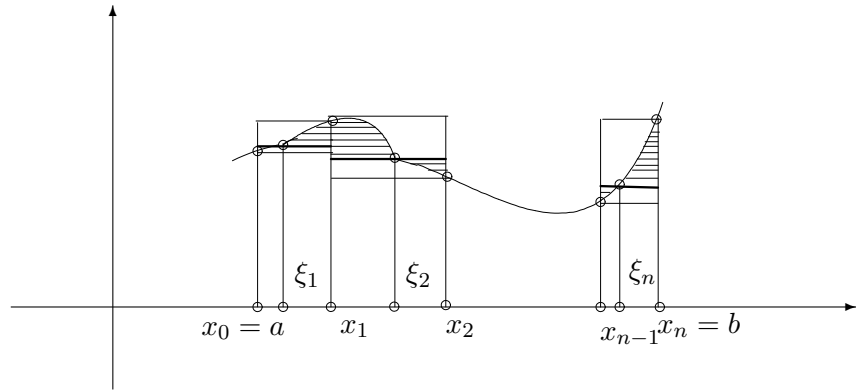
$I = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi)$ , ukoliko  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$  tako da za svaku podelu  $(P, \Xi)$  važi

$$(60) \quad |\Sigma(f, P, \Xi) - I| < \varepsilon \quad \text{kada je } \chi(P) < \delta.$$

Ukoliko postoji konačni  $\lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi)$  tada kažemo da je funkcija  $f$  **integrabilna u Rimanovom smislu** na segmentu  $[a, b]$ . I pomenuti limes zove se **određeni (Rimanov) integral** funkcije  $f$  na  $[a, b]$ . Oznaka koja se koristi:  $I = \int_a^b f(x) dx$ , gde je  $a$ —donja granica,  $b$ —gornja granica,  $f(x)$ —podintegralna funkcija,  $f(x) dx$ —podintegralni izraz i  $x$ —integraciona promenljiva.

**Teorema.** Neka je funkcija  $f$  neprekidna na intervalu  $[a, b]$  tada je ona i integrabilna u Rimanovom smislu.

Digresija. Obrat ovog tvrđenja ne važi.



Slika 1. Rimanov integral

**Skica dokaza.** Kako je  $f$  neprekidna na intervalu  $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$  ona dostiže svoj minimum i maksimum na  $[x_{i-1}, x_i]$  i možemo definisati tkz. gornju i donju Darbuovu (Darboux) sumu za datu raspodelu  $\Sigma(f, P, \Xi)$  na sledeći način:

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad \mathcal{D}_+(\Sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

gde je  $m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  i  $M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ . Očigledno važi

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) \leq \Sigma(f, P, \Xi) \leq \mathcal{D}_+(\Sigma).$$

Kako se svaka raspodela  $\Sigma(f, P, \Xi)$  može aproksimirati po volji tačno ekvidistantnom raspodelom  $\Sigma^\varepsilon(f, P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)$ <sup>6</sup> za neprekidnu funkciju (koja je i ravnomerno neprekidna na  $[x_{i-1}, x_i]$ , pa kada  $n \rightarrow \infty$ ,  $m_i \rightarrow M_i$ ) lako se pokazuje da je  $\lim_{(P, \Xi)} \mathcal{D}_-(\Sigma) = \lim_{(P, \Xi)} \mathcal{D}_+(\Sigma)$ , odakle sledi tvrdnja.  $\square$

**5.11. Primer.** Odredimo određene integrale nekih funkcija po definiciji.

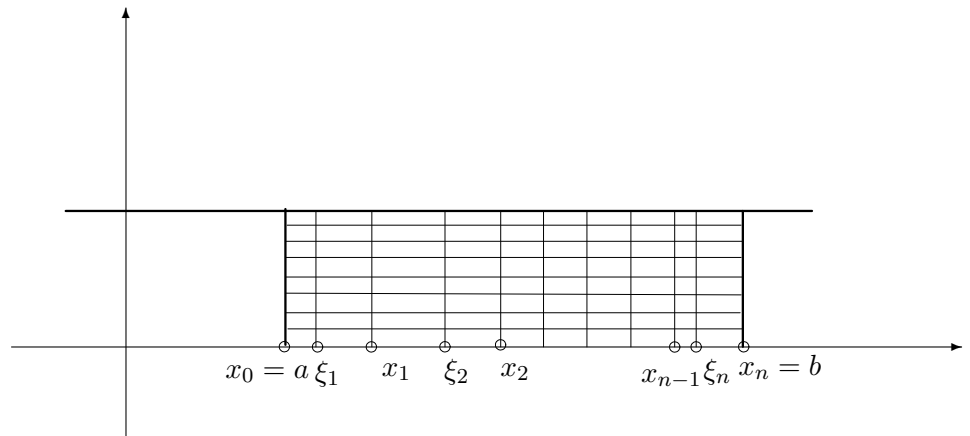
(i1)  $f(x) = c$ . Neka je  $(P, \Xi)$  proizvoljna podela segmenta  $[a, b]$  (Slika 2), tada je

$$\begin{aligned} \Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Dakle, u ovom slučaju  $\Sigma(f, P, \Xi)$  ne zavisi o podeli, pa niti o  $\chi(P)$ , i imamo da je

$$\lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi) = c(b - a), \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$



**Slika 2.** Integral konstante na segmentu  $[a, b]$

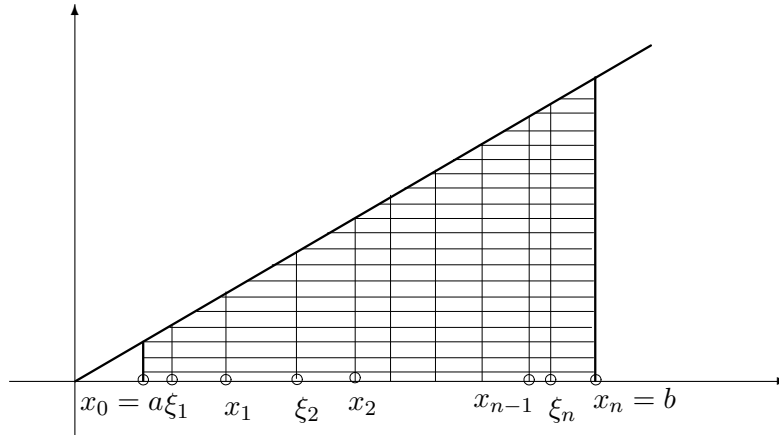
Specijalno za  $c = 1$ , je  $\int_a^b dx = b - a$ .

(i2)  $f(x) = x$ . Kako je  $f$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  možemo posmatrati ekvidistantnu podelu (Slika 3)  $P = \Xi = \{\xi_i = x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n\}$  gde je  $h = \frac{b-a}{n}$ . Dakle,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{i} \quad \Delta x_i = h.$$

Sada redom imamo na segmentu  $[a, b]$ ,

<sup>6</sup>  $\forall \varepsilon > 0$  postoji ekvidistantna raspodela  $(P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)$  takva da je  $|\Sigma(f, P, \Xi) - \Sigma^\varepsilon(f, P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)| < \varepsilon$ .



**Slika 3.** Integral funkcije  $y = x$  na segmentu  $[a, b]$

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i h = h \sum_{i=1}^n (a + i \cdot h) = h \left( n \cdot a + h \sum_{i=1}^n i \right) = n \cdot h \left( a + \frac{n+1}{2} h \right) \\ &= n \cdot \frac{b-a}{n} \left( a + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \right) = a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

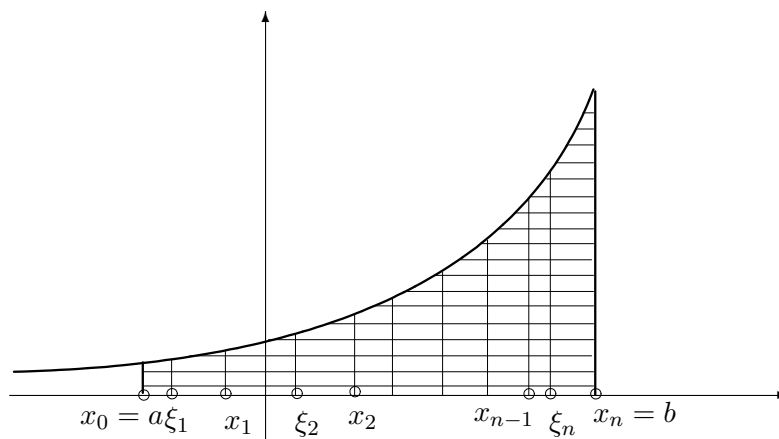
Dakle, kada  $h \rightarrow 0$  tada  $n \rightarrow \infty$ , i imamo

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

(i3)  $f(x) = e^x$ . Kako je  $f$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  možemo posmatrati ekvidistantnu podelu  $P = \Xi = \{\xi_i = x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n\}$  gde je  $h = \frac{b-a}{n}$ . Dakle,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{i} \quad \Delta x_i = h.$$

Sada redom imamo (Slika 4),



**Slika 4.** Integral funkcije  $y = e^x$  na segmentu  $[a, b]$

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{a+ih} h = h \cdot e^a \sum_{i=1}^n (e^h)^i = h \cdot e^{a+h} \sum_{i=0}^{n-1} (e^h)^i = h \cdot e^{a+h} \cdot \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \\ &= \frac{h}{e^h - 1} \cdot e^{a+h} \cdot (e^{b-a} - 1)\end{aligned}$$

Dakle, sada imamo,

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{e^h - 1} \cdot e^{a+h} \cdot (e^{b-a} - 1) \right) = (e^{b-a} - 1) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} e^{a+h} = (e^{b-a} - 1) \cdot 1 \cdot e^a \\ &= e^b - e^a. \end{aligned}$$

(i4)  $f(x) = x^2$ . Slično primeru (i2) dobija se  $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$ .

(i5)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

## 5. Svojstva određenog integrala

**5.12. Svojstva određenog integrala.** Iz definicije određenog integrala, jasno je da su njegova svojstva u uskoj vezi sa osobinama suma i limesa. Malo preciznije imamo:

**Teorema 1.** *Neka su funkcije  $f$  i  $g$  integrabilne u Rimanovom smislu na  $[a, b]$ . Tada,*

(i1)  $\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(i2)  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

(i3) *ako je  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  tada je  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .*

(i4) *ako je  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$  tada je  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .*

Dokaz.

(i1)  $\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \alpha \cdot f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \cdot \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx.$

(i2)  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta x_i = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$   
 $= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

(i3)  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$

(i4) Primenimo (i3) na funkciju  $\phi(x) = f(x) - g(x)$ . □

Za integrabilne funkcije važi i sledeća teorema kao posledica definicije određenog integrala.

**Teorema 2.** *Ako je funkcija  $f(x)$  integrabilna na  $[a, b]$  tada je*

(i1)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

$$(i2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ pri čemu je } c \in (a, b).$$

Dokaz. Neka je data podela  $(P, \Xi)$ , gde je  $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} = P$  i  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . Da bismo dokazali (i1) definišemo  $\Delta x'_i = x'_i - x'_{i-1} = x_{n-i} - x_{n-i+1} = -\Delta x_{n-i+1}$ , tako da imamo redom,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = - \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=n}^1 f(\xi'_i) \Delta x'_i = - \int_b^a f(x) dx.$$

(i2) Izaberimo da  $c = x_k$  bude jedna od deobenih tačaka, što možemo uvek uraditi (ako nije onda je dodamo) i kako  $\chi_1(P) \rightarrow 0$  i  $\chi_2(P) \rightarrow 0$  kada  $\chi(P) \rightarrow 0$  imamo,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\chi_1(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\chi_2(P) \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

□

**5.13. Teorema o srednjoj vrednosti integrala.** U ovoj tački dokazujemo jednu od osnovnih teorema za neodređene integrale.

**Teorema.** Neka su  $f(x)$  i  $\phi(x)$  dve integrabilne funkcije na  $[a, b]$  takve da je

$$(1) m \leq f(x) \leq M,$$

$$(2) \phi(x) \text{ ima stalan znak na } [a, b]^7,$$

$$(3) \int_a^b \phi(x) dx \neq 0.$$

Tada postoji  $\mu \in \mathbb{R}$  takav da je  $m \leq \mu \leq M$  i važi da je  $\int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx = \mu \int_a^b \phi(x) dx$ .

Dokaz. Pretpostavimo da je  $\phi(x) > 0$ , tada iz  $m \leq f(x) \leq M$  imamo,  $m \cdot \phi(x) \leq f(x) \cdot \phi(x) \leq M \cdot \phi(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Teorema 5.12 (i4) sada implicira  $\int_a^b m \cdot \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx \leq \int_a^b M \cdot \phi(x) dx$  i na osnovu Teorema 5.12 (i2) zaključujemo da je:  $m \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi(x) dx \leq M \int_a^b \phi(x) dx$ , odakle sledi tvrđenje jer je  $\mu = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx}{\int_a^b \phi(x) dx}$ .<sup>8</sup> □

**Posledica.** Neka je  $f(x)$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  i  $\phi(x)$  kao u prethodnoj teoremi, tada je

$$(i1) \int_a^b \phi(x) f(x) dx = f(\xi) \int_a^b \phi(x) dx \quad \xi \in [a, b].$$

$$(i2) \text{ ako je još } \phi(x) = 1 \text{ tada je } \mu = f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

<sup>7</sup> tj.  $\phi(x) > 0, \forall x \in [a, b]$  ili  $\phi(x) < 0, \forall x \in [a, b]$ .

<sup>8</sup> Primitimo da je uslov  $\int_a^b \phi(x) dx \neq 0$ , važan jer bi u suprotnom imali  $m \cdot 0 \leq \int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx \leq M \cdot 0$ .

**Dokaz.** Kako je  $f(x)$  neprekidna na  $[a, b]$  onda ona taj segment preslikava na segment  $[m, M]$ , pa postoji  $\xi \in [a, b]$  tako da je  $\mu = f(\xi)$ , gde je  $\mu$  iz prethodne teoreme, odakle sledi (i1), dok je (i2) specijalni slučaj od (i1).  $\square$

## 6. Fundamentalna teorema

**5.14. Određeni integral i primitivna funkcija.** Neka je  $f$  integrabilna funkcija na segmentu  $[a, b]$ . Tada je dobro definisana funkcija

$$(61) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

na intervalu  $[a, b]$ .

Neka je funkcija  $f$  ograničena na segmentu  $[a, b]$ , tj. neka je  $|f(x)| \leq C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) za sve  $x \in [a, b]$ , tada iz aditivnosti integrala, za  $x, x+h \in [a, b]$ , sledi:

$$(62) \quad |F(x+h) - F(x)| \leq C|h|.$$

Nejednakosti (62) implicira neprekidnost funkcije  $F$  na  $[a, b]$ . Ali važi i više,

**Lema.** *Ako je  $f$  integrabilna funkcija na  $[a, b]$  i ako je  $f$  neprekidna u nekoj tački  $x \in [a, b]$ , tada je funkcija  $F$  definisana na  $[a, b]$  formulom (62) diferencijabilna u tački  $x$ , i važi formula  $F'(x) = f(x)$ .*

**Dokaz.** Kako je  $f$  neprekidna u tački  $x$  sledi da je  $f(t) = f(x) + \Delta(t)$ , pri čemu  $\Delta(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow x$  i  $t \in [a, b]$ . Funkcija  $\Delta(t) = f(t) - f(x)$  je integrabilna na  $[a, b]$  kao razlika dve integrabilne funkcije, i neka je  $M(h) = \sup_{t \in I(h)} |\Delta(t)|$ , gde je  $I(h) = [x, x+h] \subseteq [a, b]$ . Jasno, zbog neprekidnosti funkcije  $f$  u tački  $x$  sledi da  $M(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow 0$ . Sada imamo,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + \Delta(t)) dt = \int_x^{x+h} f(x) dt \\ &+ \int_x^{x+h} \Delta(t) dt = f(x)h + \alpha(h)h \end{aligned}$$

Budući da je

$$\left| \int_x^{x+h} \Delta(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |\Delta(t)| dt \leq \left| \int_x^{x+h} M(h) dt \right| = M(h)|h|,$$

zaključujemo prvo da je  $\alpha(h) \leq M(h)$ , a odatle da  $\alpha(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow 0$ . Primetimo da smo pokazali da ako je  $f$  neprekidna u tački  $x \in [a, b]$  tada za  $h$  takav da je i  $x+h \in [a, b]$  važi

$$(63) \quad F(x+h) - F(x) = f(x)h + \alpha(h)h \quad \text{pri čemu } \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ kada } h \rightarrow 0.$$

Ali to znači da je funkcija  $F(x)$  diferencijabilna u tački  $x$  i da je  $F'(x) = f(x)$ .  $\square$

Neposredna posledica ove leme je sledeća Teorema.

**Teorema.** *Svaka neprekidna funkcija  $f$  na segmentu  $[a, b]$  ima na tom segmentu primitivnu funkciju, koja je oblika*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \quad \text{gde je } C \text{ neka konstanta.}$$

**5.15. Njtn-Lajbnicova (Newton-Leibniz) formula.** Ako je funkcija  $f(x)$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$  tada postoji fundamentalna veza između neodređenog i određenog integrala, koja je data sledećom teoremom.





Primena teoreme o srednjoj vrednosti za integrale na funkciju  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  i interval  $[a, b]$ , dobijamo,

$$\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+a^2} \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{odakle je nakon integracije}$$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}; \quad \text{nejednakosti su stroge jer je}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = f(\xi)(b-a) = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a), \quad \xi \in (a, b).$$

## 7. Osnovne metode integracije određenog integrala

**5.16. Smena promenljive u određenom integralu.** U ovoj tački videćemo da i za određene integrale važe analogne metode za njihovo izračunanje, kao posledica fundamentalne veze između određenog i neodređenog integrala date Njutn-Lajbnicovom formulom.

**Teorema.** Neka je  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  primitivna funkcija, neprekidne funkcije  $f(x)$  na  $[a, b]$  i neka je  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  klase  $\mathcal{C}^1[\alpha, \beta]$  takva da

(i1)  $\phi'$  ne menja znak na  $[\alpha, \beta]$  (tj. monotona je) pri čemu je  $a = \phi(\alpha)$ ,  $b = \phi(\beta)$  ako je  $\phi'(t) > 0$  (ili  $a = \phi(\beta)$ ,  $b = \phi(\alpha)$  ako je  $\phi'(t) < 0$ ).

(i2) funkcija  $f(\phi(t)) \phi'(t)$  je integrabilna na  $[\alpha, \beta]$ .

Tada je

$$(66) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

**Dokaz.** Neka je  $F$  primitivna funkcija od  $f$  na  $[a, b]$ <sup>9</sup>, i neka je  $F(\phi(t)) = \Phi(t)$ . Primitimo da je  $\Phi(t)$  primitivna funkcija od  $f(\phi(t)) \phi'(t)$ , jer je

$$\Phi'(t) = (F(\phi(t)))' = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t).$$

Koristeći sada Njutn-Lajbnicovu formulu s jedne strane imamo  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , dok je sa druge strane

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a), \quad \text{odakle}$$

$$\text{sledi} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

□

**Primeri.** Izračunajmo sledeće integrale ( $n, m \in \mathbb{N}$ ),

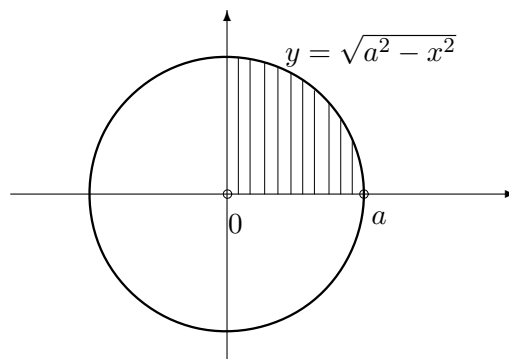
$$(i1) \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = a \sin t & 0 \rightarrow 0 \\ dx = a \cos t dt & a \rightarrow \pi/2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \phi(t) = a \sin t \text{ je} \\ \text{monotona na } [0, \pi/2] \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a \cos t = a^2 \int_0^{\phi/2} \cos^2 t dt$$

<sup>9</sup>  $F'(x) = f(x), \forall x.$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_0^{\phi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left( t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin(2t) \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{a^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin \pi - \sin 0) \right) \\
&= \frac{a^2 \pi}{4}.
\end{aligned}$$

**Geometrijski smisao.** Kako je  $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ , odakle je  $x^2 + y^2 = a^2$ . Zaključujemo da naša polazna funkcija predstavlja jednačinu kruga i ustvari tražimo površinu 1/4 tog kruga (jer je to geometrijski lik (Slika 5) koji je ograničen pravama  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$  i grafikom krive funkcije  $f(x)$ ).



**Slika 5.** Geometrijski smisao

$$\begin{aligned}
\text{(i2)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x - \sin(m-n)x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{n+m} \cos(n+m)x + \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,
\end{aligned}$$

ako je  $n - m \neq 0$ , (jer je  $\cos$  parna funkcija). Rezultat je tačan i ako je  $n - m = 0$ , proverite!

$$\text{(i3)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$\text{(i4)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \, dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

**Posledica.** Neka je  $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  integrabilna funkcija. Tada

$$\text{(i1)} \quad \text{ako je } f \text{ parna} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

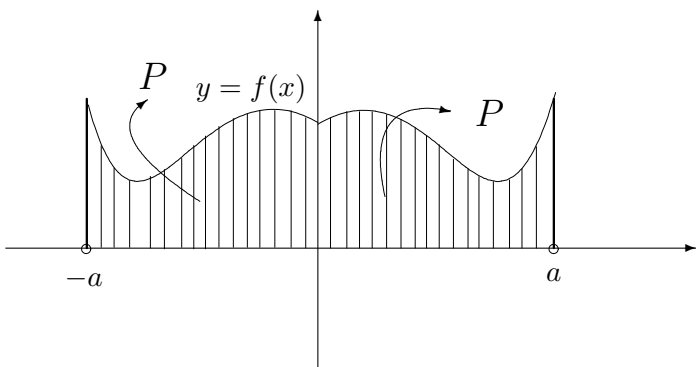
$$\text{(i2)} \quad \text{ako je } f \text{ neparna} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Ako je  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , neprekidna i periodična funkcija sa periodom  $\omega$ . Tada za svako  $a \in \mathbb{R}$ , važi

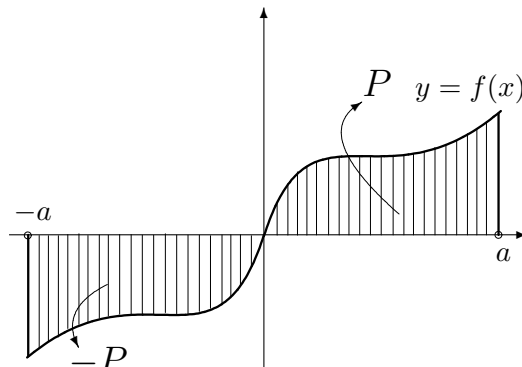
$$\int_a^{a+\omega} f(x) \, dx = \int_0^{\omega} f(x) \, dx.$$

**Dokaz.** (i1) i (i2) su jasni iz geometrijskog smisla određenog integrala kao površine omeđene pravama  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$  i grafikom krive  $y = f(x)$ .

Primetimo, iz definicije neodređenog integrala, da ta površina može biti i negativna. U slučaju (i1) figure (zbog parnosti funkcije  $f$ ) čiju površinu tražimo na  $[-a, 0]$  i  $[0, a]$  su podudarne (Slika 6) i sa iste strane  $x$ -ose pa je površina njihove unije jednaka dvostrukoj površini figure na  $[0, a]$ . Za (i2) važe iste opservacije osim što su te dve figure (zbog neparnosti funkcije  $f(x)$ ) podudarne (njihova unija je centralno simetrična s obzirom na koordinatni početak (Slika 7)), ali sa različitih strana  $x$ -ose, pa je zbir njihovih površina 0.



Slika 6. Integral i parnost funkcija



Slika 7. Integral i neparnost funkcija

U to se možemo uveriti i formalno, ako uvedemo smenu:  $x = -t$ ,  $dx = -dt$  na intervalu  $[-a, 0]$ . Pa imamo,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \begin{cases} - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt, & f \text{ parna} \\ - \int_a^0 (-) f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt, & f \text{ neparna} \end{cases} \quad \text{odakle je}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt, & f \text{ parna,} \\ 0, & f \text{ neparna,} \end{cases}$$

Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , neprekidna i periodična funkcija sa periodom  $\omega$ . Tada prvo imamo,

$$\int_{\omega}^{a+\omega} f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x - \omega \quad \phi(t) = t + \omega \quad x = a + \omega \rightarrow t = a, \\ dt = dx \quad \text{je monotona} \quad x = \omega \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} = \int_0^a f(t + \omega) dt = \int_0^a f(t) dt$$

a zatim

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_{\omega}^{a+\omega} f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\omega} f(x) dx$$

i dokaz je gotov. □

**5.17. Parcijalna integracija određenih integrala.** Sada koristeći osnovnu vezu između određenog i neodređenog integrala datu u Njutn-Lajbnicovoj formuli i metodu parcijalne integracije za neodređene integrale dobijamo njen analogon za određene integrale. Preciznije važi sledeća teorema.

**Teorema.** Neka su  $f$  i  $g$  funkcije klase  $\mathcal{C}^1$  na  $(a, b)$ . Tada važi formula

$$\int_a^b f(x) g(x)' dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Dokaz. Analogno dokazu za neodređene integrale, prvo iz Lajbnicove formule,

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

integracijom obe strane uz korišćenje Njutn-Lajbnicove formule nalazimo

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b = \int_a^b (f(x) g(x))' dx = \int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx,$$

odakle sledi formula. □

**Primer.** Izračunajmo sledeći integral,

$$\begin{aligned}
 \text{(i1)} \quad \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} f = x^2 \quad df = 2x \, dx \\ dg = \sin x \, dx \quad g = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f = x \quad df = dx \\ dg = \cos x \, dx \quad g = \sin x \end{array} \right\} = 2 \left( x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \right) \\
 &= 2 \left( \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi - 2.
 \end{aligned}$$

**5.18. Određeni integral i Tejlorova formula.** Neka je funkcija  $f$   $n$ -puta diferencijabilna u okolini tačke  $a$ . Koristeći sada metod parcijalne integracije i Njutn-Lajbnicovu formulu možemo izvesti Tejlorovu formulu sa integralnim ostatkom

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) \, dt = - \int_a^x f'(t) (x-t)' \, dt = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) \, dt = f'(a)(x-a) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_a^x f''(t)((x-t)^2)' \, dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 \, dt \\
 &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \int_a^x f'''(t)((x-t)^3)' \, dt = \dots\dots\dots \\
 &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a; x),
 \end{aligned}$$

gde je

$$(67) \quad r_{n-1}(a; x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \, dt$$

Time smo pokazali sledeće tvrđenje.

**Propozicija.** Neka funkcija  $f(t)$  ima na segmentu  $[a, x]$  neprekidne izvode do reda  $n$ , tada važi Tejlorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a; x),$$

gde je ostatak dat formulom (67).

## 8. Nesvojstveni integral

**5.19. Nesvojstveni integral I.** U ovoj tački ćemo malo proširiti pojam Rimanovog integrala na slučaj kada neka od granica nije konačna ili ako funkcija  $f$  nije definisana u nekoj tački segmenta po kojem integralimo funkciju.

Neka je funkcija  $f$  definisana na intervalu  $[a, b)$  (pri čemu  $b$  može biti i  $+\infty$ ) i integrabilna na svakom segmentu  $[a, b'] \subseteq [a, b)$ . Tada veličinu

$$(68) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{b-0} f(x) \, dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) \, dx,$$

ako limes sa desne strane jednakosti postoji, nazivamo nesvojstvenim integralom Rimana ili samo nesvojstvenim integralom funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b)$ . Slično definišemo i

nesvojstveni integral funkcije  $f$  na intervalu  $(a, b]$  (pri čemu  $a$  može biti i  $-\infty$ ), koja je integrabilna na svakom segmentu  $[a', b] \subseteq (a, b]$ , formulom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

Primetimo da ako je funkcija  $f$  integrabilna na segmentu  $[a, b]$  tada se njen integral na  $[a, b]$  podudara sa njenim nesvojstvenim integralom na  $[a, b]$ .

**Primeri.** Izračunajmo sledeće integrale,

$$(i1) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$$

kako je  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_1^b & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x \Big|_1^b & \text{za } \gamma = 1. \end{array} \right\}$  tada limes  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\gamma}$  postoji samo za  $\gamma > 1$  jer

$$\text{imamo } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\gamma} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\gamma} - 1 \right) = \frac{1}{\gamma-1},$$

a za ostale vrednosti  $\gamma$  polazni integral nije definisan.

$$(i2) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$$

kako je za  $a \in (0, 1]$ :  $\int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_a^1 & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x \Big|_a^1 & \text{za } \gamma = 1. \end{array} \right\}$  tada limes  $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma}$  postoji samo za

$$\gamma < 1, \text{ jer imamo, } \int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_a^1 = \frac{1}{1-\gamma} \left( 1 - \lim_{a \rightarrow +0} a^{1-\gamma} \right) = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Za ostale vrednosti  $\gamma$  polazni integral nije definisan.

$$(i3) \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( e^x \Big|_a^0 \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

**5.20. Svojstva nesvojstvenog integrala.** Nesvojstveni integral definisan u prethodnoj tački ima ista algebarska svojstva kao i Rimanov integral, a koja su sadržana u **Teoremi 6.12** uz neophodne modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala. Takav rezultat se mogao očekivati jer je jedina razlika između svojstvenog i nesvojstvenog integrala u traženju određenog limesa (vidi prethodnu tačku), a sam limes funkcije ima ista svojstva kao i integral (aditivnost, homogenost, dobro se ponaša prema nejednakostima).

Štaviše, uz odgovarajuće (prirodne) modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala vidi se da važe teoreme iz **6.16** o smeni promenljive u nesvojstvenom integralu i iz **6.17** o parcijalnoj integraciji nesvojstvenog integrala.

**5.21. Nesvojstveni integrali II.** U prethodnoj tački bavili smo se nesvojstvenim integralima kod kojih je problem bio u jednom od krajeva intervala, tj. u kojem je podintegralna funkcija bila neograničena ili nije bila definisana. Sada ćemo našu definiciju proširiti na slučaj kada postoji problem na oba kraja intervala i na slučaj ako podintegralna funkcija nije definisana (ili u okolini takve tačke je neograničena) u nekoj tački  $c$  intervala integracije  $[\varpi_1, \varpi_2]$ .

Dakle, posmatrajmo funkciju  $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ , pri čemu je  $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$  i  $f$  je integrabilna na segmentima  $[a, a'] \subseteq [a, c)$  i  $[c', b] \subseteq (c, b]$ . Tada pišemo

$$(69) \quad \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx = \int_{\varpi_1}^{c-0} f(x) dx + \int_{c+0}^{\varpi_2} f(x) dx \\ = \lim_{c' \rightarrow c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x) dx + \lim_{c'' \rightarrow c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x) dx ,$$

ako svaki od integrala sa desne strane jednakosti (69) postoji. Ako barem jedan od dva integrala ne postoji reći ćemo da nesvojstveni integral divergira.

**Primer.** Izračunajmo integral,

$$(i1) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^0 + \arcsin x \Big|_0^1 = \pi .$$

Sledeći primer pokazuje, da nekada postoji  $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$  takav da barem jedan od integrala sa desne strane jednakosti (69) divergira. Kako za svako  $\gamma$  barem jedan od integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} , \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\gamma} ,$$

ne postoji (ili je  $+\infty$ ), kažemo da integral  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\gamma} dx$  divergira za svako  $\gamma$ .

**Glavna vrednost integrala.** Posmatrajmo sada malo detaljnije integral (69), tada njegovu desnu stranu možemo malo drugačije zapisati

$$(70) \quad \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx = \lim_{c' \rightarrow c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x) dx + \lim_{c'' \rightarrow c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x) dx \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{c+\mu}^{\varpi_2} f(x) dx .$$

Iz poslednjeg izraza možemo zaključiti da egzistencija limesa zavisi od odnosa  $\varepsilon > 0$  i  $\mu > 0$ , pa limes ne mora postojati, kao što pokazuje sledeći primer.

**Primer.** Izračunajmo integral,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mu}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu.$$

Iz poslednje formule vidimo da limes ne postoji jer su  $\varepsilon$  i  $\mu$  proizvoljni. Ako uzmemo npr. da je  $\varepsilon = \alpha\mu$ , za neki  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  vidimo da se poslednja relacija svodi na

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \alpha \mu - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \frac{\alpha \mu}{\mu} = \ln \alpha.$$

Kako je prirodno uzeti da je  $\varepsilon = \mu$ , za ovaj izbor definišemo glavnu vrednost<sup>10</sup> nesvojstvenog integrala.

Dakle, ako za funkciju  $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ , pri čemu je  $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$ , integral  $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx$  divergira, i neka za dovoljno malo  $\varepsilon > 0$  postoje integrali  $\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx$  i  $\int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx$ . Tada ako postoji

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx \right)$$

nazivamo ga **glavnom vrednosti integrala**  $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx$ , i pišemo,

$$(71) \quad \text{v.p.} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx \right).$$

**Primeri.** Sada u smislu ove definicije imamo sledeće primere.

$$(i1) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

$$(i2) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left( \int_{-M}^0 x dx + \int_0^M x dx \right) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left( \frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2} \right) = 0.$$

## 9. Primene određenog integrala

**5.22. Primene određenog integrala.** Pojam Rimanovog integrala uveden je tako što je tražena metoda za računanje površine određene klase ravanskih figura, tj. onih ravanskih figura koje su preseki (ili se na njih mogu svesti) ravanskih figura čije su stranice grafici nekih 'dovoljno dobrih' funkcija. Time je već određena osnovna primena određenog integrala kao metoda za računanje površina. Navedimo ovde još neke primene.

**Primer.** Odrediti površinu elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , vidi Primer (i1). u **6.16**.

<sup>10</sup> glavna vrednost od francuskog *valeur principal*.

Primitimo da  $y$  možemo izraziti kao funkciju od  $x$ , kao  $y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  na intervalu  $[0, a]$ , tako da će  $\int_0^a f(x) dx$  predstavljati četvrtinu površine polazne elipse. Dakle površina elipse  $P$  biće jednaka:

$$P = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \{\text{vidi Primer (i1) u 6.16.}\} = 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 \pi}{4} = ab\pi.$$

**Dužina luka krive.** Neka je dato preslikavanje segmenta  $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  formulom  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , za  $t \in [a, b]$ . Skup  $\gamma([a, b])$  zove se **put**. Ako je  $A = \gamma(a)$  i  $B = \gamma(b)$ , kažemo da put  $\gamma$  spaja tačke  $A$  i  $B$ . Tačka  $A$  zove se početak puta, a tačka  $B$  kraj puta. Put je zatvoren ako je  $A = B$ . Ako je preslikavanje  $\gamma$  bijekcija za put kažemo da je **prost put** ili da je **parametrizovana kriva**. Put je klase glatkosti  $k$  ako su takve funkcije  $x(t), y(t)$  i  $z(t)$ , i to zapisujemo  $\gamma \in \mathcal{C}^{(k)}[a, b]$ . Ako je put prost i klase barem  $\mathcal{C}^1$  ili je po delovima takav<sup>11</sup>, možemo na put gledati kao na krivu u prostoru po kojoj se kretala materijalna tačka od trenutka  $t = a$  do trenutka  $t = b$ . Tako da možemo govoriti o dužini,  $l[t_1, t_2]$ , puta kojeg je ona prešla od trenutka  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ . Kako je za neki mali vremenski interval  $\Delta t$  tačka prešla put od neke tačke  $X$  do tačke  $X + \Delta x$ , možemo pisati  $\Delta x \approx |v(t)| \Delta t$ , gde je  $|v(t)|$  brzina tačke u trenutku  $t$ . Kako je

$$|v(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

prelaskom na limes kada  $\Delta(t) \rightarrow 0$  dobijamo da je dužina luka krive od trenutka  $t = a$  do  $t = b$  data formulom

$$(72) \quad l[a, b] = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Primitimo da analogon prethodne formule (72) važi u slučaju kada posmatramo puteve i krive u bilo kojoj dimenziji, pa tako i u dimenziji 2. Ako je kriva data kao grafik krive  $y = f(x)$  tada za parametar  $t$  možemo uzeti  $x$  i dužina luka krive je

$$l[a, b] = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \{t = x, y = f(x)\} \implies l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Primer.** Odrediti obim elipse date svojom kanonskom jednačinom  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Uzmimo standardnu parametrizaciju elipse  $x = a \sin t$  i  $y = b \cos t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , tada formula (73) postaje

$$\begin{aligned} l_{el} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \cos t)^2 + (-b \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned} \quad \text{Primitimo da je } e \text{ ekscentricitet elipse, jer je } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Integral

$$E(e, t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

<sup>11</sup> tj. možemo ga razbiti u konačan broj segmenata na kojem je  $\gamma$  diferencijabilna funkcija i njen izvod je neprekidna funkcija.



ne može se izraziti preko elementarnih funkcija i kako se javlja prilikom izračunavanja dužine elipse naziva se eliptičkim integralom druge vrste. Vrednost koju on prima za  $t = \pi/2$  zavisi samo o ekscentricitetu elipse i tada koristimo oznaku  $E(e) = E(e, \pi/2)$ . Tako smo dobili da je obim elipse jednak  $l_{ep} = 4a E(e)$ .

**Zapremina rotacionih tela.** Neka je dat grafik neke funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  na intervalu  $[a, b]$  i zamislimo da grafik rotira oko  $x$  ose, tako će nastati jedno rotaciono telo, koje možemo shvatiti kao da je sastavljeno od niza malih cilindara<sup>12</sup> visine  $\Delta x$  i čija je površina baze, površina kruga poluprečnika  $f(x)$ . Tako da je približna zapremina ovog malog cilindra  $V \approx f(x)^2 \pi \Delta x$ . Prelazeći na limes kada  $\Delta x \rightarrow 0$  i zatim integraleći po celom segmentu  $[a, b]$  dobijamo da je zapremina rotacionog tela jednaka

$$(73) \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$$

**Primer.** Odrediti zapreminu elipsoida koji nastaje rotacijom grafika elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , koji se nalazi iznad  $x$ -ose ( $y \geq 0$ ).

Primetimo da  $y$  možemo izraziti kao funkciju od  $x$ , kao  $y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  na intervalu  $[-a, a]$ , tako da primena formule (73) na ovaj primer daje

$$\begin{aligned} V_{el} &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left( \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{a^2} \pi \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{b^2}{a^2} \pi \left( 2a^3 - 2 \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4\pi b^2 a}{3} . \end{aligned}$$

Odakle dobijamo u slučaju lopte,  $a = b$ , poluprečnika  $a$  da je njena zapremina jednaka  $\frac{4\pi a^3}{3}$ .

<sup>12</sup>radi se zapravo o cilindru čije baze nisu jednake, ali za malo  $\Delta x$ , mi ga aproksimiramo pravim cilindrom.

## Literatura

1. Zorich V. A., *Matematičeskij analiz, tom 1*, Facis, 1997.
2. Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3ed, MGH 1976.
3. Fihtengol'c G. M., *Kurs diferencial'nogo i integral'nogo ischislenija*, Tom 1, 8 izd., FML, 2003.
4. N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić, *Analitička geometrija*, MF, 2003,
5. Rakić Z., *Linearna algebra (materijal)*, 2005.