Увод у математичку логику, фебруар 2016, група 102
(19. фебруар 2016)

1. а) [6 поена] Природном дедукцијом доказати

$$r \Rightarrow p \vdash (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r).$$

1.	$r \Rightarrow p$	претпоставка
2.	$(p \wedge q) \vee r$	додатна претпоставка
3.	$p \wedge q$	додатна претпоставка
4.	p	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}, 3$
5.	q	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}, 3$
6.	$q \vee r$	$\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{L}}, 5$
7.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_{\mathrm{U}}, 4, 6$
8.	r	додатна претпоставка
9.	$q \vee r$	$\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{D}}, 8$
10.	p	$\Rightarrow_{\mathrm{E}}, 8, 1$
11.	$p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_{\mathrm{U}}, 10, 9$
12.	$p \wedge (q \vee r)$	$\vee_{\mathrm{E}}, 2, 3-7, 8-11$
13.	$(p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$	$\Rightarrow_{\mathrm{U}}, 2-12$
14.	$p \wedge (q \vee r)$	додатна претпоставка
15.	p	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}, 14$
16.	$q \vee r$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}, 14$
17.	q	додатна претпоставка
18.	$p \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{U}}, 15, 17$
19.	$(p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{L}}, 18$
20.	r	додатна претпоставка
21.	$(p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{D}}, 20$
22.	$(p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{E}}, 16, 17-19, 20-21$
23.	$p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$	$\Rightarrow_{\mathrm{U}}, 14-22$
24.	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow_{\mathrm{U}}, 13, 23$

б) [6 поена] Да ли за произвољне скупове P, Q, R важи еквиваленција:

$$(P \cap Q) \cup R = P \cap (Q \cup R) \Leftrightarrow R \subseteq P?$$

Одговор детаљно образложити.

Из дела задатка под а) закључујемо да важи импликација:

$$R \subseteq P \Rightarrow (P \cap Q) \cup R = P \cap (Q \cup R).$$

Да је наведена импликација тачна може се доказати и на следећи начин.
Ако је $R \subseteq P$, онда је $P \cup R = P$, па применом дистрибутивности уније према пресеку добијамо:

$$(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R) = P \cap (Q \cup R).$$

Тачна је и обратна импликација. Заиста, ако је $(P \cap Q) \cup R = P \cap (Q \cup R)$, онда је

$$R \subseteq (P \cap Q) \cup R = P \cap (Q \cup R) \subseteq P.$$

2. Нека је R бинарни релацијски симбол.
(а) [6 поена] Природном дедукцијом доказати
$\forall x \exists y\, R(x,y), \forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big), \forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big) \vdash \forall x\, R(x,x)$.

1.	$\forall x \exists y\, R(x,y)$	претпоставка
2.	$\forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big)$	претпоставка
3.	$\forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big)$	претпоставка
4.	$\quad v$	уводимо свежу промењљиву
5.	$\quad \exists y\, R(v,y)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 1$
6.	$\qquad c \quad R(v,c)$	додатна претпоставка
7.	$\qquad \forall y\big(R(v,y) \Rightarrow R(y,v)\big)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 2$
8.	$\qquad R(v,c) \Rightarrow R(c,v)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 7$
9.	$\qquad R(c,v)$	$\Rightarrow_{\mathrm{E}}, 6, 8$
10.	$\qquad R(v,c) \wedge R(c,v)$	$\wedge_{\mathrm{U}}, 6, 9$
11.	$\qquad \forall y \forall z\big(R(v,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(v,z)\big)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 3$
12.	$\qquad \forall z\big(R(v,c) \wedge R(c,z) \Rightarrow R(v,z)\big)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 11$
13.	$\qquad R(v,c) \wedge R(c,v) \Rightarrow R(v,v)$	$\forall_{\mathrm{E}}, 12$
14.	$\qquad R(v,v)$	$\Rightarrow_{\mathrm{U}}, 10, 13$
15.	$\quad R(v,v)$	$\exists_{\mathrm{E}}, 5, 6-14$
16.	$\forall x\, R(x,x)$	$\forall_{\mathrm{U}}, 4-15$

(б) [6 поена] Конструисати контрамодел формуле

$$\forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big) \wedge \forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big) \Rightarrow \forall x\, R(x,x).$$

Потребно је дефинисати бинарну релацију неког скупа која је симетрична и транзитивна али није рефлексивна.
На пример, дефинишимо релацију $R^{\mathbb{Z}}$ на скупу целих бројева $\mathbb{Z}$: за све $x, y \in \mathbb{Z}$

$$xR^{\mathbb{Z}}y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x > 0 \wedge y > 0.$$

$(\mathbb{Z}, R^{\mathbb{Z}}) \vDash \forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big)$, јер је $R^{\mathbb{Z}}$ симетрична релација: за све $x, y \in \mathbb{Z}$
$xR^{\mathbb{Z}}y \Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow yR^{\mathbb{Z}}x$.
$(\mathbb{Z}, R^{\mathbb{Z}}) \vDash \forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big)$, јер је $R^{\mathbb{Z}}$ транзитивна релација: за све $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} xR^{\mathbb{Z}}y \wedge yR^{\mathbb{Z}}z &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \wedge (y > 0 \wedge z > 0) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \\ &\Rightarrow x > 0 \wedge z > 0 \\ &\Leftrightarrow xR^{\mathbb{Z}}z. \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}, R^{\mathbb{Z}}) \nvDash \forall x\, R(x,x)$, јер $R^{\mathbb{Z}}$ није рефлексивна релација: на пример, $(-1,-1) \notin R^{\mathbb{Z}}$.

Дакле,

$$(\mathbb{Z}, R^{\mathbb{Z}}) \nvDash \forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big) \wedge \forall x \forall y \forall z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)\big) \Rightarrow \forall x\, R(x,x).$$

3. [12 поена] Нека су $f : X \to X$ и $g : X \to X$ две 1-1 функције. Ако важи

$$(\forall x \in X)(f(x) = x \vee g(x) = x),$$

доказати да је $f \circ g = g \circ f$.

Треба доказати да за свако x из X важи $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$.
Нека је x из X произвољан. Тада је $f(x) = x$ **или** $g(x) = x$, па разликујемо два случаја.

1. случај: $f(x) = x$. Тада је $g\big(f(x)\big) = g(x)$.
Како је $g(x)$ елемент из X, према претпоставци важи $f\big(g(x)\big) = g(x)$ **или** $g\big(g(x)\big) = g(x)$.

1.1. случај: $f\big(g(x)\big) = g(x)$. У овом подслучају непосредно закључујемо да је

$$f\big(g(x)\big) = g(x) = g\big(f(x)\big).$$

1.2. случај: $g\big(g(x)\big) = g(x)$. Како је g 1-1 функција, мора бити $g(x) = x$, па је

$$f\big(g(x)\big) = f(x) = x = g(x) = g\big(f(x)\big).$$

Дакле, важи $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$.

2. случај: $g(x) = x$. Доказ да и у овом случају важи $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$ потпуно је аналоган претходном, с тим што f и g „мењају улоге“.

4. Низ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисан је следећим једнакостима:

$$f_0 = f_1 = 1,$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 0.$$

(а) [6 поена] Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $f_n \leq 1{,}7^n$.

БИ $\quad f_0 = 1 \leq 1{,}7^0$, $f_1 = 1 \leq 1{,}7^1$

ИК

ИП $\quad f_n \leq 1{,}7^n$, $f_{n+1} \leq 1{,}7^{n+1}$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \overset{\text{ИП}}{\leq} 1{,}7^{n+1} + 1{,}7^n = (1{,}7 + 1) \cdot 1{,}7^n = 2{,}7 \cdot 1{,}7^n \leq 1{,}7^2 \cdot 1{,}7^n = 1{,}7^{n+2}$$

(б) [6 поена] Да ли постоји реалан број r мањи од $1{,}7$ такав да за сваки природан број n важи неједнакост $f_n \leq r^n$? Одговор детаљно образложити.

Из доказа дела задатка под а) закључујемо да ће нам доказ математичком индукцијом „проћи“ и за сваки реалан број r који задовољава услове: $1 \leq r^0$, $1 \leq r^1$, $r + 1 \leq r^2$. Дакле, треба испитати да ли постоји реални број r такав да је $1 \leq r < 1{,}7$ и $r^2 - r - 1 \geq 0$. Скуп позитивних решења квадратне неједначине $r^2 - r - 1 \geq 0$ једнак је $[r_0, +\infty)$, где је $r_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Како је $1 \leq r_0 < 1{,}7$ ($\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 1{,}7 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 2{,}4$), тражени број је било који реалан број између r_0 и $1{,}7$ (на пример, $1{,}62$, јер је $r_0 \approx 1{,}6180339887 \ldots$).

5. На скупу $S = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$ дефинисана је релација ρ са:

$$a \ \rho \ b \text{ акко } (a+1)b^2 = (b+1)a^2.$$

(а) **[8 поена]** Доказати да је ρ релација еквиваленције на скупу S.

Релација ρ јесте такозвано **језгро** функције $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$:

$$a \ \rho \ b \text{ акко } f(a) = f(b).$$

Доказ да је ρ релација еквивеланције следи директно из одговарајућих особина једнакости.

(Р) Ако је $a \in S$ произвољан, тада $a \ \rho \ a$, јер је $f(a) = f(a)$ (једнакост је рефлексивна).
(С) За произвољне $a, b \in S$, из $a \ \rho \ b$, следи $f(a) = f(b)$, тј. $f(b) = f(a)$ (једнакост је симетрична), па је $b \ \rho \ a$.
(Т) За произвољне $a, b, c \in S$, из $a \ \rho \ b$ и $b \ \rho \ c$ следи $f(a) = f(b)$ и $f(b) = f(c)$. Како је једнакост транзитивна, закључујемо да је $f(a) = f(c)$, односно $a \ \rho \ c$.

(б) **[4 поена]** Одредити класе еквиваленције.

Класе еквиваленције које одређује језгро функције $f : S \to \mathbb{R}$ јесу скупови $f^{-1}[\{x\}]$, $x \in f[S]$. Како је S коначан скуп који има само шест елемената, тражене класе је најједноставније одредити помоћу следеће табеле.

x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{x^2}{x+1}$	$\frac{3}{4}$	2	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{16}$

Истој класи еквиваленције припадају сви елементи из S чије су f-слике једнаке:

$\left[-\frac{2}{3}\right]_\rho = [2]_\rho = \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}, \left[-\frac{1}{2}\right]_\rho = [1]_\rho = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}, [3]_\rho = \{3\}, [4]_\rho = \{4\}.$