Збирка задатака из математичке анализе са испитних рокова

Предговор

Ову збирку задатака посвећујемо свим студентима Математичког факултета. Наш циљ је да помогнемо нашим студентима да лакше савладају елементарне и сложене проблеме из области Математичка Анализа. У њој смо се трудили да што детаљније изложимо методе решавања задатака са колоквијума и испитних рокова који су се задавали у последњих пар година на Математичком факултету. Не желимо да пропустимо прилику да се захвалимо колеги Драгану Ђокићу и Димитрију Шпадијеру, сарадницима у настави, на корисним сугестијама у раду.

Владимир Јаковљевић, сарадник у настави

Петар Мелентијевић, асистент

1 Анализа 1 - смер Информатика

1.1 Први Колоквијум из Анализе 1, И смер

18.04.2015.

1. [4] Доказати да за све природне бројеве n важи

$$2 + 7 + 14 + ... + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 1)$$

Тежина задатка [3]

Решење : Задатак нема неку тежину што се тиче идејног дела. Чим је дата десна страна као понуђено решење, треба да докажемо да је то понуђено решење тачно. Ствар би била доста тежа да леву страну треба да израчунамо, односно да нам није понуђено са десне стране колика би могла да буде сума на левој страни у задатку. Овако, математичка индукција се сама намеће као инструмент за решавање задатка. Пошто смо одабрали методу рада, остаје само технички део посла.

1. База индукције: Питамо се да ли понуђена једнакост важи у случају $n = 1$. Кренули смо од $n = 1$, јер је потребно доказати да важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

$$n = 1$$

$$2 = \frac{1}{6}(2 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1) = \frac{12}{6} = 2$$

Важи база индукције.

2. Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да једнакост важи за све $k \leq n, k \in N$, где је n било који природан број (овде се лежерно приступа и обично пише: Претпоставимо да једнакост важи за било који природан број n). Треба показати да једнакост важи и за $n+1$. Тиме индукција продире кроз све природне бројеве, јер се поступак може поновити и за $n+1$, па онда за $n+2$ и тако даље, похватаћемо све природне бројеве и доказати да важи тражена једнакост, а све то смо могли јер је за почетно $n = 1$ доказано да једнакост важи, па имамо одакле и да кренемо са индуктивним доказом. Овај принцип би требало да свима буде интуитивно схватљив.

3. Индукцијски корак: На овом месту треба доказати да једнакост важи за $n+1$, под претпоставком да иста једнакост важи за свако $k < n+1, k \in \mathbb{N}$. Са десне стране имамо

$$\frac{n+1}{6}(2(n+1)^2+9(n+1)+1) = \frac{n}{6}(2(n+1)^2+9(n+1)+1)+\frac{1}{6}(2(n+1)^2+9(n+1)+1) =$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2+4n+2+9n+9+1)+\frac{1}{6}(2n^2+4n+2+9n+9+1) = \frac{n^3}{3}+\frac{13n^2}{6}+\frac{12n}{6}+\frac{n^2}{3}+\frac{13n}{6}+2 =$$

$$= \frac{n^3}{3}+\frac{15n^2}{6}+\frac{25n}{6}+2$$

Намерно смо разложили израз са десне стране експлицитно по степенима јер ћемо то урадити сада и са левом страном. Доказ је завршен ако добијамо исте полиноме у оба случаја.

$$2+7+14+...+(n^2+2n-1)+((n+1)^2+2(n+1)-1) = [i.h.]$$

$$\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)+((n+1)^2+2(n+1)-1) = \frac{n^3}{3}+\frac{9n^2}{6}+\frac{n}{6}+n^2+2n+1+2n+2-1 =$$

$$= n^3+\frac{15n^2}{6}+\frac{25n}{6}+2 \qquad \square$$

2. Испитати да ли је број

$$x = 2.1464646...$$

рационалан, и у случају да јесте, написати га у облику разломка.

Тежина задатка [4]

Решење : Задатак има тежину у идеји. Ако се досетимо идеје, технички је једноставан. Једна од добрих идеја је да множимо број x редом са 10, са 100, 1000 итд. па да видимо шта ће се десити.

$$10x = 21.464646...$$

$$100x = 214.64646...$$

$$1000x = 2146.4646...$$

Приметимо да $10x$ и $1000x$ у разломљеном делу оба имају исто : 0.4646.... Ако их одузмемо то је онда цео број.

$$1000x - 10x = 990x = 2146.4646... - 21.4646... = 2125$$

Дакле

$$x = \frac{2125}{990} \qquad \square$$

3. Одредити следеће граничне вредности

а) [1]

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$$

b) [1]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sin\frac{2n!\pi}{3}}{n+1}$$

Тежина задатка [2]

Решење : Свако ко је био на неким вежбама из анализе не би требало да се превише мучи са овим задатком. Ово је један потпуно технички задатак.

а)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2-2-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{6}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}} = \left[smena : t = \frac{3n+2}{6} \Rightarrow n = \frac{6t-2}{3}\right]\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{t(\frac{6t-2+3}{3})}{3t}} =$$

$$[Po \;\; definiciji \;\; broja \;\; e]\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{6t+1}{3\cdot 3t}} =$$

$$[neprekidnost \;\; ekspononcijalne \;\; funkcije]e^{\lim_{t\to+\infty}\frac{6t+1}{9t}} = e^{\frac{2}{3}}$$

б) Приметимо да је бројилац ограничена функција, тј. $|3\sin\frac{2n!\pi}{3}| \leq 3$,а именилац тежи $+\infty$. Самим тим је

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} |\frac{3\sin\frac{2n!\pi}{3}}{n+1}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|3\sin\frac{2n!\pi}{3}|}{|n+1|} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Самим тим низ апсолутно конвергира ка нули, по теореми о два полицајца.

Теорема: Ако низ апсолутно конвергира ка нули у простору $\mathbb{R}$, тада он и обично конвергира ка нули у $\mathbb{R}$.

Математички записано

$$\forall (a_n)_{n=1}^{+\infty} : \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Из претходне теореме је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin\frac{2n!\pi}{3}}{n+1} = 0$$

односно низ и обично конвергира ка нули што је требало израчунати. $\square$

4. а) [2] Одредити све тачке нагомилавања низа

$$a_n = \frac{n}{n+1} + \cos\frac{2n\pi}{3}$$

б) [1] Испитати да ли је низ a_n конвергентан.

Тежина задатка [4]

Решење : а)Како је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

тај део низа ће бити конвергентан. Остаје да се позабавимо са поднизовима које прави израз $\cos\frac{2n\pi}{3}$.

$$n = 1 \Rightarrow \cos\frac{2\cdot 1\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow \cos\frac{2\cdot 2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow \cos\frac{2\cdot 3\pi}{3} = 1$$
$$n = 4 \Rightarrow \cos\frac{2\cdot 4\pi}{3} = \cos\frac{2\cdot 1\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

и на даље се вредности периодично понављају. Дакле, закључујемо да имамо два конвергентна подниза: Први подниз је за $n \neq 3k, k \in \mathbb{N}$, и његов лимес је

$$\lim_{n\to+\infty}\big[n \neq 3k, k \in \mathbb{N}\big](\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Вредност косинуса смо заменили у лимесу одмах. Други подниз који конвергира је за $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, и његов лимес је

$$\lim_{n\to+\infty}\big[n = 3k, k \in \mathbb{N}\big](\frac{n}{n+1} + 1) = 1 + 1 = 2$$

и овде смо опет мењали вредност косинуса одмах.
Закључујемо да су тачке нагомилавања низа $\frac{1}{2}$ и 2.

б) Наравно да низ није конвергентан јер има две тачке нагомилавања, док конвергентан низ може имати само једну тачку нагомилавања која припада $\mathbb{R}$.

2 Анализа 2 - смер Информатика

2.1 Писмени испит из Анализе 2, И смер

03.02.2016.

Решење : 1. Израчунати неодређени интеграл $\int \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+x-1}dx$

Тежина задатка [4]

Користимо методу парцијалних разломака, односно на тај начин желимо да представимо подинтегралну функцију.

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x - 2)(x + 1) + 3x + 3$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 2} = x + 1 + 3\frac{x + 1}{x^2 + x - 2}$$

$$\frac{x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Нема потребе да у бројиоцу иде већи степен од нултог, подсетите се зашто.

$$\Rightarrow x + 1 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

Систем је

$$A + B = 1$$

$$2A - B = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$$

па је

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 + x - 1}dx = \int (x + 1)dx + 3\left(\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1| + log|x+2| + c \qquad \square$$

2. Да ли је оправдано увести смену $t = x^4$ (подразумева се на целом интервалу интеграције) у интегралу $\int_{-1}^{1}(x^4 + sin(x^4))dx$?

Тежина задатка [3]

Решење : Није оправдано јер x^4 није монотона на $[-1,1]$. Увођењем те смене добили бисмо да границе иду од 1 до 1 што значи да је овај интеграл нула. Међутим подинтегрална функција је позитивна и није нула функција и још је непрекидна тако да је интеграл у задатку сигурно већи од нуле. Добили смо контрадикцију. $\square$

3. Израчунати вредност несвојственог интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}e^{-e^x}dx$ или доказати да дивергира.

Тежина задатка [5]

Решење :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}e^{-e^x}dx = \left[e^x = t, monotona\ \ na(-\infty,+\infty), e^x dx = dt\right]$$

$$\int_{0}^{+\infty} t^2e^{-t}dt = \left[du = e^{-t}dt, v = t^2\right] - e^{-t}t^2\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-t}dt =$$

$$\left[du = e^{-t}dt, v = 2t\right] 0 - e^{-t}2t\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-t}dt = 0 - 2e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 2 \qquad \square$$

4. Одредити дужину криве $y = \ln(\sin x)$ на интервалу $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Тежина задатка [5]

Решење : Дужина криве на задатом интервалу је

$$l = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+(y')^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$y' = (\log(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cos x = \coth x$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+(\frac{\cos x}{\sin x})^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{sin^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\left[sinus\ pozitivan\ na\ oblasti\ integracije\right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} =$$

$$\begin{bmatrix} t = tan(\frac{x}{2}) \\ x = 2arctan(t) \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} == 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}(\cos\frac{x}{2})^2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)} = \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{dt}{t} = \log t\Big|_{\tan\frac{\pi}{8}}^{1} =$$

$$= -\log\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$$

Како је $\tan(\frac{\pi}{8}) < 1$, добијамо да је $\log\left(\tan\frac{\pi}{8}\right) < 0$, тако да смо на крају добили позитиван број, чисто да се уверимо да наше решење није контрадикторно. □

5. Испитати конвергенцију следећих редова:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln 2)^2$;

б) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$;

в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(e+\frac{1}{n}\right)^n n^2}{3^n \ln n}$;

г)$\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln 2)^2$;

Тежина задатка [5]

Решење :
а) Овде је у питању Геометријски ред. Геометријски ред конвергира ако и само ако $|q| < 1$. Овде је $|q| = |log 2| < 1$, па ред конвергира. $\square$

б)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

јер је $n > \ln n$ за $n \geq 2$. Како је ред са десне стране неједнакости дивергентан, односно његова сума је $+\infty$, по поредбеном критеријуму је и задати ред у задатку дивергентан. $\square$

в)Према Кошијевом кореном критеријуму је

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{e + \frac{1}{n}}{3} \cdot \frac{(n^2)^{\frac{1}{n}}}{(\log n)^{\frac{1}{n}}} \to \frac{e}{3} < 1$$

када $n \to +\infty$. Стога посматрани ред конвергира.$\square$ г) Даламберов критеријум даје:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!}{(2n+3)!5^n(n!)^2} = \frac{5(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \to \frac{5}{4}, n \to +\infty$$

па посматрани ред дивергира.$\square$

6. За низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи $a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ и $a_{2n} = \frac{1}{n}$, за све $n \in \mathbb{N}$.

а) Да ли се применом Лајбницовог критеријума може закључити да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира?

б) Да ли се применом Лајбницовог критеријума може закључити да ред $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ конвергира?

Тежина задатка [3]

Решење :
а) Не, јер се Лајбницов критеријум користи за алтернирајуће редове. $\square$

б) a_n не тежи монотоно нули јер је $a_{2n-1} = \frac{1}{2n} < a_{2n} = \frac{1}{n}$,па се ни овде не може применити Лајбницом критеријум. $\square$

7. Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{4n}}{4^{n^2}} x^n$.

Тежина задатка [3]

Решење : Коши-Адамарова формула даје

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(a_n)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{n^4}{4^n}} = +\infty$$

па овај степени ред конвергира на целом $\mathbb{R}$.

8.а) Нека је m цео број. Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi} \cos{(mx)} dx$.
б) Развити у Фуријеов ред 2π-периодичну функцију $f(x) = \cos{(2015x)} + \sin{(2016x)}$.

Тежина задатка [2]

Решење :
а)

$$\int -\pi^{\pi} \cos(mx) dx = \frac{\sin mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

за $m \neq 0$, док је за $m = 0$,

$\int -\pi^{\pi} \cos(x) dx = \int -\pi^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi$

3 Анализа 1Б

3.1 Писмени испит из Анализе 1Б

18.09.2015.

1. Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$

Тежина задатка [4]

Решење : Идеја је да подинтегралну функцију напишемо мало компактније и то у облику парцијалних разломака.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{x^2+9}$$

Можете покушати да у бројиоцу покушате са полиномима нултог степена, али ми овде желимо више да рачунамо, а мање да ризикујемо,па смо подигли степен тако да не можемо да промашимо, што топло саветујемо и вама.

$$\Rightarrow 1 = (Ax+B)(x^2+4)(x^2+9)+(Cx+D)(x^2+1)(x^2+9)+(Ex+F)(x^2+1)(x^2+4) =$$
$$= (Ax+B)(x^4+13x^2+36)+(Cx+D)(x^4+10x^2+9)+(Ex+F)(x^4+5x^2+4) =$$
$$= x^5(A+C+E)+x^4(B+D+F)+x^3(13A+10C+5E)+x^2(13B+10D+5F)+$$
$$+x(36A+9C+4E)+(36B+9D+4F)$$

На основу овога имамо следеће системе:

$$A+C+E=0 \qquad (1)$$

$$13A+10C+5E=0 \qquad (2)$$

$$36A + 9C + 4E = 0 \qquad (3)$$

и

$$B + D + F = 0 \qquad (1)$$

$$13B + 10D + 5F = 0 \qquad (2)$$

$$36B + 9D + 4F = 1 \qquad (3)$$

Студентима препуштамо да се подсете елементарне линеарне алгебре и утврде да је решење првог система $A = C = E = 0$.
Што се тиче другог система ако извшимо елементарну трансформацију $(2) - (1) - (3)$. Добијамо да је

$$-24B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{24}$$

Стога, (1) и (2) сада дају да је

$$D + F = -\frac{1}{24}[cela\ \ jednacina \cdot 5] \qquad \Rightarrow 5D + 5F = -\frac{5}{24}$$

$$10D + 5F = -\frac{13}{24}$$

па је

$$5D = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3} \Rightarrow D = -\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow F = -B - D = \frac{1}{14} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}$$

Дакле, решење овог система је $B = \frac{1}{24}, D = -\frac{1}{15}, F = \frac{1}{40}$.

Означимо интеграл који рачунамо са $\mathbb{I}$. Добијамо да је

$$\mathbb{I} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{15}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} + \frac{1}{40}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$$

Израчунајмо сада следећи интеграл

$$\mathbb{J} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}\arctan\frac{x}{\lambda}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\lambda}$$

Стога је

$$\mathbb{I} = \frac{1}{24}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{40}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{240}(5 - 4 + 1) = \frac{\pi}{120}$$

$\square$

2. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{4 \cdot 11 \cdot ... \cdot (2n^2+n+1)}$$

Тежина задатка [5]

Решење : Пошто нам је општи члан реда a_n дат у облику производа и то без икаквих збирова посматрајмо количник

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n \cdot (n!)^2 \cdot 4 \cdot 11 ... \cdot (2n^2+n+1(2(n+1)^2+n+2))}{4 \cdot 11 \cdot ... \cdot (2n^2+n+1)2^{n+1}((n+1)!)^2} =$$

$$= \frac{2n^2+5n+4}{2(n+1)^2} = \frac{2n^2+5n+4}{2n^2+4n+2} = 1 + \frac{n+2}{2n^2+4n+2} = 1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

По Гаусовом критеријуму ред дивергира. $\square$

3. a) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција и строго опадајућа функција, таква да је $f(a) = b$ и $f(b) = a$. Ако је g инверзна функција за функцију f, доказати да је

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

б) Доказати да је

$$\int_0^1 (1-x^p)^{\frac{1}{q}} dx = \int_0^1 (1-x^q)^{\frac{1}{p}} dx$$

за све $p, q > 0$.

Тежина задатка [7]

Решење : Ако је f непрекидно диференцијабилна и стого опадајућа функција, тада је њен извод негативан и на $[a,b]$ ограничен негативном бројем, па одатле следи да је $f'(x) \neq 0$ (није тешко доказати да ако је $f'(x_0) = 0, x_0 \in [a,b] \Rightarrow f$ није строго опадајућа на $[a,b]$, покушајте сами да мало вежбате, а ако не иде пишите да окачимо и то). Инверзна функција је тада диференцијабилна и важи

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f(x)}, \qquad \forall x \in [a,b]$$

Увођењем смене $t = f(x)$ имамо

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[t = f(x) \Rightarrow$$

$$x = f^{-1}(t) = g(t), dx = g'(t)dt \quad i \quad f(a) = b, f(b) = a\Big] \int_b^a tg'(t)dt =$$

$$= tg(t)\Big|_b^a - \int_b^a g(t)dt = ag(a) - bg(b) + \int_a^b g(t)dt = ab - ba + \int_a^b g(t)dt = \int_a^b g(x)dx$$

што је требало доказати. $\square$ б) Ако је $f(x) = (1-x^p)^{\frac{1}{q}}$, тада f строго опада на $[0,1], f(0) = 1, f(1) = 0$ и

$$f(x)^q = 1 - x^p \Rightarrow x = (1 - f(x)^q)^{\frac{1}{p}}$$

па је $g(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{p}}$ па применом дела под а) добијамо и тврђење под б). $\square$

4. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интеграбилна на сваком сегменту реалне праве, при чему је $\int_0^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{n}f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је f константна функција.

Тежина задатка [9]

Решење : Из дате једначине следи

$$\int_0^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{n}f(x)$$

па је

$$\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt = \frac{1}{n}f(x) \qquad (1)$$

Функција са леве стране претходне једнакости је непрекидна. То се доказује на следећи начин

$$\Big|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\Big| \to 0,$$

када $\delta \to 0$ из разлога пошто је f интеграбилна на сваком сегменту на $\mathbb{R}$, па малопређашња разлика нема куда осим у нулу, што је некако и

логично. Ово мало подсећа на Кошијев критеријум, односно доказ је сличан, а ви мало вежбајте па пробајте да докажете. У сваком случају овај закључак је један од битних. Онда мора и функција са десне стране да буде непрекидна. Сада је $\int_x^{x+\frac{1}{n}}$ и диференцијабилна као интеграл непрекидне! Коначно и f онда мора бити диференцијабилна јер је са десне стране једначине (1).
Диференцирањем једначине (1) добијамо

$$f(x+\frac{1}{n})-f(x)=\frac{1}{n}f'(x)$$

Опет користимо сада да је лева страна диференцијабилна, па мора да буде и десна. Стога поновним диференцирањем је

$$f'(x+\frac{1}{n})-f(x)=\frac{1}{n}f''(x)$$

Даље је истим закључком f'' диференцијабилна, па на основу Лагранжове теореме

$$f(x+\frac{1}{n})-f(x)=\frac{1}{n}f(c_n), \qquad c_n\in(x,x+\frac{1}{n})$$

па је на основу претходног

$$f'(c_n)=f(x)$$

Још једна примена Лагранжове теореме даје

$$f(x)-f(c_n)=(c_n-x)f''(d_n)$$

$$\Rightarrow f''(dn)=0$$

за неко $d_n\in(x,c_n)$.
Пуштајући да $n\to\infty$ добијамо да $c_n\to x$ и $d_n\to x$ па је и

$$f''(x)=0$$

јер је и f'' непрекидна. Решавањем ове једноставне диференцијалне једначине следи да је

$$f(x)=ax+b$$

Заменом добијамо да је

$$\int_0^{x+\frac{1}{n}}f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{n}f(x)$$

односно
$$= \frac{a}{2}(x+\frac{1}{n})^2 + b(x+\frac{1}{n}) = \frac{a}{2}x^2 + bx + \frac{ax+b}{n}$$
па је
$$\frac{a}{2n^2} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$
Стога је $a = 0$, па је f константна. $\square$

3.2 Писмени испит из Анализе 1Б

21.01.2016.

1. Испитати конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{1}{n}\int_n^{n+1}\cos x^2 dx$

б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+e^{-n}}}$

Тежина задатка [5]

Решење :
а)Означимо са $a_n = \cos\frac{1}{n}$, $b_n = \int_n^{n+1}\cos x^2 dx$. Низ a_n је монотон, јер је $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, а $\frac{1}{n} \in (0,1)$ и монотоност косинуса (опадање) даје, $\cos\frac{1}{n} < \cos\frac{1}{n+1}$, тј. $a_n < a_{n+1}$. Такође, $0 < a_n < 1$, па можемо закључити да је a_n монотон и ограничен.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\cos x^2 dx = \int_1^{+\infty}\cos x^2 dx =$$
$$\begin{bmatrix} x^2 = t \\ x = (t)^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{dt}{2(t)^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$
$$= \int_1^{+\infty}\frac{\cos t dt}{2(t)^{\frac{1}{2}}}$$

Последњи интеграл конвергира по Дирихлеовом критеријуму јер $\frac{1}{2(t)^{\frac{1}{2}}}$ монотоно тежи нули када идемо у $+\infty$ и глатка је на $[1, +\infty)$, а $\cos t$ има ограничену примитивну функцију и непрекидна је на $[1, +\infty)$.

Дакле, имамо да је a_n монотон и ограничен, а $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергира, па је по Абеловом критеријуму $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ конвергентан. $\square$

б)

$$\frac{\frac{1}{n^{1+e^{-n}}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{e^{-n}}} \to 1, n \to +\infty$$

јер је

$$\lim_{n\to+\infty} n^{e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{e^{-n}\log n} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{e^n}} = e^0 = 1$$

па је посматрани ред еквинконвергентан са редом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

што значи да S дивергира. $\square$

2. Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+9)}$