

## Задаци - Теорија вероватноћа

1. Дата је квадратна једначина

$$x^2 - bx + c = 0. \quad (1)$$

Нека је  $b = b_n = \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , а  $c$  случајна величина са  $\mathcal{U}[0, 1]$  расподелом. Нека је догађај  $A_n$  задат на следећи начин:

$A_n$ : једначина (1) има реална решења.

Израчунати  $P(A_n)$  и  $P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$ .

2. Нека је  $\Omega = [0, 1]$  јединични интервал и  $\mathcal{F}$  колекција свих његових подскупова  $A$  таквих да је или  $A$  или  $A^c$  коначан, а скуповна функција  $P$  на  $\mathcal{F}$  дефинисана је са:  $P(A) = 0$ , ако је  $A$  коначан скуп, односно  $P(A) = 1$ , ако је  $A^c$  коначан скуп. Испитати да ли је:

- $\mathcal{F}$  алгебра
- $\mathcal{F}$   $\sigma$ -алгебра
- $P$  коначно адитивна скуповна функција
- $P$  пребројиво адитивна скуповна функција?

3. Дат је простор вероватноћа  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , где је  $\Omega$  сегмент  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  је одговарајућа Борелова  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_{[0,1]}$  а  $P$  је Лебегова мера. Одредити  $\sigma$ -алгебру генерисану случајном величином  $X$ , датом са:

$$\text{а) } X(\omega) = \begin{cases} 0.25, & \text{за } \omega \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ 0.5, & \text{за } \omega \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ 1, & \text{за } \omega \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

$$\text{б) } X(\omega) = \frac{\omega}{2}$$

$$\text{в) } X(\omega) = \frac{1}{2}.$$

4. Проверити које од следећих функција јесу функције расподела вероватноћа:

$$\text{а) } F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{б) } F(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{в) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x < 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ако је } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{г) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{ако је } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x < 0, \\ 1 - q^{n+1}, & \text{ако је } x \geq 0, n = [x], 0 < q < 1. \end{cases}$$

5. а) Одредити за које вредности параметра  $C$ , односно других непознатих параметара, су следеће функције густине расподеле вероватноћа:

$$\circ f(x) = C(x(1-x))^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < x < 1$$

$$\circ f(x) = Cx^\alpha e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\circ f(x) = C|x-a|, \quad x \in [b, c].$$

- б) Случајна величина  $Y$  има густину расподеле вероватноћа  $g$ , дату са  $g(y) = C(y-y^2)$ , за  $\alpha < y < \beta$  и  $C > 0$ . Одредити које су могуће вредности за  $\alpha$  и  $\beta$  и чему је једнако  $C$ .