1 Milnova ocena greške

Milnova ocena greške važi za prediktor–korektor metode kod kojih je lokalna greška prediktora i korektora istog reda. Neka je prediktor metode dobijen eksplicitnom formulom

$$a_0^* u_{j+1}^* + \sum_{i=1}^{n} a_i^* u_{j+1-i} - h \sum_{i=1}^{n} b_i^* f_{j+1-i} = 0 \tag{1}$$

dok se za korektor koristi implicitna formula

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u_{j+1-i} - h \sum_{i=0}^{n} b_i f_{j+1-i} = 0 \tag{2}$$

u kojoj uzimamo da je $f_{j+1} = f(x_{j+1}, u_{j+1}^*)$.

Neka su lokalne greške prediktora i korektora istog reda $p+1$, što znači da za svaku dovoljno glatku funkciju $z(x)$ važi

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^* z(x_{j+1-i}) - h \sum_{i=1}^{n} b_i^* z'(x_{j+1-i}) = C_{p+1}^* z^{(p+1)}(x_{j+1}) h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{3}$$

i

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z(x_{j+1-i}) - h \sum_{i=0}^{n} b_i z'(x_{j+1-i}) = C_{p+1} z^{(p+1)}(x_{j+1}) h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{4}$$

Radi dobijanja lokalne greške metode, pretpostavimo da se sve osim poslednje vrednosti u_i poklapaju sa tačnim rešenjem $u(x)$, i uzmimo da je $z \equiv u$. Iz (1) i (3) se dobija

$$a_0^*(u(x_{j+1}) - u_{j+1}^*) = C_{p+1}^* u^{(p+1)}(x_{j+1}) h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{5}$$

a iz (2) i (4)

$$\begin{aligned} a_0(u(x_{j+1}) - u_{j+1}) - h b_0 (f(x_{j+1}, u(x_{j+1})) - f(x_{j+1}, u_{j+1}^*)) \\ = C_{p+1} u^{(p+1)}(x_{j+1}) h^{p+1} + O(h^{p+2}) \ . \end{aligned}$$

Koristeći teoremu o srednjoj vrednosti dobijamo da je

$$f(x_{j+1}, u(x_{j+1})) - f(x_{j+1}, u_{j+1}^*) = J(x_{j+1})(u(x_{j+1}) - u_{j+1}^*) = O(h^{p+1})$$

gde je $J(x_{j+1}) = [\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x_{j+1}, \xi_i)]$ Jakobijeva matrica pa će, zbog dodatnog množenja ove razlike sa h, biti

$$a_0(u(x_{j+1}) - u_{j+1}) = C_{p+1} u^{(p+1)}(x_{j+1}) h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{6}$$

Iz (5) i (6) se dobija nepoznata vrednost izvoda

$$u^{(p+1)}(x_{j+1}) = h^{-(p+1)} \left(\frac{C_{p+1}^*}{a_o^*} - \frac{C_{p+1}}{a_o} \right)^{-1} (u_{j+1} - u_{j+1}^*) + O(h)$$

pa zamenom u (6) dobijamo Milnovu ocenu greške

$$a_0(u(x_{j+1}) - u_{j+1}) = C_{p+1} \left(\frac{C_{p+1}^*}{a_o^*} - \frac{C_{p+1}}{a_o} \right)^{-1} (u_{j+1} - u_{j+1}^*) + O(h^{p+2}) \ . \tag{7}$$

2 Adamsove metode

Adamsove metode se baziraju na jednakosti

$$u(x_{j+1}) - u(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(t)\,dt = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t, u(t))\,dt \tag{8}$$

u kojoj se funkcija f aproksimira interpolacionim polinomom.

2.1 Eksplicitne Adamsove metode

Ukoliko se za čvorove interpolacije uzmu tačke $x_{j-n}, \ldots, x_j$, aproksimacija integrala u (8) se svodi na linearnu kombinaciju poznatih vrednosti $f_{j-n}, \ldots, f_j$, pa dobijamo eksplicitnu formulu

$$u_{j+1} - u_j = h \sum_{i=0}^{n} b_i f_{j-i}$$

Prvih nekoliko metoda izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad u_{j+1} = u_j + h f_j \qquad \text{(Ojlerova metoda)}\\
n = 1: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\,(3f_j - f_{j-1})\\
n = 2: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{12}\,(23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2})\\
n = 3: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{24}\,(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3})
\end{aligned}$$

Lokalna greška ovih metoda je $O(h^{n+2})$, a greška na intervalu integracije je $O(h^{n+1})$.

2.2 Implicitne Adamsove metode

Ukoliko se za čvorove interpolacije uzmu tačke $x_{j-n+1}, \ldots, x_{j+1}$, aproksimacija integrala u (8) se svodi na linearnu kombinaciju poznatih vrednosti $f_{j-n+1}, \ldots, f_j$ kao i nepoznate vrednosti f_{j+1}, pa dobijamo implicitnu formulu

$$u_{j+1} - u_j = h \sum_{i=0}^{n} b_i f_{j-i+1}$$

Prvih nekoliko metoda izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad u_{j+1} = u_j + h f_{j+1} \qquad \text{(implicitna Ojlerova metoda)}\\
n = 1: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\,(f_{j+1} + f_j) \quad \text{(modifikacija Ojlerove metode)}\\
n = 2: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{12}\,(5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1})\\
n = 3: &\quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{24}\,(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2})
\end{aligned}$$

Lokalna greška ovih metoda je $O(h^{n+2})$. Nepoznata vrednost f_{j+1} se može aproksimirati sa $f_{j+1} \approx f(x_{j+1}, u^*_{j+1})$ gde je prediktor u^*_{j+1} dobijen eksplicitnom metodom istog reda tačnosti. Za ovakav par prediktor–korektor metode važi Milnova ocena greške. Greška na intervalu integracije će biti $O(h^{n+1})$.

3 Eksplicitne Nistremove metode

Nistremove (Nyström) metode se baziraju na jednakosti

$$u(x_{j+1}) - u(x_{j-1}) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} u'(t)\,dt = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(t, u(t))\,dt \tag{9}$$

u kojoj se funkcija f aproksimira interpolacionim polinomom.

Ukoliko se za čvorove interpolacije uzmu tačke $x_{j-n}, \ldots, x_j$, aproksimacija integrala se svodi na linearnu kombinaciju poznatih vrednosti $f_{j-n}, \ldots, f_j$, pa dobijamo eksplicitnu formulu

$$u_{j+1} - u_{j-1} = h \sum_{i=0}^{n} b_i f_{j-i}$$

Prvih nekoliko formula izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + 2hf_j \qquad \text{(pravilo srednje tačke)} \\
n = 1: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + 2hf_j \\
n = 2: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}\,(7f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}) \\
n = 3: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}\,(8f_j - 5f_{j-1} + 4f_{j-2} - f_{j-3})
\end{aligned}$$

Lokalna greška ovih metoda je $O(h^3)$ za $n = 0$ i $O(h^{n+2})$ za $n > 0$, a greška na intervalu integracije je za jedan red tačnosti manja.

4 Implicitne metode Milne–Simpsona

Metode Milne–Simpsona se baziraju na jednakosti

$$u(x_{j+1}) - u(x_{j-1}) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} u'(t)\,dt = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(t, u(t))\,dt$$

u kojoj se funkcija f aproksimira interpolacionim polinomom.

Ukoliko se za čvorove interpolacije uzmu tačke $x_{j-n+1}, \ldots, x_{j+1}$, aproksimacija integrala se svodi na linearnu kombinaciju poznatih vrednosti $f_{j-n+1}, \ldots, f_j$ kao i nepoznate vrednosti f_{j+1}, pa dobijamo implicitnu formulu

$$u_{j+1} - u_{j-1} = h \sum_{i=0}^{n} b_i f_{j-i+1}$$

Prvih nekoliko metoda izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + 2hf_{j+1} \\
n = 1: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + 2hf_j \qquad \text{(pravilo srednje tačke)} \\
n = 2: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}\,(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}) \\
n = 3: &\qquad u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}\,(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1})
\end{aligned}$$

Lokalna greška ovih metoda je $O(h^{n+2})$ osim za $n = 2$ kada je $O(h^5)$. Nepoznata vrednost f_{j+1} se može aproksimirati sa $f_{j+1} \approx f(x_{j+1}, u^*_{j+1})$ gde je prediktor u^*_{j+1} dobijen eksplicitnom metodom istog reda tačnosti. Za ovakav par prediktor–korektor metode važi Milnova ocena greške. Greška na intervalu integracije će biti za jedan red niži od lokalne greške.

5 Milnova metoda

Na bazi jednakosti

$$u(x_{j+1}) - u(x_{j-l}) = \int_{x_{j-l}}^{x_{j+1}} u'(t)\,dt = \int_{x_{j-l}}^{x_{j+1}} f(t, u(t))\,dt$$

za $l = 3$ Milne je dobio eksplicitnu formulu (jer je u njoj koeficijent uz f_{j+1} jednak nuli)

$$u_{j+1} = u_{j-3} + \frac{h}{3}\,(8f_j - 4f_{j-1} + 8f_{j-2})$$

koju je iskoristio kao prediktor u metodi koja je poznata pod njegovim imenom

$$\begin{aligned} u^*_{j+1} &= u_{j-3} + \frac{h}{3}\,(8f_j - 4f_{j-1} + 8f_{j-2}) \\ u_{j+1} &= u_{j-1} + \frac{h}{3}\,(f(x_{j+1}, u^*_{j+1}) + 4f_j + f_{j-1}) \end{aligned}$$

Ova metoda ima lokalnu tačnost $O(h^5)$, a na intervalu $O(h^4)$.

Lokalna greška (ili greška odsecanja) se dobija kada se u svim tačkama osim poslednje uzmu tačne vrednosti rešenja Košijevog zadatka uz pretpostavku njegove dovoljne glatkosti. Izračunajmo prvo lokalnu grešku prediktora u Milnovoj metodi. Za $z = x_{j+1}$ će biti

$$\begin{aligned} & u_{j-3} + \frac{4h}{3}\,(2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}) \\ = \; & u(z-4h) + \frac{4h}{3}\,(2u'(z-h) - u'(z-2h) + 2u'(z-3h)) \\ = \; & u(z) - 4hu'(z) + \frac{16h^2}{2}\,u''(z) - \frac{64h^3}{6}\,u'''(z) + \frac{256h^4}{24}\,u^{(4)}(z) \\ & \qquad - \frac{1024h^5}{120}\,u^{(5)}(z) + O(h^6) \\ & + \frac{8h}{3}\left(u'(z) - hu''(z) + \frac{h^2}{2}\,u'''(z) - \frac{h^3}{6}\,u^{(4)}(z) + \frac{h^4}{24}\,u^{(5)}(z) + O(h^5)\right) \\ & - \frac{4h}{3}\left(u'(z) - 2hu''(z) + \frac{4h^2}{2}\,u'''(z) - \frac{8h^3}{6}\,u^{(4)}(z) + \frac{16h^4}{24}\,u^{(5)}(z) + O(h^5)\right) \\ & + \frac{8h}{3}\left(u'(z) - 3hu''(z) + \frac{9h^2}{2}\,u'''(z) - \frac{27h^3}{6}\,u^{(4)}(z) + \frac{81h^4}{24}\,u^{(5)}(z) + O(h^5)\right) \\ = \; & u(z) - \frac{14}{45}\,h^5 u^{(5)}(z) + O(h^6) \end{aligned}$$

pa je na kraju

$$u(x_{j+1}) - u^*_{j+1} = \frac{14}{45}\,h^5 u^{(5)}(x_{j+1}) + O(h^6)\ . \tag{10}$$

Za izračunavanje lokalne greške Milnove korektor formule primetimo prvo da će, pošto je $u(x_{j+1}) - u^*_{j+1} = O(h^5)$, biti na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti $f(x_{j+1}, u^*_{j+1}) = f(x_{j+1}, u(x_{j+1})) + O(h^5)$. Zbog ovoga ćemo imati za $z = x_{j+1}$

$$
\begin{aligned}
& u_{j-1} + \frac{h}{3}\left(f(x_{j+1}, u^*_{j+1}) + 4f_j + f_{j-1}\right) \\
= \; & u(z-2h) + \frac{h}{3}\left(u'(z) + O(h^5) + 4u'(z-h) + u'(z-2h)\right) \\
= \; & u(z) - 2hu'(z) + \frac{4h^2}{2}u''(z) - \frac{8h^3}{6}u'''(z) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(z) \\
& \qquad - \frac{32h^5}{120}u^{(5)}(z) + O(h^6) \\
& + \frac{h}{3}\left(u'(z)\right) + O(h^6) \\
& + \frac{4h}{3}\left(u'(z) - hu''(z) + \frac{h^2}{2}u'''(z) - \frac{h^3}{6}u^{(4)}(z) + \frac{h^4}{24}u^{(5)}(z) + O(h^5)\right) \\
& + \frac{h}{3}\left(u'(z) - 2hu''(z) + \frac{4h^2}{2}u'''(z) - \frac{8h^3}{6}u^{(4)}(z) + \frac{16h^4}{24}u^{(5)}(z) + O(h^5)\right) \\
= \; & u(z) + \frac{1}{90}h^5u^{(5)}(z) + O(h^6)
\end{aligned}
$$

pa je na kraju

$$
u(x_{j+1}) - u_{j+1} = -\frac{1}{90}h^5u^{(5)}(x_{j+1}) + O(h^6)\;. \tag{11}
$$

Koristeći (10) i (11), na osnovu Milnove ocene greške (7) dobijamo ocenu lokalne greške Milnove prediktor-korektor metode

$$
u(x_{j+1}) - u_{j+1} \approx -\frac{1}{29}\left(u_{j+1} - u^*_{j+1}\right)\;. \tag{12}
$$

6 Girove metode

Ukoliko se u opštoj formuli višekoračnih metoda

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i u_{j+1-i} - h\sum_{i=0}^{n} b_i f_{j+1-i} = 0
$$

uzme $b_0 = 1$ i $b_i = 0,\ i > 0$ dobijaju se Girove (Gear) metode

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i u_{j+1-i} = hf_{j+1}
$$

koje se mogu interpretirati i kao aproksimacija izvoda funkcije $(u'(x_{j+1}) = f(x_{j+1}, u(x_{j+1})))$ konačnim razlikama unazad.

Girove metode su date formulama

$$
\begin{aligned}
n=1: &\quad u_{j+1}-u_{j-1}=hf_{j+1} \qquad \text{(implicitna Ojlerova metoda)}\\
n=2: &\quad \frac{3}{2}\,u_{j+1}-2u_j+\frac{1}{2}\,u_{j-1}=hf_{j+1}\\
n=3: &\quad \frac{11}{6}\,u_{j+1}-3u_j+\frac{3}{2}\,u_{j-1}-\frac{1}{3}\,u_{j-2}=hf_{j+1}\\
n=4: &\quad \frac{25}{12}\,u_{j+1}-4u_j+3u_{j-1}-\frac{4}{3}\,u_{j-2}+\frac{1}{4}\,u_{j-3}=hf_{j+1}\\
n=5: &\quad \frac{137}{60}\,u_{j+1}-5u_j+5u_{j-1}-\frac{10}{3}\,u_{j-2}+\frac{5}{4}\,u_{j-3}-\frac{1}{5}\,u_{j-4}=hf_{j+1}\\
n=6: &\quad \frac{147}{60}\,u_{j+1}-6u_j+\frac{15}{2}\,u_{j-1}-\frac{20}{3}\,u_{j-2}+\frac{15}{4}\,u_{j-3}-\\
&\qquad\qquad -\frac{6}{5}\,u_{j-4}+\frac{1}{6}\,u_{j-5}=hf_{j+1}
\end{aligned}
$$

Za $n>6$ formule su nestabilne.

Na svakom koraku Girove metode mora se rešiti nelinearna jednačina po u_{j+1} i za to se može koristiti iterativna ili Njutnova metoda. Iako implicitne, Girove metode su vrlo stabilne pa se primenjuju kod krutih sistema diferencijalnih jednačina.