ТМИ - СЕПТЕМБАР

1. Нека је $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n^2}$, за $E \subseteq \mathbb{N}$.

а) Доказати да је μ мера на $\mathbb{N}$. Да ли постоји $E \subseteq \mathbb{N}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$?

б) Да ли низ функција $f_n : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, дат са:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, 2n] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

конвергира у простору L^∞?

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(\frac{nt}{1+nt}\right) \mathrm{d}t$, оправдавајући замену места лимеса и интеграла на два начина:

а) примењујући теорему о доминантној конвергенцији;

б) примењујући теорему о монотоној конвергенцији на низ $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right)^n$.

3. Испитати за које $1 \leqslant p < +\infty$ функција $f(x) = \dfrac{1}{x^a + 5x}$, $a \in \mathbb{R}$ припада простору $L^p(0, +\infty)$.

4. Доказати да на Хилбертовом простору H за све $x, y \in H$ важи једнакост:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} ||x + e^{it}y||^2 e^{it} \mathrm{d}t.$$

ТМИ - СЕПТЕМБАР

1. Нека је $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n^2}$, за $E \subseteq \mathbb{N}$.

а) Доказати да је μ мера на $\mathbb{N}$. Да ли постоји $E \subseteq \mathbb{N}$ такав да је $\mu(E) = +\infty$?

б) Да ли низ функција $f_n : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, дат са:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, 2n] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

конвергира у простору L^∞?

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(\frac{nt}{1+nt}\right) \mathrm{d}t$, оправдавајући замену места лимеса и интеграла на два начина:

а) примењујући теорему о доминантној конвергенцији;

б) примењујући теорему о монотоној конвергенцији на низ $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right)^n$.

3. Испитати за које $1 \leqslant p < +\infty$ функција $f(x) = \dfrac{1}{x^a + 5x}$, $a \in \mathbb{R}$ припада простору $L^p(0, +\infty)$.

4. Доказати да на Хилбертовом простору H за све $x, y \in H$ важи једнакост:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} ||x + e^{it}y||^2 e^{it} \mathrm{d}t.$$