Задаци за домаћи

1. Криволинијски и површински интеграли. Три важне теореме.

1. Нека је $a > 0$. Израчунати површину скупа у равни који ограничава крива $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

2. Одредити површину скупа у равни ограниченог кривом $x = \sin t \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Нека је $I = \int\limits_c f(x+y)((1+3x^2+y^2)\mathrm{d}x + (1+x^2+3y^2)\mathrm{d}y)$, где је c крива у $xy-$равни и $f(t)$ диференцијабилна функција таква да је $f(1) = 4$. Одредити $f(t)$ тако да I не зависи од пута и за такво f одредити потенцијал $u(x,y)$. Израчунати интеграл ако је c крива која спаја почетну тачку $A(-1,-1)$ и крајњу тачку $B(1,1)$.

4. Израчунати $I = \int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y) = (y, -2x)$, а крива c је негативно оријентисана и добијена на следећи начин: $c = c_1 \cup c_2$, где је c_1 део кружнице $k_1 : x^2 + y^2 = 2x$ који се налази ван круга ограниченог кружницом $k_2 : x^2 + y^2 = 2y$, а c_2 део кружнице k_2 који се налази ван круга ограниченог са k_1.

5. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, x^2+y^2)$, а c граница параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$ у првом октанту, оријентисана позитивно ако се гледа из тачке $(1000, 1000, 0)$.

6. Доказати да за сваку затворену криву c у простору и за глатке функције $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ важи $\int\limits_c (f\nabla g + g\nabla f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

7. Нека је $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, где је c нека крива на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. Нека је T тело у $\mathbb{R}^3$ са глатком границом S и u глатка функција на T. Означимо са $D_{\mathbf{n}}$ извод у правцу јединичне нормале $\mathbf{n}$ на S. Доказати:

а) $\iint\limits_S u D_{\mathbf{n}} u \mathrm{d}S = \iiint\limits_T (u \triangle u + ||\nabla u||^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

б) $\iint\limits_S D_{\mathbf{n}} u \mathrm{d}S = \iiint\limits_T \triangle u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

в) Ако је u хармонијска и таква да је на S идентички једнака нули, доказати да је $u \equiv \mathrm{const}$.

9. Израчунати $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2 x, \frac{y^3}{3} + \mathrm{tg} z, x^2 z + y^2)$, а S горња страна површи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$.

10. Ако је S јединична сфера и $\mathbf{F}$ задовољава услове Стоксове теореме, показати да је $\iint\limits_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$.

11. Израчунати $\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{3y^2 + 5z^2 + 1}} \mathrm{d}S$, ако је S део једнограног хиперболоида $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ између равни $z = 0$ и $z = 2\sqrt{2}$.

12. Нека су $P_1, \ldots, P_n$ n тачака у $\mathbb{R}^3$ у којима се налазе наелектрисања $q_1, \ldots, q_n$ $(\in \mathbb{R})$. Потенцијал у тачки $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ који настаје услед овог система наелектрисања је функција

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r_j}$$

где су $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ вектори положаја тачака P_j у односу на тачку P $\left(\mathbf{r}_j = \overrightarrow{PP_j}\right)$, а $r_j = \|\mathbf{r}_j\|$. Ако је $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ електрично поље, $\mathcal{S}$ глатка затворена површ која обухвата све тачке P_j и $Q = \sum_{j=1}^{n} q_j$ тотално наелетрисање, доказати Гаусов закон:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q.$$

2. Диференцијалне форме. Интеграција. Де Рамова кохомологија.

1. Доказати да је $d(d\eta) = 0$ за сваку $1-$форму η класе C^2 на $V \subset \mathbb{R}^3$.

2. Нека је $\omega = x^2y\mathrm{d}x + y^2z\mathrm{d}y + z^2x\mathrm{d}z$ и $\eta = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z$. Израчунати $\omega \wedge \eta$ и $\eta \wedge \omega$. Испитати да ли су ω и η тачне и затворене.

3. Ако важе ознаке са часа, доказати да је $\alpha_\xi \wedge \alpha_\eta = \beta_{\xi\times\eta}$ и $\alpha_\xi \wedge \beta_\eta = \omega_{\langle\xi,\eta\rangle}$.

4. Одредити примитивну форму форме $\alpha = y\mathrm{d}x + (z\cos(yz) + x)\mathrm{d}y + (y\cos(yz))\mathrm{d}z$.

5. Ако су α и β затворене форме, доказати да је и $\alpha \wedge \beta$ затворена. Ако је α затворена, а β тачна, доказати да је $\alpha \wedge \beta$ тачна.

6. За које вредности $a, b, c \in \mathbb{R}$ је форма $(ay^2 + 2cxz)\mathrm{d}x + y(bx + cz)\mathrm{d}y + (ay^2 + cx^2)\mathrm{d}z$ тачна?

7. Проверити да је $d\alpha = 0$, а затим наћи $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ако је

(а) $\alpha = [ye^{xy} - z\sin(xz)]\,dx + [xe^{xy} + z^2]\,dy + [-x\sin(xz) + 2yz + 3z^2]\,dz$;

(б) $\alpha = 2xy^3z^4dx + [3x^2y^2z^4 - ze^y\sin(ze^y)]\,dy + [4x^2y^3z^3 - e^y\sin(ze^y) + e^z]\,dz$.

8. Нека су $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ отворени скупови и $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ глатко пресликавање и $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ нула–форма, тј. глатка функција. Доказати да важи

$$\varphi^*(df) = d(\varphi^* f).$$

9. Нека су $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ отворени скупови и $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ глатко пресликавање. Нека је $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{V})$, $\beta \in \Omega^1(\mathcal{V})$. Доказати да важи

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

10. Нека $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ni (u, v, w)$, $\varphi : (x, y, z) \mapsto (xy, xz, yz)$. Наћи $\varphi^*(du)$, $\varphi^*(dv)$, $\varphi^*(dw)$, $\varphi^*(uvw)$, $\varphi^*(du \wedge dv)$, $\varphi^*(du \wedge dv \wedge dw)$.

11. Нека $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са:

$$\varphi : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\cos\theta) = (x, y, z).$$

Наћи dx, dy, dz, $dx \wedge dy$, $dz \wedge dx$, $dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$.

12. Нека $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ дефинисано са:

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (x^3, x^2y, xy^2, y^3) = (u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Наћи $\varphi^*(u_1 + 3u_2 + 3u_3 + u_4)$, $\varphi^*(du_1)$, $\varphi^*(du_2)$, $\varphi^*(du_3)$, $\varphi^*(du_4)$, $\varphi^*(du_2 \wedge du_3)$.

13. Нека је $r : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ дато са $r(x,y) = (x,y,xy)$ и нека је $S = r([-1,1]^2)$. Ако је $\omega = 3z\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (x^2+y^2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, израчунати $\int\limits_S \omega$.

14. Нека је S сфера у $\mathbb{R}^3$ дата са $x^2+y^2+z^2 = 4z$. Израчунати интеграл $\int\limits_S \omega$, ако је $\omega = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ и ако је $\omega = \frac{x}{x^2+y^2+(z-2)^2}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

15. Израчунати $\int\limits_{\mathbb{T}^2} \alpha$ ако је $\alpha = xz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\omega$, а $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ $2-$торус у $\mathbb{R}^4$.

16. Нека је $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\}$.

(а) Израчунати $H^0_{dr}(X)$.

(б) Нека је $\alpha_j = \frac{-(y-b_j)\mathrm{d}x+(x-a_j)\mathrm{d}y}{(x-a_j)^2+(y-b_j)^2}$, $j=1,2$. Доказати да су форме α_j затворене, али да нису тачне.

(в) Доказати да за $\beta \in Z_1(X)$ постоје c_1, c_2 такви да је $[\beta] = c_1[\alpha_1] + c_2[\alpha_2]$, па израчунати $H^1_{dr}(X)$.

17. Израчунати Де Рамову кохомологију (произвољне димензије) простора X, користећи да је $H^\star_{dr}$ хомотопска инваријанта, ако је:

(а) $X = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

(б) $X = \mathbb{R}^3 \backslash p$, где је p произвољна права.

(в) $X = \mathbb{S}^2 \backslash \{p,q,r\}$ где су p,q,r три различите тачке на сфери.

3. Многострукости. Оријентабилност.

1. Нека је дат скуп $M_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2-z^2 = a\}$.

(а) Доказати да је M_a дводимензионална многострукост за $a \neq 0$. Скицирати M_a.

(б) Доказати да M_0 није многострукост. Упутство: претпоставити да постоји дифеоморфизам $g : U \to V \cap M_0$, где је U отворен у $\mathbb{R}^2$, а $V \cap M_0$ околина тачке $(0,0,0)$. Нека је u таква да је $g(u) = (0,0,0)$. Извести контрадикцију на основу броја компоненти повезаности скупова $V \cap M_0 \backslash (0,0,0)$ и $U \backslash \{u\}$.

(в) Доказати да ако су a и b истог знака, онда важи да су M_a и M_b дифеоморфни.

2. Нека је $M = \mathbb{RP}^2$ пројективна раван, тј. простор који се добија на следећи начин: $M = \mathbb{R}^3/\sim$, при чему је $\sim$ релација дата са:

$$(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow (\exists \lambda \neq 0)\, x_i = \lambda y_i,\ i=1,2,3.$$

(а) Нека је $U_i = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_i \neq 0\}/\sim$, $i=1,2,3$ и нека су дата пресликавања $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1})$, $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = (\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2})$ и $\varphi_3 : U_3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_3(x_1,x_2,x_3) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$. Показати да су φ_i добро дефинисана пресликавања и да је $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = M$.

(б) Доказати да је φ_i, $i=1,2,3$ улагање.

(в) Одредити $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ и показати да је класе C^∞.

(г) Показати да Јакобијан матрице преласка $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ мења знак на домену, па користећи задатак са вежби, извести закључак да M није оријентабилна.

3. За функцију $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ кажемо да је хомогена степена хомогености p ако важи $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ за свако $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$.

(а) Доказати да су функције $f(x,y) = \frac{x^2-xy}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ и $h(x,y,z) = (x^2z^6 + 3x^4z^2y^2)^{-\sqrt{2}}$ хомогене и одредити њихов степен хомогености.

(б) Ако је f дефинисана и у $\mathbf{0}$ и непрекидна свуда, доказати да је $p \geq 0$. Ако је још $p = 0$ доказати да је f константна.

(в) Ако је f хомогена функција степена хомогености p и глатка, доказати да је

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = pf.$$

[Упутство: диференцирати по t израз $f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x})$.]

(г) Ако је f хомогена функција степена хомогености $p \neq 0$ и глатка, доказати да је 0 једина могућа сингуларна вредност.

(д) Ако је $c \neq 0$ и f као у претходној тачки, доказати да је $f^{-1}(c)$ или празан скуп или многострукост. Које димензије?

4. Нека $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$,

$$\mathbf{F} : (x, y) \mapsto (x^3, x^2y, xy^2, y^3).$$

(а) Доказати да је $\mathbf{F}$ 1-1.

(б) Доказати да је $d\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 1-1 за $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(в) Доказати да је $\mathbf{F} : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}) \to \mathbb{R}^4$ улагање и да је $\mathcal{M} := \mathbf{F}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\})$ многострукост димензије 2.

(г) Наћи једну базу тангентне равни $T_{\mathbf{F}(1,1)}\mathcal{M}$.

5. Нека је $M_n(\mathbb{R})$ простор квадратних матрица, $S_n(\mathbb{R})$ простор симетричних матрица и $O(n)$ простор ортогоналних матрица. Дефинишимо пресликавање

$$F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}), \quad F(A) := AA^{\perp}.$$

(а) Доказати да је $M_n \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $S_n \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(б) Доказати $dF(A)(\xi) = \xi A^{\perp} + \xi^{\perp} A$.
[Упутство: Искористити $dF(A)(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t))$, за $\gamma(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $\gamma(0) = A$, $\dot{\gamma}(0) = \xi$.]

(б) Доказати да је, за $A \in O_n(\mathbb{R})$, $dF(A)$ сурјективно. [Упутство: проверити да је $\xi = \frac{1}{2}BA$ решење једначине $\xi A^{\perp} + \xi^{\perp} A = C$.]

(г) Доказати да је скуп ортогоналних матрица $O(n)$ глатка многострукост и одредити јој димензију.

(д) Доказати да је $T_E O(n) = AS_n(\mathbb{R})$, где је $AS_n(\mathbb{R})$ простор антисиметричних матрица.

6. (а) Нека је $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ база векторског простора V и $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ пермутација скупа $\{1, \ldots, n\}$. Доказати да је $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] = \mathrm{sgn}(\sigma)[\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}]$, где је $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ оријентација простора V.

(б) Доказати $[-\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = -[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

(в) Доказати $[3\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

7. Нека је M глатка многострукост која је покривена са две карте (U, φ) и (V, ψ), $M = U \cup V$. Ако је $U \cap V$ повезан, доказати да је M оријентабилна. Објаснити како је могуће да је Мебијусова трака покривена са две карте (скицирати или их експлицитно одредити), а није оријентабилна.