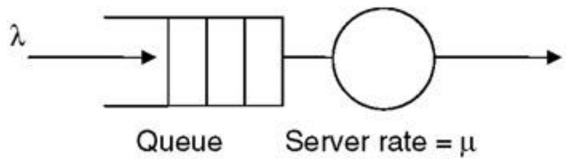
СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА 2014.

M|M|1 Queue – једноканални систем опслуживања

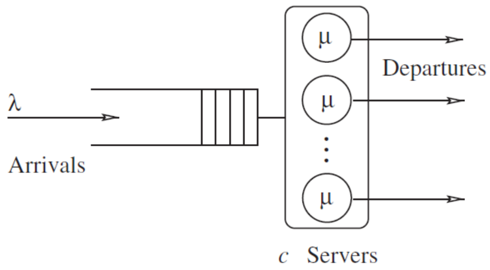


Може се моделирати процесом рађања и умирања, са инфинитезималним генератором Q:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Стационарна (равнотежна, стабилна) расподела $\boldsymbol{\pi} = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дата је са:
$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$$
Уведе се ознака: $\rho \coloneqq \frac{\lambda}{\mu}$ – вредност ρ представља искоришћеност сервера. Захтева се: $\rho < 1$. Из једначине нормирања добија се:
$$\pi_0 = 1-\rho, \pi_n = \rho^n(1-\rho).$$
- Просечан број клијената у систему L
Нека је N случајна величина која представља број клијената у систему у равнотежном стању, гледано на дуже стазе. Уведе се ознака: $L \coloneqq EN$. Тада је:
$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$
- Просечан број клијената у реду за чекање L_q
$$L_q = \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\pi_n = L-(1-\pi_0) = L-\rho.$$
- Просечна дужина временског периода боравка у систему W
На основу Little-овог закона:
$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$
- Просечна дужина временског периода чекања у реду W_q
На основу Little-овог закона:
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = W - \frac{1}{\mu}.$$
- Расподела дужине временског периода боравка у систему V
Уведе се ознака: $B_k \coloneqq$дужина трајања опслуживања k-тог клијента, $k \in \mathbb{N}$. Расподела дужине временског периода боравка у систему у равнотежном стању дата је са:
$$P\{V>t\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n+1} B_k > t\right\}\pi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\mu t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mu t)^k}{k!}\rho^n(1-\rho)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\rho^n(1-\rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu t}\frac{(\mu t\rho)^k}{k!} = e^{-\mu t}\cdot e^{\mu t\rho} = e^{-\mu t(1-\rho)}, t \geq 0.$$
- Расподела дужине временског периода чекања у реду V_q
$$P\{V_q > t\} = \rho e^{-\mu t(1-\rho)}, t \geq 0.$$

M|M|c Queue – вишеканални систем опслуживања



Може се моделирати процесом рађања и умирања, са инфинитезималним генератором Q:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \lambda & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Стационарна (равнотежна, стабилна) расподела $\boldsymbol{\pi} = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дата је са:

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \pi_0 & ,0 \le n \le c \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{c^{n-c}} \cdot \pi_0 & , \quad n \ge c \end{cases}$$

Уведе се ознака: $\rho \coloneqq \frac{\lambda}{c\mu}$ – вредност ρ представља <u>искоришћеност система</u>. Захтева се: $\rho < 1$.
Из једначине нормирања добија се:

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)^{-1}$$

Мере перформансе:

- <u>Просечан број клијената у реду за чекање</u> L_q

$$L_q = \sum_{n=c}^{+\infty} (n-c)\pi_n = \frac{(\rho c)^{c+1}}{c \cdot c! \cdot (1-\rho)^2} \cdot \pi_0.$$

Остале мере перформансе најлакше је одредити коришћењем Little-овог закона.

- <u>Просечна дужина временског периода чекања у реду</u> W_q

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

- <u>Просечна дужина временског периода боравка у систему</u> W

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

- <u>Просечан број клијената у систему</u> L

$$L = \lambda W.$$