i pokazati da je $\tau_0 < +\infty$ sa verovatnoćom 1 ako i samo ako je $p = q = \frac{1}{2}$.

359. Neka je S_n kao u zadacima 357 i 358, i

$$\eta^+ = \sup\{S_n \mid n \geq 0\}$$

najveća vrednost slučajnog pomeranja S_n. Dokazati da je, za $p \geq q$, $P\{\eta^+ = +\infty\} = 1$. Naći raspodelu za η^+ ako je $p < q$.

360. Dat je proces slučajnog pomeranja po tačkama $\{0,1,\dots,r\}$, gde je $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ za $i=\overline{1,r-1}$, i $p_{0,0} = p_{r,r} = 1$ (stanja 0 i r su apsorbujuća). Naći očekivani broj koraka do apsorbcije pod uslovom da je početno stanje k, $k \in \{0,1,\dots,r\}$.

361. Rešiti zadatak 360 za slučaj kada je $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ ($p \neq q$, $p + q = 1$), i $p_{0,0} = p_{r,r} = 1$.

362. (Puasonov proces) Fizički sistem može da se nalazi u nekom od stanja 0,1,2,... i mogući su prelazi samo oblika $i \longrightarrow i+1$. Verovatnoća prelaza $i \longrightarrow i+1$, u vremenskom intervalu $[t, t+\Delta t)$ male dužine, je $\lambda\Delta t + \bar{o}(\Delta t)$ ($\Delta t > 0$, $\lambda > 0$). Neka je $X(t)$ stanje sistema u momentu $t (t > 0)$, i $X(0) = 0$.

a) Odrediti sistem diferencijalnih jednačina, koje opisuju proces.

b) Naći raspodelu za $X(t)$, $t \geq 0$.

363. (Proces čistog umiranja). U oblasti G u trenutku $t=0$ ima m čestica. Nezavisno jedna od druge, čestice mogu nestajati iz oblasti G, pri čemu svaka iščezava sa verovatnoćom $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ u vremenskom intervalu dužine Δt ($\mu > 0$, Δt dovoljno malo). Nove čestice se ne mogu pojaviti.

a) Odrediti sistem diferencijalnih jednačina, koje opisuju proces.

b) Neka je $X(t)$ broj čestica u oblasti G u momentu $t > 0$. Naći $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$, $0 \leq n \leq m$.

c) Naći $EX(t)$, $DX(t)$. Pokazati da $X(t) \xrightarrow{s.I} 0$, $t \longrightarrow \infty$.

364. (Proces Polja-e)(Polya). U oblasti G pojavljuju se čestice, i u daljem ostaju u toj oblasti. U momentu $t=0$ u G bilo je 0 čestica. Uslovna verovatnoća da se njihov broj poveća za 1 u inter-

valu $[t, t+\Delta t)$ ako ih je u t bilo n, jednaka je $\frac{1+an}{1+at}\Delta t + \underline{o}(\Delta t)$ $(a>0,\ \Delta t$ dovoljno malo). Verovatnoća da se njihov broj poveća za 2 i više je $\underline{o}(\Delta t)$.

a) Odrediti diferencijalne jednačine, koje opisuju proces.

b) Ako je $X(t)$ broj čestica u G u momentu t, naći $p_n(t) = P\{X(t)=n\}$ $(n \geq 0)$.

c) Naći $EX(t)$, $DX(t)$.

365. U trenutku $t=0$ u oblasti G se nalazi k (≥ 1) čestica. U intervalu dužine Δt svaka čestica, nezavisno od ostalih, radja novu česticu sa verovatnoćom $\Delta t + \underline{o}(\Delta t)$. Čestice ne mogu iščezavati iz oblasti G. Naći verovatnoću da će u momentu t u oblasti G biti tačno n čestica (proces Jula).

366. Posmatra se rad elektronske računske mašine (ERM). Vreme bezotkaznog rada ERM je slučajna veličina sa raspodelom $\mathcal{E}(\lambda)$; ako do otkaza dodje, mašina se zaustavlja i neispravnost se otklanja. Vreme obnavljanja ERM je slučajna veličina sa $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelom.
Naći verovatnoću da će ERM raditi u momentu t $(t>0)$ ako je radila u momentu 0.

367. Proces $X(t)$ menja vrednost u slučajnim momentima vremena $(t \geq 0)$ pri čemu broj promena u $[t,s)$ ima raspodelu $P(\lambda(s-t))$. Vrednosti $X(t)$ izmedju dva skoka su nezavisne slučajne veličine sa očekivanom vrednošću 0 i disperzijom D. Naći $EX(t)$, $DX(t)$ i $K_X(t,s)$.

368. Slučajni proces $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ je, po definiciji, neprekidan u srednjem kvadratnom u tački t_o ako

$$X(t) \xrightarrow{\text{s. k.}} X(t_o), \quad t \longrightarrow t_o .$$

a) Pokazati: $X(t)$ je s.k. neprekidan u $t=t_o$ ako i samo ako je $K_X(t,s)$ neprekidna u (t_o, t_o) $(EX(t)=0)$.

b) Neka je $\{\Pi(t),\ t \geq 0\}$ Puasonov proces sa parametrom λ (>0). Pokazati da je $\Pi(t)$ s.k. neprekidan za $t>0$. Pokazati da je $X(t) = (-1)^{\Pi(t)}$ s.k. neprekidan za $t>0$.

369. Autobusi dolaze na stanicu u skladu sa Puasonovim procesom sa parametrom λ. Čovek dolazi na stanicu u momentu t. Koliko je njegovo srednje vreme čekanja do dolaska prvog narednog autobusa?

370. $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ je Puasonov proces sa parametrom λ. Ocenjujemo $X(t^2)$ sa $\Lambda(t) = a\,X(t) + b$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ za $t \geqslant 1$. Naći najbolju srednje kvadratnu ocenu $\Lambda^*(t)$.

371. Neka je $\{\Pi(t),\ t \geqslant 0\}$ Puasonov proces sa parametrom λ, i neka je $t < s < u$. Naći raspodelu za $\Pi(s)/(\Pi(t), \Pi(u))$ i $E(\Pi(s)/\Pi(t), \Pi(u))$.

372. (Pomeranje po rešetki kojim "upravlja" Puasonov proces). Neka su ε_n, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne slučajne veličine sa raspodelama

$$P\{\varepsilon_n = +1\} = P\{\varepsilon_n = -1\} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je, dalje, $\{\Pi(t),\ t \geqslant 0\}$ Puasonov proces sa parametrom $\mu > 0$, i

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\Pi(t)} \varepsilon_n \qquad \left(\sum_{1}^{0} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \right).$$

a) Opisati trajektorije procesa $Y(t)$.

b) Naći karakterističnu funkciju za $Y(t)$.

c) Pokazati da

$$\frac{Y(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\text{Z.R.}} Y : N(0;\mu), \quad t \to \infty.$$

373. Neka je $X(t)$ Puasonov proces sa parametrom λ, i $Y(t) = X(t + X(t))$. Naći $EY(t)$.

374. Neka je $Y(t) = X(t + X(t))$, kao u prethodnom zadatku. Naći $P\{Y(t) = 0\}$.

375. Neka je $X(t)$ Puasonov proces sa parametrom λ, i $Y(t) = X(t) \cdot I\{X(t+\varepsilon) - X(t) \neq 0\}$ $(\varepsilon > 0$ fiksirano). Naći raspodelu za $Y(t)$ i $EY(t)$.

376. Pretpostavimo da su $X(t)$ i $Y(t)$ dva nezavisna Puasonova procesa, sa parametrima λ i μ respektivno $(\lambda, \mu > 0)$. Neka je

$$Z(t) = X(Y(t)).$$

Naći $EZ(t)$.

377. Aparat, koji se sastoji od dve zavisne komponente, trpi tri vrste udara do kojih dolazi u skladu sa tri nezavisna Puasonova procesa $X(t)$, $Y(t)$ i $Z(t)$. Parametri procesa su λ, μ i ν respektivno. Udar i-te vrste razara i-tu komponentu $(i \in \{1,2\})$,

dok udar treće vrste razara obe komponente.

a) Neka je X_i $(i \in \{1,2\})$ "dužina života" i-te komponente. Naći raspodelu vektora (X_1, X_2).

b) Naći marginalne raspodele za X_i i EX_i $(i \in \{1,2\})$.

c) Naći $P\{X_1 = X_2\}$.

d) Neka je U "dužina života" aparata. Naći raspodelu za U i EU.

378. Aparat je podvrgnut uticaju jednog od k mogućih dejstava $E_1, \dots, E_k$, do kojih dolazi sa odgovarajućim verovatnoćama $c_1, \dots, c_k$ $\left(\sum_1^k c_j = 1\right)$. Pri svakom dejstvu do udara dolazi u skladu sa Puasonovim procesom sa parametrom λ_j, $j=\overline{1,k}$. Uslovna verovatnoća da će aparat otkazati kod udara pri dejstvu E_j jednaka je p_j $(p_j \in (0,1),\ j=\overline{1,k})$. Neka je T "dužina života" aparata. Odrediti raspodelu za T i E(T).

379. Neka je X data slučajna promenljiva sa karakterističnom funkcijom $\varphi(t)$. Definišimo slučajni proces $Y(t)$ sa $Y(t) = \sin(\lambda t + X)$, $t \in \mathbb{R}$. Pokazati: ako je $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$, tada je $Y(t)$ stacionaran u širem smislu. Važi li i obrnuto ?