$\boxed{11.}$ в) $E[\max_i X_i \mid X_1 < X_2 < X_3] = ?$

I начин

Стандардно: - одредити (условну) ф-ју расподеле сл. величине $(\max_i X_i \mid X_1 < X_2 < X_3)$
- диференцирати ф-ју расподеле и тако одредити густину расподеле вероватноћа
- израчунати очекивање

⤳ алгебарски гломазно

II начин

$$E[\max_i X_i \mid X_1 < X_2 < X_3] = E[X_3 \mid X_1 < X_2 < X_3]$$

$$= E[X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) \mid X_1 < X_2 < X_3]$$

$$= E[X_1 \mid X_1 < X_2 < X_3] + E[X_2 - X_1 \mid X_1 < X_2 < X_3] + E[X_3 - X_2 \mid X_1 < X_2 < X_3]$$

линеарност

на основу својства одсуства сећања

$$= E[X_1 \mid X_1 < X_2 < X_3] + E[X_2 \mid X_2 < X_3] + E[X_3 \mid \cancel{X_1 < X_2}]$$

услов се губи, јер су сл. величине X_1, X_2, X_3 по тп. независне

$$= E[\min_i X_i \mid X_1 < X_2 < X_3] + E[\min\{X_2, X_3\} \mid X_2 < X_3] + EX_3$$

$$(\min_i X_i \mid X_1 < X_2 < X_3) \stackrel{d}{=} \min_i X_i$$

нека је $Z := \min_i X_i$; тада $Z \in \mathcal{E}(\sum_i \lambda_i)$ (*)

$$\underset{t \geq 0}{P\{Z \geq t \mid X_1 < X_2 < X_3\}} = \frac{P\{t \leq X_1 < X_2 < X_3\}}{P\{X_1 < X_2 < X_3\}} = \frac{\iiint_D \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \lambda_3 e^{-\lambda_3 x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}}$$

D: $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ тд. $t \leq x_1$, $x_1 \leq x_2$, $x_2 \leq x_3$

← израчунато под а)

$$\ldots = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} = P\{Z \geq t\}$$

на основу (*)

$$(\min\{X_2, X_3\} \mid X_2 < X_3) \stackrel{d}{=} \min\{X_2, X_3\} \in \mathcal{E}(\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3}$$

△

г) $E[\max_i X_i] = \sum_{i \neq j \neq k} E[\max_i X_i \mid X_i < X_j < X_k] \cdot P\{X_i < X_j < X_k\}$

сумирање се врши по свих 6 пермутација индекса 1, 2, 3

$$= \sum_{i \neq j \neq k} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_j+\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k}\right)}_{\text{на основу в)}} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j+\lambda_k}}_{\text{на основу а)}}$$

△