ЗАДАЦИ СА ВЕЖБИ – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА – 4В

Школска година 2014/15.

Друга недеља (среда 15.9.2014)

10. Нека је дат систем за опслуживање са два сервера, у коме се клијент опслужује прво на серверу $S1$, након тога на серверу $S2$, после чега напушта систем. Дужина трајања опслуживања клијента на серверу Si је експоненцијално расподељена случајна величина са параметром $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$. Када је клијент L ушао у систем, затекао је слободан сервер $S1$ и два клијента код сервера $S2$ – клијента A чије опслуживање на серверу $S2$ је у том тренутку у току и клијента B који чека у реду.
а) Одредити вероватноћу P_A догађаја да опслуживање клијента A још увек траје када клијент L пређе за сервер $S2$.
б) Одредити вероватноћу P_B догађаја да је клијент B још увек у систему када клијент L пређе за сервер $S2$.
в) Одредити математичко очекивање случајне величине T која представља дужину временског периода који клијент L проведе у систему.

11. Ако су X_i, $i = 1, 2, 3$, независне екпоненцијално расподељене случајне величине са параметрима $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, одредити:
а) $P\{X_1 < X_2 < X_3\}$
б) $P\left\{X_1 < X_2 | \max_i X_i = X_3\right\}$
в) $E\left[\max_i X_i \,| X_1 < X_2 < X_3\right]$
г) $E\left[\max_i X_i\right]$.

12. Нека је X случајна величина која има равномерну расподелу на сегменту $[0, 1]$. Посматра се случајни процес који броји телефонске позиве упућене call-центру, при чему се они дешавају у временским тренуцима $X + i$, $i \in \mathbb{N}_0$. Испитати да ли овај бројачки процес има независне, односно стационарне прираштаје.

13. Дефекти на каблу под морем јављају се у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda = 0.1$ по km.
а) Израчунати вероватноћу да нема дефеката у прва два километра кабла.
б) Ако је познато да нема дефеката у прва два километра кабла, израчунати вероватноћу да их неће бити ни у следећем километру.

14. Клијенти долазе у сервис у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ клијената по сату. Нека је $X(t)$ број клијената који дођу у сервис до тренутка t, $t \geq 0$.
а) Одредити вероватноћу да у сервис, до тренутка t, дође тачно k клијената.
б) Фиксирају се временски тренуци $0 < s < t$. Одредити:

$$P\{X(t) = n + k | X(s) = n\}$$
$$P\{X(s) = n | X(t) = n + k\}$$

где $n, k \in \mathbb{N}_0$.

15. <u>Својство одсуства сећања за Пуасонов процес:</u> Показати да случајна величина W_t, која представља дужину времена чекања од тренутка t $(t \geq 0)$ до првог следећег догађаја у хомогеном Пуасоновом процесу са интензитетом $\lambda > 0$, има $\varepsilon(\lambda)$ расподелу, независно од t.

16. Група таксиста чека путнике на главној железничкој станици. Путници стижу до таксија у складу са Пуасоновим процесом и то просечно 20 путника по сату. Такси креће чим „покупи“ четворо путника или прође $10min$ од када први путник седне у такси.
а) Претпостави се да човек уђе у такси као први путник. Израчунати вероватноћу да ће он морати да чека $10min$ док такси не крене.
б) Претпостави се да је човек ушао у такси као први путник и да чека већ $5min$. У међувремену, још двоје путника је ушло у такси. Израчунати вероватноћу да човек чека још $5min$ док такси не крене.