Vežbe - Arhitektura računara

Aljoša Obuljen

12.10.2009.

1 Uvod - podsetnik logike

Napomena: Neki primeri i delovi pratećeg teksta u uvodnom delu preuzeti iz skripte Aleksandra B. Samardžića – *Mikroprocesorski sistemi.*

- Sve logičke funkcije $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ mogu se izraziti algebarskim izrazima u kojima se kao operacije pojavljuju samo operatori $\vee, \wedge, '$ (ili, i, negacija). Negacija se alternativno obeležava i kao $\bar{p}, p \in \{0,1\}$. Drugim rečima, ovaj skup operatora čini *kompletnu bazu* Bulove algebre. U daljem tekstu, operatori *ili* i *i* će se obeležavati i znacima $+$ i $\cdot$, kao sabiranje i množenje.
- Logičkih funkcija sa n promenljivih ima 2^{2^n}. (Za vežbu: dokazati)
- Pravilo komutativnosti $+$ i $\cdot$: $x_0 + x_1 = x_1 + x_0; x_0x_1 = x_0x_1$.
- Pravilo asocijativnosti: $(x_0 + x_1) + x_2 = x_0 + (x_1 + x_2); (x_0x_1)x_2 = x_0(x_1x_2)$.
- Pravilo distributivnosti: $x_0 + x_1x_2 = (x_0 + x_1)(x_0 + x_2); x_0(x_1 + x_2) = x_0x_1 + x_0x_2$.
- Pravilo idempotencije: $x + x = x; xx = x$.
- Pravilo involucije (dvostruka negacija): $\overline{\overline{x}} = x$.
- Pravilo komplementa: $x + \overline{x} = 1; x\overline{x} = 0$.
- De Morganova pravila: $\overline{x_0 + x_1} = \overline{x}_0\overline{x}_1; \overline{x_0x_1} = \overline{x}_0 + \overline{x}_1$.
- $1 + x = 1; 0 \cdot x = 0$.
- $0 + x = x; 1 \cdot x = x$.

2 Minimizacija logičkih funkcija

Dva osnovna načina minimizacije:

- Algebarske transformacije
- Karnoove mape

Cilj minimizacije logičkih funkcija je ušteda u hardverskim komponentama koje implementiraju logička kola za izračunavanje pojedinih logičkih funkcija. Svaka logička operacija zahteva primenu jednog kola i svaki ulaz logičke operacije zahteva hardversku implementaciju. Združenom minimizacijom ulaza i broja operacija pojeftinjuje se izrada hardvera.

2.1 Algerbarske transformacije

Cilj je algebarskim transformacijama na osnovu poznatih identiteta minimizovati izraz po kriterijumima broja ulaza i broja operacija.

Zadatak 1. Neka je data logička funkcija $f(x_0, x_1, x_2) = \overline{x}_0\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_0\overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2$. Zapisati funkciju u drugom obliku, sa najmanje elemenata po klauzi i najmanje klauza.

Rešenje. Osnovnim algerbarskim transformacijama ovog izraza dobija se:

$$\begin{aligned} & \overline{x}_0\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_0\overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2 = \\ = \; & \overline{x}_0\overline{x}_1(x_2 + \overline{x}_2) + (x_0 + \overline{x}_0)x_1 x_2 = \\ = \; & \overline{x}_0\overline{x}_1 \cdot 1 + 1 \cdot x_1 x_2 = \\ = \; & \overline{x}_0\overline{x}_1 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

Jednostavniji oblik se dalje ne može razložiti.

Zbog složenosti i obaveze dobrog uočavanja primenljivosti primene algebarskih pravila, češće se koriste Karnoove mape.

2.2 Karnoove mape

Karnoove mape predstavljaju vizuelni prikaz tablice istinitosti u zavisnosti od promenljivih koje su ulaz u funkciju. Tako je funkciji iz prethodnog odeljka pridružena sledeća mapa[1]:

$x_0 \downarrow$	$x_1 x_2 \rightarrow$	00	01	11	10
0		1	1	1	0
1		0	0	1	0

Raspored promenljivih nije bitan, tabela je mogla biti i transponovana. Svaka ćelija pripada jednom sabirku u izrazu funkcije. Vrednosti promenljivih se ređaju u tabeli tako da se prelaskom iz jedne u drugu kolonu, odnosno iz jedne u drugu vrstu promeni vrednost tačno jedne promenljive. Za zaglavlje tabele se stoga može koristiti Grejov kod, koji ima upravo ovo svojstvo.

Da bi se minimizovala funkcija, bira se najmanji broj pravouganika koji su pojedinačno najveće moguće površine i sadrže samo ćelije u kojima je vrednost 1. Pravougaonici moraju biti dimenzija $2^m \times 2^n$. Treba napomenuti i da su ćelije prve i poslednje kolone susedne, kao i prve i poslednje vrste, pošto se prelaskom takođe menja najviše jedna promenljiva. Takođe, pravougaonici se mogu preklapati na pojedinim ćelijama ili grupama ćelija.

U gornjoj tabeli primećuju se dva pravougaonika koji zadovoljavaju uslove. Prvi pravougaonik sadrži dve ćelije prve vrste, dok drugi sadrži treću kolonu. Nemoguće je smanjiti broj pravougaonika ili povećati njihovu površinu.

[1] U tabeli, $x_1 x_2$ ne obeležava konjunkciju, već vrednosti koje uzimaju promenljive x_1 i x_2, redom.

Prvom pravougaoniku, dakle, odgovaraju ćelije sa koordinatama $(1,1)$ i $(1,2)$, dok drugom odgovaraju $(1,3)$ i $(2,3)$. U prvom pravougaoniku, očigledno, jedino vrednost promenljive x_2 se menja, tako da izlaz očigledno ne zavisi od nje. Prvi pravougaonik je stoga opisan sabirkom $\overline{x}_0\overline{x}_1$. U drugom pravougaoniku, menja se vrednost promenljive x_0, te izlaz ne zavisi od nje, pa je sabirak koji mu odgovara x_1x_2. Kako ovi pravougaonici pokrivaju sve slučajeve kada funkcija ima vrednost 1, to je izraz cele funkcije definisan sa $\overline{x}_0\overline{x}_1 + x_1x_2$, što je isti oblik kao u prethodnom odeljku.

U pojedinim situacijama, neke ćelije tabele se popunjavaju sa d, od engleskog *don't care*, tj. nije bitno koje vrednosti funkcija u njima uzima. Tada se umesto d uzimaju proizvoljne vrednosti koje doprinose smanjenju broja pravougaonika i povećanju njihove površine.

3 Zadaci

Zadatak 2. Dokazati da je *nili* ($\downarrow$) minimalna kompletna baza Bulove algebre.

Rešenje. Kako znamo da je $\{\vee, \wedge, '\}$ kompletna baza, dovoljno je pokazati da se ove operacije mogu predstaviti pomoću operacije *nili*.

$$\overline{p} = \overline{p+p} \equiv p \downarrow p.$$

$$pq = \overline{\overline{p} + \overline{q}} \equiv \overline{p} \downarrow \overline{q} = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q).$$

$$p + q = \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{\overline{\overline{(p+q)} \cdot \overline{(p+q)}}} = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$$

Zadatak 3. (za vežbu) Dokazati isto za *ni*.

Zadatak 4. Napisati logički izraz koji je ekvivalentan sledećoj Karnoovoj mapi:

$CD \downarrow \quad AB \rightarrow$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

Rešenje Svakoj ćeliji u kojoj je vrednost 1 redom odozgo nadole, s leva na desno, odgovaraju sledeće klauze vezane sa $+$:

$$A\overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B} \cdot \overline{C}D + ABCD + AB\overline{C}D.$$

Primećujemo da je moguće izabrati 3 pravougaonika od po dve jedinice. Prvi pravougaonik sadrži ćelije $(2,2),(2,3)$, drugi pravougaonik ćelije $(1,4),(2,4)$, a treći $(3,3),(4,3)$. Prvom odgovara izraz $B\overline{C}D$, drugom $A\overline{B} \cdot \overline{C}$, a trećem ABC, te je izraz za funkciju

$$B\overline{C}D + A\overline{B} \cdot \overline{C} + ABC,$$

što je značajna ušteda.

Zadatak 5. Za Karnoovu mapu napisati minimalni izraz:

$CD\downarrow$	$AB\rightarrow$	00	01	11	10
00		d	d	d	1
01		d	1	1	1
11		d	d	1	d
10		d	d	1	d

Rešenje. Kako se umesto d može staviti bilo koja vrednost kojom se minimizuje broj pravougaonika i povećava pojedinačna površina, ako se umesto d stavi 1, dobija se jedan pravougaonik dimenzija 4x4 i nijedna promenljiva se ne menja, pa vrednost funkcije ne zavisi ni od jedne promenljive, te je funkcija identički jednaka 1.

Zadatak 6. Sledeću istinitosnu tablicu popuniti tako da funkcija uzima vrednost 1 kada su dva ili više ulaza jednaka 1. Zapisati izraz dobijene funkcije, a potom izvršiti minimizaciju odgovarajućom Karnoovom mapom.

A	B	C	D	$f(A,B,C,D)$
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Popunjena tabela izgleda kao:

A	B	C	D	$f(A,B,C,D)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Karnoova mapa pridružena ovoj tabeli je:

$CD \downarrow \quad AB \rightarrow$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Moguće je segmentiranje sa šest pravougaonika koji se preklapaju, od kojih su dva dimenzija 4x1 i 1x4, a preostala 4 su 2x2. Dobija se da je izraz:

$$CD + BD + BC + AB + AD + AC.$$

Zadatak 7. Pokazati da postoji 2^{2^n} logičkih funkcija n promenljivih.

Rešenje. Obeležimo promenljive sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Označimo sa $C(n)$ broj načina da se dodeli vrednost n Bulovih promenljivih. Pokažimo da je $C(n) = 2^n$ matematičkom indukcijom. Očigledno, $C(1) = 2^1 = 2$. Pretpostavimo da je $C(k) = 2^k$. Uvođenjem nove, $k+1$-ve promenljive, dupliramo broj dodela, pošto je $C(k+1) = C(k)\mid_{x_{k+1}=0} + C(k)\mid_{x_{k+1}=1} = 2C(k)$, što je po induktivnoj hipotezi jednako $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, te je tvrđenje dokazano.

Dalje, proizvoljna logička funkcija za svaku dodelu vrednosti, kojih ima 2^n, vraća vrednost iz skupa $\{0,1\}$. Ako sve valuacije, kojih ima 2^n, kako smo dokazali, obeležimo sa $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2^n}\}$, svakoj od njih je potrebno pridružiti vrednost iz skupa $\{0,1\}$. Ako odredimo na koliko načina se vrednosti mogu dodeliti svakoj valuaciji, dobijamo broj mogućih logičkih funkcija n promenljivih. Kako je ovo ekvivalentan problem gornjem, dobija se da je broj logičkih funkcija n promenljivih jednak $2^{|V|}$, a kako je $|V| = 2^n$, to je broj logičkih funkcija n promenljivih jednak 2^{2^n}.