Глава 1

Аритметички и геометријски низови

1.1 Теоријски увод

Аритметички низ је низ реалних бројева код којег се сваки следећи члан низа добија из претходног додавањем једног истог броја d. Број d се назива разликом тог низа. Код сваког низа $n-$ти члан ћемо означити са $a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Пример једног аритметичког низа је низ $2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ Код овог низа разлика је $d = 3$ и први члан $a_1 = 2$.
Дакле, аритметички низ задовољава релацију

$$a_{n+1} = a_n + d,\ \ n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

У аритметичком низу (a_n) са првим чланом a_1 и разликом d важи

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{1.1}$$

за сваки природан број n.
Важи и следећа једнакост

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ k < n \qquad (k, n \in \mathbb{N}).$$

Специјално за $k = 1,\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\ (n > 1)$.
Збир првих n чланова аритметичког низа са првим чланом a_1 и разликом d износи

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{1.2}$$

Геометријски низ је низ код којег се сваки члан низа, почевши од другог, добија из претходног множењем једним истим бројем q ($q \neq 0$). Број q је количник тог геометријског низа.
Пример једног геометријског низа је низ $3, 12, 48, 192, 768, \ldots$ Код овог низа

количник је $q = 4$ и први члан $b_1 = 3$.
Дакле, геометријски низ задовољава релацију

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

У геометријском низу (b_n) са првим чланом b_1 и количником q важи

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \tag{1.3}$$

за сваки природан број n.
Важи и следећа једнакост

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \quad k < n.$$

Специјално за $k = 1$, $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ $(n > 1)$.
Збир првих n чланова геометријског низа са првим чланом b_1 и количником $q\,(q \neq 1)$ износи

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \tag{1.4}$$

а ако је $q = 1$, онда је $S_n = nb_1$.
Ако количник геометријског низа задовољава $|q| < 1$, онда се збир свих чланова тог низа може израчунати помоћу формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \tag{1.5}$$

1.2 Решени задаци

1.2.1. Да ли је број 347 члан аритметичког низа $1, 5, 9, 13, \ldots$?

Решење. Дат је аритметички низ код кога је први члан једнак $a_1 = 1$ и разлика $d = 4$. На основу једнакости (1.1), општи члан је облика $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$, односно то су сви бројеви који при дељењу са 4 дају остатак 1. Број 347 при дељењу са 4 даје остатак 3, па није члан аритметичког низа. $\triangle$

1.2.2. Могу ли $\sqrt{5}$ и 5 бити чланови аритметичког низа чији је први члан једнак 2?

Решење. Нека је $\sqrt{5} = 2 + (n-1)d$ и $5 = 2 + (m-1)d$. Тада је $\dfrac{\sqrt{5} - 2}{5 - 2} = \dfrac{n-1}{m-1}$, а одавде $\sqrt{5} = 3 \cdot \dfrac{n-1}{m-1}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{5}$ ирационалан број. $\triangle$

1.2.3. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно формирају аритметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

Решење. Када би те бројеве уметнули, онда би 46 био седамнаести број, а -2 први број. Из $a_1 = -2$ и $a_1 + 16d = 46$ следи да је $d = 3$. Збир је, према формули (1.2), једнак $S_{17} = \dfrac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 17 \cdot 22 = 374$. △

1.2.4. Наћи први члан и разлику аритметичког низа (a_n) у коме је

$$a_2 + a_5 - a_3 = 10 \quad \text{и} \quad a_2 + a_9 = 17.$$

Решење. Из једнакости $10 = a_2+a_5-a_3 = a_1+d+a_1+4d-(a_1+2d) = a_1+3d$ и $17 = a_1 + d + a_1 + 8d = 2a_1 + 9d$ добијамо систем

$$\begin{aligned} a_1 + 3d &= 10, \\ 2a_1 + 9d &= 17, \end{aligned}$$

чије је решење $a_1 = 13$ и $d = -1$. △

1.2.5. Ако је код аритметичког низа $a_n = m$, $a_m = n$, $m > n$, наћи a_{m-n}.

Решење. Решавањем система $n = a_1 + (m-1)d$, $m = a_1 + (n-1)d$ по a_1 и d долазимо до $d = \frac{m-n}{n-m} = -1$ и $a_1 = m + n - 1$. Тада је $a_{m-n} = a_1 + (m - n - 1)d = m + n - 1 - (m - n - 1) = 2n$. △

1.2.6. Одредити први члан и разлику аритметичког низа (a_n), ако је збир прва три члана једнак -3, а збир првих пет чланова са парним индексима је 15.

Решење. Збир прва три члана низа је $S_3 = \dfrac{3}{2}(2a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d = -3$, а збир првих пет чланова са парним индексима је $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 5a_1 + 25d = 15$. Из система

$$\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -3, \\ 5a_1 + 25d &= 15, \end{aligned}$$

следи да је $a_1 = -2$ и $d = 1$. △

1.2.7. Наћи збир првих 19 чланова аритметичког низа (a_n), ако је познато да је $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Решење. Након следећих еквиваленција $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224 \Leftrightarrow a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 11d + a_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4a_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow a_1 + 9d = 56$ налазимо једну везу између a_1 и d, па је $S_{19} = \dfrac{19}{2}[2a_1 + 18d] = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064$. △

1.2.8. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 2, а збир њихових квадрата $\dfrac{14}{9}$. Наћи те бројеве.

Решење. Решавањем система добијамо следеће еквиваленције
$$\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3=2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a_1+3d=2 \\ a_1^2+a_1^2+2a_1d+d^2+a_1^2+4a_1d+4d^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a_1+3d=2 \\ 3a_1^2+6a_1d+5d^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix}.$$
Ако изразимо a_1 из прве једначине и заменимо у другу једначину добијамо следеће еквиваленције
$$3\left(\frac{2-3d}{3}\right)^2+6\cdot\frac{2-3d}{3}d+5d^2=\frac{14}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-12d+9d^2}{3}+4d-6d^2+5d^2=\frac{14}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(4-12d+9d^2)+36d-9d^2=14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d=\frac{1}{3} \lor d=-\frac{1}{3}.$$
За тражени аритметички низ добијамо да је $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{3}$ или је $a_1=1$, $d=-\frac{1}{3}$. Прва три члана низа су $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ или $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. △

1.2.9. Три броја су узастопни чланови растућег аритметичког низа. Збир тих бројева је 3, а збир њихових кубова је 4. Одредити те бројеве.

Решење. Из услова задатка имамо следећи систем
$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &= 3, \\ a_1^3+a_2^3+a_3^3 &= 4, \end{aligned}$$
који је еквивалентан са следећим системима
$$\begin{aligned} 3a_1+3d &= 3, \\ a_1^3+a_1^3+3a_1^2d+3a_1d^2+d^3+a_1^3+6a_1^2d+12a_1d^2+8d^3 &= 4 \end{aligned}$$
и
$$\begin{aligned} a_1+d &= 1, \\ 3a_1^3+9a_1^2d+15a_1d^2+9d^3 &= 4. \end{aligned}$$
Ако изразимо a_1 из прве једначине и заменимо у другу једначину добијамо
$$3(1-d)^3+9(1-d)^2d+15(1-d)d^2+9d^3=4 \Leftrightarrow$$
$$3-9d+9d^2-3d^3+9d-18d^2+9d^3+15d^2-15d^3+9d^3=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6d^2=1 \Leftrightarrow d_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$
С обзиром да је низ растући прва три члана тог низа су $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$, 1 и $1+\frac{\sqrt{6}}{6}$. △

1.2.10. У аритметичком низу је $a_4=5$. За коју вредност разлике d тог низа збир квадрата прва три члана ће бити најмањи?

Решење. Из услова имамо да је $5 = a_4 = a_1 + 3d$, односно $a_1 = 5 - 3d$. Збир квадрата прва три члана је $a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 3a_1^2 + 6a_1 d + 5d^2$. Ако у последњи израз заменимо a_1 добијамо

$$3a_1^2 + 6a_1 d + 5d^2 = 3(5 - 3d)^2 + 6(5 - 3d)d + 5d^2 =$$
$$= 75 - 90d + 27d^2 + 30d - 18d^2 + 5d^2 = 14d^2 - 60d + 75.$$

Збир квадрата ће бити најмањи ако је $d = -\dfrac{-60}{28} = \dfrac{15}{7}$. △

1.2.11. За које вредности x бројеви $\log 2, \log(2^x - 1)$ и $\log(2^x + 3)$ представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа?

Решење. На основу особине аритметичког низа $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ имамо $2\log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 3)$. Одавде је $\log(2^x - 1)^2 = \log 2(2^x + 3)$, односно $(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 3)$. Ако ставимо $2^x = t$ добијамо једначину $t^2 - 4t - 5 = 0$, чија су решења $t_1 = 5$ и $t_2 = -1$. Како је $2^x > 0$, могуће је само $t = 5$, тј. $2^x = 5$. Дакле $x = \log_2 5$. △

1.2.12. Ако су бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$ узастопни чланови неког аритметичког низа, при чему међу њима нема чланова једнаких нули, доказати да је

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Решење. На основу једнакости

$\dfrac{1}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k(a_k + d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{(a_k + d) - a_k}{a_k(a_k + d)}\right) = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ имамо

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$ △

1.2.13. Доказати да су бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ $(a + b \neq 0,\ a + c \neq 0,\ b + c \neq 0)$ узастопни чланови аритметичког низа ако и само ако су бројеви a^2, b^2, c^2 узастопни чланови аритметичког низа.

Решење. Бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ су узастопни чланови неког аритметичког низа *akko* важи $\dfrac{1}{c+a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+b}\right)$. Из еквиваленција

$$\frac{1}{c+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{c+a} = \frac{a + 2b + c}{(b+c)(a+b)} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2(b+c)(a+b) = (a + 2b + c)(c + a)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc = ac + a^2 + 2bc + 2ab + c^2 + ac\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2b^2 - a^2 - c^2 = 0\ \Leftrightarrow\ b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2),$$

следи да су бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ узастопни чланови аритметичког низа ако и само ако су бројеви a^2, b^2 и c^2 узастопни чланови аритметичког низа. △

1.2.14. Нека је (a_n) аритметички низ и S_k збир првих k његових чланова. Ако за неке $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$ важи $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, доказати да је $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

Решење. Сређивањем датог израза имамо

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\frac{m}{2}[2a_1 + d(m-1)]}{\frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]} = \frac{m^2}{n^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{m[2a_1 + d(m-1)]}{n[2a_1 + d(n-1)]} = \frac{m^2}{n^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2a_1 + d(m-1)}{2a_1 + d(n-1)} = \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; n[2a_1 + d(m-1)] = m[2a_1 + d(n-1)] \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2a_1 n + dn(m-1) - 2a_1 m - dm(n-1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2a_1(n-m) - d(n-m) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (2a_1 - d)(n-m) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_1 = \frac{d}{2}.$$

Добили смо да је $a_1 = \dfrac{d}{2}$, па је

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{d + 2(m-1)d}{d + 2(n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

△

1.2.15. Израчунати збир свих непарних троцифрених бројева.

Решење. Потребно је израчунати збир $S = 101 + 103 + \ldots + 999$. Број сабирака овог збира је једнак $\dfrac{999-101}{2} + 1 = 450$, па тражени збир је збир првих 450 чланова аритметичког низа са првим чланом $a_1 = 101$ и разликом $d = 2$. На основу формуле (1.2) имамо

$$S_{450} = \frac{450}{2}(2 \cdot 101 + 449 \cdot 2) = 247500.$$

△

1.2.16. Неки чланови аритметичких прогресија $17, 21, 25, \ldots$ и $16, 21, 26, \ldots$ су једнаки. Наћи збир свих 100 једнаких чланова ових прогресија.

Решење. Код првог аритметичког низ је $a_1 = 17$ и $d_1 = 4$, а код другог $b_1 = 16$ и $d_2 = 5$. Општи члан првог низа је $a_n = 17 + 4(n-1)$, а другог низа је $b_m = 16 + 5(m-1)$. Заједнички чланови задовољавају једнакост $17 + 4(n-1) = 16 + 5(m-1)$, а одатле је $5m = 4n + 2$. Потребно је да 5 дели $4n + 2$. То важи за $n = 2, 7, 12, 17, \ldots$, другим речима заједнички чланови су следећи чланови првог низа $a_2 = 21$, $a_7 = 41$, $a_{12} = 61, \ldots$ Они образују низ са првим чланом 21 и разликом 20, па је збир првих 100 чланова, применом формуле (1.2), једнак

$$S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 21 + 99 \cdot 20) = 50 \cdot 2022 = 101100.$$

△

1.2.17. Збир првих n чланова једног аритметичког низа је $S_n = 76$, а разлика низа је $d = 2$. Наћи n, ако знамо да је $n > 1$ и први члан је цео број.

Решење. Применом формуле за збир првих n чланова аритметичког низа имамо $S_n = 76 = \dfrac{n}{2}[2a_1 + 2(n-1)] = na_1 + n(n-1)$. Из претходног изразимо a_1 и добијамо $a_1 = \dfrac{76 - n(n-1)}{n} = \dfrac{76}{n} - (n-1)$. Да би a_1 био цео број потребно је да n дели 76. Позитивни бројеви који деле број 76, а већи од 1, су $2, 4, 19, 38$ и 76. Решење је $n \in \{2, 4, 19, 38, 76\}$. $\triangle$

1.2.18. Доказати да за производ првих n чланова позитивног геометријског низа важи $b_1 b_2 \cdots b_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n}$.

Решење. Доказ следи на основу следећих еквиваленција
$b_1 b_2 \cdots b_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n} \quad \Leftrightarrow \quad b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdots b_1 q^{n-1} = \sqrt{(b_1 b_1 q^{n-1})^n} \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+(n-1)} = \sqrt{(b_1 b_1 q^{n-1})^n} \quad \Leftrightarrow \quad b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sqrt{b_1^{2n} q^{n(n-1)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. $\triangle$

1.2.19. Количник геометријског низа је $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказати да је у овом низу сваки члан почевши од другог, једнак разлици двају њему суседних чланова.

Решење. Потребно је доказати да важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1}$ за сваки природан број $n > 1$. Наиме, важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1} \Leftrightarrow b_1 q^{n-1} = b_1 q^n - b_1 q^{n-2} \Leftrightarrow$ $q = q^2 - 1 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Одавде видимо, да ако је $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, онда важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1}$ за $n > 1$. $\triangle$

1.2.20. Ако је количник геометријског низа (b_n) једнак 5, доказати да за његове чланове важи релација $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Решење. Општи члан геометријског низа је $b_n = b_1 q^{n-1}$. Лако је уочити да је задовољено $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n \Leftrightarrow b_1 q^{n+1} = 4b_1 q^n + 5b_1 q^{n-1} \Leftrightarrow q^2 = 4q + 5 \Leftrightarrow q^2 - 4q - 5 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 5 \vee q_2 = -1$. Тиме смо доказали да, ако је $q = 5$, важи $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n,\ n \in \mathbb{N}$. $\triangle$

1.2.21. Збир првог и трећег члана растућег геометријског низа је 20, а збир прва три члана је 26. Наћи тај низ.

Решење. Први збир је $a_1 + a_3 = a_1 + a_1 q^2 = a_1(1 + q^2) = 20$, а други $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1(1 + q + q^2) = 26$. Имамо систем

$$\begin{aligned} a_1(1+q^2) &= 20, \\ a_1(1+q+q^2) &= 26. \end{aligned}$$

Из друге једначине добијамо $a_1 = \dfrac{26}{1+q+q^2}$ и заменом у прву једначину имамо $\dfrac{26}{1+q+q^2}(1+q^2) = 20$, а одавде $26 + 26q^2 = 20 + 20q + 20q^2$. Добили смо једначину $3q^2-10q+3=0$ из које следи $q_1=3$ и $q_2=\frac{1}{3}$. Низ је растући, па је $q=3$ и $a_1=2$. △

1.2.22. Разлика првог и петог члана геометријског низа, чији су сви чланови позитивни, износи 15, а збир првог и трећег члана тог низа је 20. Наћи збир првих пет чланова тог низа.

Решење. Из услова задатка имамо

$$15=a_1-a_5=a_1-a_1q^4=a_1(1-q^4),$$

$$20=a_1+a_3=a_1+a_1q^2=a_1(1+q^2).$$

Добили смо систем

$$\begin{aligned} a_1(1-q^4) &= 15,\\ a_1(1+q^2) &= 20. \end{aligned}$$

Ако поделимо прву једначину са другом и добијамо $\dfrac{1-q^4}{1+q^2}=\dfrac{15}{20}$, а одавде $20(1-q^4)=15(1+q^2) \ \Leftrightarrow\ 4q^4+3q^2-1=0 \ \Leftrightarrow\ q=\dfrac{1}{2} \ \vee\ q=-\dfrac{1}{2}$.
Низ је растући, па је $q=\frac{1}{2}$. Први члан је $a_1=\dfrac{20}{1+q^2}=\dfrac{20}{\frac{5}{4}}=16$, а збир $S_5=a_1\dfrac{1-q^5}{1-q}=16\cdot\dfrac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=32\cdot\dfrac{31}{32}=31$. △

1.2.23. Четврти члан геометријског низа је за 24 већи од другог члана, а збир другог и трећег члана је 6. Наћи тај низ.

Решење. Из првог услова следи $24=a_4-a_2=a_1q^3-a_1q=a_1(q^3-q)$, а из другог $6=a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=a_1(q+q^2)$. Добили смо систем

$$\begin{aligned} a_1(q^3-q) &= 24,\\ a_1(q+q^2) &= 6. \end{aligned}$$

(КАКО СЕ ПИШЕ НЕ ПРИПАДА) Ако $q\in\{-1.0\}$, онда из друге једначине имамо $a_1=\dfrac{6}{q+q^2}$. Заменом у прву једначину добијамо $\dfrac{6}{q+q^2}(q^3-q)=24$, односно $q(q^2-4q-5)=0$. Решења ове једначине су $q_1=0, q_2=5$ и $q_3=-1$. С обзиром да $q_1=0$ и $q_3=-1$ не задовољавају једнакост $a_1(q+q^2)=6$, онда је $q_2=5$ количник нашег низа и $a_1=\dfrac{1}{5}$. △

1.2.24. Посматрајмо првих n чланова растућег геометријског низа. Ако је збир првог и последњег члана 66, производ другог и претпоследњег је 128, а збир свих чланова је 126, одредити број n.

Решење. Из једнакости $a_1 + a_n = 66$, $a_2 a_{n-1} = 128$, $S_n = 126$ следи
$a_1 + a_1 q^{n-1} = 66$, $a_1 q \cdot a_1 q^{n-2} = 128$, $a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = 126$ $(q \neq 1)$,
односно

$$\begin{aligned} a_1(1+q^{n-1}) &= 66, \\ a_1^2 q^{n-1} &= 128, \\ a_1 \frac{1-q^n}{1-q} &= 126. \end{aligned}$$

Како је $a_1 \neq 0$, онда из друге једначине имамо $q^{n-1} = \frac{128}{a_1^2}$, па заменом у прву једначину добијамо $a_1(1+\frac{128}{a_1^2}) = 66 \Leftrightarrow a_1 \frac{a_1^2+128}{a_1^2} = 66 \Leftrightarrow a_1^2 - 66a_1 + 128 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2 \vee a_1 = 64$.
Ако је $a_1 = 2$ тада је $q^{n-1} = \frac{128}{a_1^2} = 32$ и $2 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 126$. Последња једначина се може записати као $2 \cdot \frac{1-q^{n-1}q}{1-q} = 126$, одакле је (заменом $q^{n-1} = 32$)
$1 - 32q = 63(1-q) \Leftrightarrow q = 2$. Према томе, $n = 6$.
Ако је $a_1 = 64$ тада је $q^{n-1} = \frac{128}{a_1^2} = \frac{1}{32}$ и $2 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 126$. Последња једначина се може записати као $64 \cdot \frac{1-q^{n-1}q}{1-q} = 126$, одакле је (заменом $q^{n-1} = \frac{1}{32}$)
$32 - q = 63(1-q) \Leftrightarrow q = 2$. И у овом случају је $n = 6$. △

1.2.25. Израчунати збир $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$.

Решење. Посматрајмо једначине

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n, \\ xS_n &= x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n+1)x^{n+1}. \end{aligned}$$

Ако од прве одузмемо другу једначину добијамо

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1}.$$

Саберимо десни израз примењујући формулу (1.4)

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1} = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Према томе, разматрамо случајеве $x \neq 1$ и $x = 1$.
Ако је $x \neq 1$, онда је $(1-x)S_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}$, а одатле

$$S_n = \frac{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}\right].$$

Ако је $x = 1$, онда је

$$S_n = 1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n = 1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

△

1.2.26. Израчунати $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}$.

Решење. Посматрајмо једначине

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} \\ \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ако од прве једначине одузмемо другу имамо

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Сређивањем израза добијамо
$S_n = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{4+2n-1}{2^n} = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$. △

1.2.27. Доказати да израз $\frac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S_{n-2}}$, где је S_n збир првих n чланова геометријског низа, зависи само од одговарајућег количника q.

Решење. Ако је $q \neq 1$, онда је, применом формуле (1.4),

$$\frac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S_{n-2}} = \frac{a_1\frac{1-q^{n+2}}{1-q} - a_1\frac{1-q^n}{1-q}}{a_1\frac{1-q^n}{1-q} - a_1\frac{1-q^{n-2}}{1-q}} = \frac{1 - q^{n+2} - (1-q^n)}{1 - q^n - (1 - q^{n-2})} = \frac{-q^{n+2} + q^n}{-q^n + q^{n-2}} = q^2,$$

а ако је $q = 1$, онда је $\frac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S_{n-2}} = \frac{n+2-n}{n-(n-2)} = 1$.
Добили смо да је израз једнак q^2 за свако $q \neq 0$. △

1.2.28. Збир првих n чланова неког геометријског низа је S, а збир њихових реципрочних вредности је t. Израчунати производ P тих n чланова.

Решење. Нека је $q \neq 1$. Тада је $S = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ и

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \ldots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{a_1}\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{a_1}\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}. \end{aligned}$$

Одавде је $\frac{S}{t} = a_1^2 q^{n-1}$, па је тражени производ

$$P = a_1 a_2 \cdots a_n = a_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S}{t}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Ако је $q = 1$, онда је $S = a_1 n$ и $t = \dfrac{n}{a_1}$, а одатле $\dfrac{S}{t} = a_1^2$. Производ у овом случају је $P = a_1 \cdot a_1 \cdots a_1 = a_1^n = (a_1^2)^{\frac{n}{2}} = (\dfrac{S}{t})^{\frac{n}{2}}$. △

1.2.29. Нека је $k > 1$ и n паран природан број. Наћи скуп решења неједначине (по x)

$$\log_2 x - 2k\log_{2^2} x + 3k^2 \log_{2^3} x - \cdots + n(-k)^{n-1}\log_{2^n} x > \frac{1-(-k)^n}{1+k}\log_2(x^2-2).$$

Решење. Скуп допустивих решења неједначине је

$$D:\ x > 0\ \wedge\ x^2 - 2 > 0\ \Leftrightarrow\ x \in (\sqrt{2}, +\infty).$$

Израз на левој страни неједнакости је

$$\log_2 x - 2k\log_{2^2} x + 3k^2\log_{2^3} x - \ldots + n(-k)^{n-1}\log_{2^n} x =$$
$$= \log_2 x - k\log_2 x + k^2 \log_2 x - \ldots + (-k)^{n-1}\log_2 x.$$

Последња сума је сума првих n чланова геометријског низа код кога је први члан једнак $\log_2 x$, а количник $q = -k$, па је једнака $\dfrac{1-(-k)^n}{1+k}\log_2 x$.

Ако добијену вредност заменимо у неједнакост добијамо

$\log_2 x < \log_2(x^2-2)\ \Leftrightarrow\ x < x^2 - 2,\ x \in D\ \Leftrightarrow\ x^2 - 2 - x > 0\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty),\ x \in D.$

Решење неједначине је $x \in (2, +\infty)$. △

1.2.30. Израчунати збир $1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \ldots + (-1)^n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \ldots$

Решење. Применом формуле (1.5) имамо

$$S = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \ldots + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}.$$

△

1.2.31. Одредити количник опадајућег геометријског низа чији је први члан 3, а збир свих чланова $\dfrac{7}{2}$.

Решење. Први члан је $b_1 = 3$, а збир свих чланова $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{7}{2}$. Одавде следи да је $1 - q = \dfrac{2}{7} \cdot 3 = \dfrac{6}{7}$, односно $q = \dfrac{1}{7}$. △

1.2.32. Израчунати збир $0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$.

Решење. Применом формуле (1.5) имамо

$$S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

△

1.2.33. Израчунати збир $\log 5 + \log\sqrt{5} + \log\sqrt[4]{5} + \log\sqrt[8]{5} + \ldots$.

Решење. Применом формуле (1.5) имамо
$S = \log 5 + \log\sqrt{5} + \log\sqrt[4]{5} + \log\sqrt[8]{5} + \ldots = \log 5 + \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{4}\log 5 + \frac{1}{8}\log 5 + \ldots =$
$$= \log 5\big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\big) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\log 5 = 2\log 5. \quad \triangle$$

1.2.34. Израчунати збир $S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n}$.

Решење. Ако искористимо чињеницу да је $\underbrace{99\ldots9}_{k} = 10^k - 1, k = 1, 2, \ldots, n$, добијамо $S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n} = 10 - 1 + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots +$ $(10^n - 1) = 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - n = 10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n.$ $\triangle$

1.2.35. Доказати да је:
$$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Решење. Израз на левој страни је бесконачни збир чланова геометријског реда, па је једнак
$$S_1 = 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \ldots = 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} =$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 2,$$
а израз на десној $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$ $\triangle$

1.2.36. За коју вредност $a \in \mathbb{R}$ је збир геометријског реда
$$2a + a\sqrt{2} + a + \ldots$$
једнак 8?

Решење. Ово је бесконачни збир, код кога је први сабирак $a_1 = 2a$ и количник $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 1)$, па је на основу формуле (1.5) једнак
$$S = 2a + a\sqrt{2} + a + \ldots = 2a\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$
Изједначимо збир са 8 и налазимо $a = 2(2 - \sqrt{2})$. $\triangle$

1.2.37. Израчунати збир $2 + 5 + 11 + \ldots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$.

Решење. Тражени збир је једнак
$2 + 5 + 11 + ... + (3 \cdot 2^{n-1} - 1) =$
$$= (3 \cdot 2^{1-1} - 1) + (3 \cdot 2^{2-1} - 1)) + \ldots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1) =$$
$$= 3(2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + \ldots + 2^{n-1}) - 1 - 1 - 1 - \ldots - 1 =$$

$$= 3(1+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})-1-1-\ldots-1 = 3\cdot\frac{1-2^n}{1-2}-n =$$
$$= 3(2^n-1)-n. \qquad \triangle$$

1.2.38. Наћи скуп решења неједначине $x+x^2+x^3+\ldots<1$.

Решење. Да би сума била коначна потребно је да важи $|x|<1$.
Тада је $x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{x}{1-x}<1$. Последња неједначина је еквивалентна неједначини $x<1-x$, па је решење $-1<x<\frac{1}{2}$. $\triangle$

1.2.39. Наћи опадајући геометријски низ чији је сваки члан 10 пута већи од збира свих следећих иза њега.

Решење. Из услова $a_n = 10(S-S_n)$ следи $a_1q^{n-1} = 10\left(a_1\dfrac{1}{1-q}-a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$, а одатле $q^{n-1}(1-q) = 10(1-1+q^n)$. Сређивањем последње једначине добијамо $q^{n-1}-q^n = 10q^n$ и на крају $q=\dfrac{1}{11}$. Први члан је произвољан. $\triangle$

1.2.40. Одредити граничну вредност израза:

$$D=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}.$$

Решење. Коришћењем формуле за бесконачни збир (1.5) имамо

$$D=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}} = 3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{8}}5^{\frac{1}{16}}\cdots = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} =$$
$$= 3^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}\cdot 5^{\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9\cdot 5} = \sqrt[3]{45}. \qquad \triangle$$

1.2.41. Над висином једнакостраничног троугла ABC странице a, конструисан је нови једнакостраничан троугао (чија је страница висина првобитног троугла), па је над висином новог троугла конструисан следећи једнакостраничан троугао, итд, видети слику ... . Израчунати збир обима и збир површина свих овако конструисаних једнакостраничних троуглова (њих бесконачно много).

Решење. Странице ових троуглова чине геометријски низ. Дати троугао ABC има страницу $b_1=a$. Следећи троугао AB_1C_1 има страницу $b_2 = AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, иза њега је троугао AB_2C_2 са страницом $b_3 = b_2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$, итд. Збир обима свих троуглова, користећи формулу (1.5), једнак је

$$O = O_1+O_2+O_3+\ldots = 3a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}+\ldots\right) = \frac{3a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2-\sqrt{3}} = 6a(2+\sqrt{3}).$$

Збир површина свих троуглова, користећи формулу (1.5), је

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{3a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots =$$

$$= \tfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{16} + \ldots\right) = a^2\tfrac{\sqrt{3}}{4}\tfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}.$$

△

1.2.42. У круг полупречника r је уписан квадрат, а онда у тај квадрат је уписан круг. Затим је поново у добијени круг уписан квадрат, па у квадрат круг, и тако до бесконачности. Израчунати границу којој теже обими свих квадрата и површине свих кругова.

Решење. Први квадрат је странице $r\sqrt{2}$, затим, уписан круг полупречника $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, па квадрат странице $\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$, круг полупречника $\frac{1}{2}\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$ и тако даље. Збир обима свих квадрата је

$$O = 4r\sqrt{2} + 4\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + 4\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots,$$

што је бесконачни збир са првим чланом $4r\sqrt{2}$ и количником $\frac{1}{\sqrt{2}}$, па је

$$O = 4r\sqrt{2}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4r\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4r\frac{2}{\sqrt{2}-1}.$$

Збир површина свих кругова је

$$P = r^2\pi + (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2\pi + \ldots = r^2\pi + \frac{1}{2}r^2\pi + \ldots,$$

што је бесконачни збир са првим чланом $r^2\pi$ и количником $\frac{1}{2}$, па је

$$P = r^2\pi\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = r^2\pi\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2r^2\pi.$$

△

1.2.43. Израчунати збир $\dfrac{5}{2} + 5 + \dfrac{19}{2} + 18 + \ldots + \dfrac{n+2^{n+1}}{2}$.

Решење. Тражени збир је једнак

$$\frac{5}{2} + 5 + \frac{19}{2} + 18 + \ldots + \frac{n+2^{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{1+2^{1+1}}{2} + \frac{2+2^{2+1}}{2} + \ldots + \frac{n+2^{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+2+\ldots+n) + \frac{1}{2}(2^{1+1}+2^{2+1}+\ldots+2^{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + (2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} + 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{n(n+1)}{4} + 2(2^n - 1). \quad \triangle$$

1.2.44. Ако је (b_n) геометријски низ и $b_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, какав низ чине логаритми чланова датог низа? Наћи збир првих n чланова добијеног низа.

Решење. Дефинишимо низ $a_n = \log b_n$. Ако је q количник низа b_n, онда је $a_{n+1} - a_n = \log b_{n+1} - \log b_n = \log b_1 q^n - \log b_1 q^{n-1} = \log \dfrac{b_1 q^n}{b_1 q^{n-1}} = \log q$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказали смо да је низ (a_n) аритметички са разликом $d = \log q$. Тражени збир је $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)] = \dfrac{n}{2}[2\log b_1 + (n-1)\log q]$. $\triangle$

1.2.45. Ако су бројеви a, b и c истовремено пети, седамнаести и тридесет седми члан једне аритметичке и једне геометријске прогресије, доказати да је $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$.

Решење. Означимо са (a_n) аритметички низ са разликом d и са (b_n) геометријски низ са количником q. Тада је $a = a_1 + 4d$, $b = a_1 + 16d$, $c = a_1 + 36d$, $a = b_1 q^4$, $b = b_1 q^{16}$, и $c = b_1 q^{36}$. Заменом у дати израз добијамо
$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} =$

$$= (b_1 q^4)^{a_1+16d-(a_1+36d)} \cdot (b_1 q^{16})^{a_1+36d-(a_1+4d)} \cdot (b_1 q^{36})^{a_1+4d-(a_1+16d)} =$$

$$= (b_1 q^4)^{-20d} \cdot (b_1 q^{16})^{32d} \cdot (b_1 q^{36})^{-12d} =$$
$$= b_1^{-20d+32d-12d} \cdot q^{-80d+16\cdot 32d-36\cdot 12d} = b_1^0 q^0 = 1. \quad \triangle$$

1.2.46. Низ бројева $1, 8, 22, 43, \ldots$ има особину да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ 7,14,21.... Наћи индекс члана датог низа који је једнак $a_n = 35351$.

Решење. Означимо први низ са (a_n) и други низ (аритметички) са (b_n). Задовољена је седећа релација $b_k = a_{k+1} - a_k$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Можемо приметити да је $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + ... + a_n - a_{n-1} = a_n - a_1$, одакле $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = a_1 + S_{n-1}$, где је S_{n-1} збир првих $n-1$ чланова аритетичког низа (b_n).
Из услова задатка је $a_n = 35351$, па важи $a_1 + \frac{n-1}{2}[2b_1 + d(n-2)] = 35351$. Ако у једначину убацимо познате вредности $a_1 = 1$, $b_1 = 7$ и $d = 7$ добијамо $7n^2 - 7n - 70700 = 0$, а њено позитивно решење је $n = 101$. $\triangle$

1.2.47. У аритметичком низу са различитим члановима први, трећи и седми члан образују геометријски низ. Ако је први члан аритметичког низа 20, наћи десети члан аритметичког низа.

Решење. Означимо са (a_n) аритметички низ са разликом d. Први, трећи и седми члан образују геометријски низ па важи $a_3^2 = a_1 a_7$, односно
$(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d)$. Како је $a_1 = 20$, то је $(20 + 2d)^2 = 20(20 + 6d) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ 400 + 80d + 4d^2 = 400 + 120d \ \Leftrightarrow\ d(d-10) = 0 \ \Leftrightarrow\ d = 0 \ \vee\ d = 10.$

С обзиром да су чланови аритметичког низа међусобно различити, разлика је $d = 10$, па је $a_{10} = 110$. △

1.2.48. Дати су аритметички низ и геометријски низ са првим чланом $b_1 = 1$ и количником $q > 0$. Трећи низ $1, 3, 6, \ldots$ формиран је сабирањем одговарајућих чланова аритметичког и геометријског низа. Израчунати збир првих 10 чланова трећег низа.

Решење. Означимо аритметички низ са (a_n), геометријски низ са (b_n), а трећи низ са (c_n). Очигледно је да из $a_1 + b_1 = 1$, $a_2 + b_2 = 3$, $a_3 + b_3 = 6$ следи да је $a_1 = 0$, $d + q = 3$, $2d + q^2 = 6$, а одавде $d = 1$, $q = 2$. Збир је $S_{10} = c_1 + c_2 + \ldots + c_{10} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_{10} + b_{10}) = a_1 + a_2 \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 5[2a_1 + 9d] + b_1 \dfrac{1 - q^{10}}{1 - q} = 44 + 2^{10}$. △

1.2.49. Ако се средњи од три броја који образују геометријски низ повећа за 10, добија се аритметички низ са разликом 20. Колики је збир цифара тог средњег броја?

Решење. Прва три члана геометријског низа су a_1, a_1q, a_1q^2. После повећања добија се аритметички низ a_1, $a_1q + 10$, a_1q^2 са разликом $d = 20$. Одавде добијамо систем

$$\begin{aligned} a_1q + 10 - a_1 &= 20, \\ a_1q^2 - (a_1q + 10) &= 20, \end{aligned}$$

који је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} a_1(q - 1) &= 10, \\ a_1q(q - 1) &= 30. \end{aligned}$$

Ако је $q \neq 1$, онда дељењем друге једначине са првом добијамо $q = 3$, а одатле $a_1 = 5$. За $q = 1$ систем нема решење.
Према томе, други члан је низа је $a_2 = a_1q = 15$. Збир његових цифара је 6. △

1.2.50. Низ (x_n) је истовремено аритметички и геометријски. Ако је $x_{128} = 2^{128}$, колико је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{128}$?

Решење. С обзиром да је низ истовремено и аритметички и геометријски, важи $x_1 + nd = x_1q^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Из система

$$\begin{aligned} x_1q^{127} &= 2^{128}, \\ x_1 + 127d &= 2^{128}, \end{aligned}$$

можемо изразити $x_1 = \dfrac{2^{128}}{q^{127}}$, па заменом у другу једначину добијамо $\dfrac{2^{128}}{q^{127}} + 127d = 2^{128}$, одакле имамо $d = \dfrac{1}{127}\left(2^{128} - \dfrac{2^{128}}{q^{127}}\right)$. Заменом d у почетну

једначину добијамо $\frac{2^{128}}{q^{127}} + n\frac{1}{127}\left(2^{128} - \frac{2^{128}}{q^{127}}\right) = \frac{2^{128}}{q^{127}}q^n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Множењем са $\frac{q^{127}}{2^{128}}$ имамо $1 + n\frac{1}{127}\left(q^{127} - 1\right) = q^n$, за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $\frac{q^n - 1}{n} = \frac{q^{127} - 1}{127}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Ово је задовољено само за $q = 1$. Наиме, ако важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда важи и за $n = 1$ и $n = 2$, па је $\frac{q^1-1}{1} = \frac{q^2-1}{2}$, то јест $(q-1)^2 = 0$. Провером видимо да за $q = 1$ важи $\frac{q^n - 1}{n} = \frac{q^{127} - 1}{127}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.
Добили смо да је (x_n) константан низ код кога је $x_1 = 2^{128},\ d = 0,\ q = 1$.
Тражена сума је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{128} = 128 \cdot 2^{128} = 2^{135}$. △

1.3 Задаци за вежбу

1.3.51. Бројеви a, b, c су узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да су и бројеви a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2 такође узастопни чланови аритметичког низа.

Решење. Искористити чињеницу да су бројеви a, b, c узастопни чланови аритметичког низа *akko* важи $2b = a + c$. △

1.3.52. Ако позитивни бројеви a, b и c чине аритметичку прогресију, доказати да то важи и за бројеве $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Решење. Искористити чињеницу да је $2b = a + c$. △

1.3.53. Ако бројеви a^2, b^2, c^2 чине аритметичку прогресију, доказати да и бројеви $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ чине аритметичку прогресију.

Решење. Искористити чињеницу да је $2b^2 = a^2 + c^2$. △

1.3.54. Ако су бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$ узастопни чланови аритметичког низа, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

Решење. Рационалисати сабирке. △

1.3.55. Нека су позитивни бројеви $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да је

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Решење. Искористити чињеницу да је $a_n = a_1 + (n-1)d$. △

1.3.56. Ако је за свако n збир првих n чланова неког аритметичког низа $S_n = 4n^2 - 3n$, написати прва три члана тог низа.

Решење. Прва три члана тог низа су $1, 9$ и 17. △

1.3.57. Ако за аритметички низ важи $S_n = S_m (n \neq m)$, доказати да је $S_{m+n} = 0$.

Решење. Искористити формулу за суму неколико првих чланова аритметичког низа. △

1.3.58. Одредити све аритметичке низове чија је разлика $d = 2$, а израз $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$ не зависи од n.

Решење. Низ $1, 3, 5, 7, \ldots$. △

1.3.59. Дати су реални бројеви a, b, c. Под којим условима постоји аритметички низ, такав да је за свако n збир S_n првих n његових чланова једнак $an^2 + bn + c$?

Решење. $c = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. △

1.3.60. У аритметичком низу је $a_m = n$ и $a_n = m$ за неке m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Наћи a_k.

Решење. Општи члан низа је $a_k = n + m - k$. △

1.3.61. У једном аритметичком низу први члан је 11 и седми 35. Његов четврти члан је једнак четвртом члану другог аритметичког низа. Први и последњи члан другог низа су 38 и 13. Колико чланова има други низ?

Решење. Други низ има 6 чланова. △

1.3.62. Наћи аритметичку прогресију код које збир првих n чланова износи $3n^2 + 4n$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. $a_1 = 7$, $d = 6$. △

1.3.63. Дата су два аритметичка низа чије су разлике 13 и $\sqrt{13}$. Доказати да постоји највише један број који се појављује у оба низа.

Решење. Не постоје $m, n \in \mathbb{N}$ тако да је задовољено $m \cdot 13 = n \cdot \sqrt{13}$. △

1.3.64. Ако у геометријском низу b_n збир прва два члана $S_2 = 25$, а збир прва три члана $S_3 = 105$, одредити први члан b_1 и количник q.

Решење. $q_1 = -\dfrac{4}{5}$, $b_1 = 125$ или $q_2 = 4, b_1 = 5$. △

1.3.65. Разлика четвртог и првог члана геометријског низа је 52, а збир прва три члана низа је 26. Наћи збир првих шест чланова тог низа.

Решење. Збир првих шест чланова тог низа је $S_6 = 242$. △

1.3.66. Наћи четири броја који су узастопни чланови геометријског низа у којем је други члан мањи од првог за 35, а трећи већи од четвртог за 560.

Решење. $7, -28, 112, -448$ или $-11\frac{2}{3}, -46\frac{2}{3}, -186\frac{2}{3}, -746\frac{2}{3}$. △

1.3.67. Доказати да је

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)(10^{n+1} + 5) + 1 = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2.$$

Решење. Искористити формулу за збир првих n чланова геометријског низа. △

1.3.68. Израчунати збир $1 + 2^2 q + \ldots + (n+1)^2 q^n, q \neq 1$.

Решење. $\dfrac{2(1-q^{n+1})}{(1-q)^3} - \dfrac{1+(n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2} - \dfrac{(n+1)^2 q^{n+1}}{1-q}$. △

1.3.69. У геометријском низу $b_1, b_2, \ldots$ важи $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$. Ако је збир првих n чланова низа $S_n = 3069$, наћи n.

Решење. $n = 10$. △

1.3.70. Наћи вредност збира $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{10}$ ако је $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решење. Вредност збира је $\frac{(1+i)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. △

1.3.71. Збир три броја који образују опадајући геометријски низ је 126. Ако је средњи члан 24, који је први члан?

Решење. $a_1 = 96$. △

1.3.72. У растућој геометријској прогресији збир прва три члана је 52, а производ првог и трећег члана је 144. Колики је збир прва два члана те прогресије?

Решење. Збир прва два члана је $b_1 + b_2 = 16$. △

1.3.73. Нека су $375, a, b, c, d$ и $-0,12$ узастопни чланови геометријском низа. Колико је $b + c$?

Решење. $b + c = 12$. △

1.3.74. Између 3 и 768 уметнути три броја, тако да свих пет бројева чине геометријску прогресију.

Решење. $3, 12, 48, 192, 768$. △

1.3.75. На дужи $|AB| = 195cm$ наћи тачке C и D, тако да дужине добијених делова чине геометријски низ и $|BD| = |AC| + 120cm$.

Решење. $|AC| = 15cm$, $|CD| = 45cm$, $|DB| = 135cm$. △

1.3.76. Наћи пети и осми члан геометријског низа (b_n) ако је $b_2 = 3$ и $q = -4$.

Решење. $b_5 = -192, b_8 = 4 \cdot 4^6$. △

1.3.77. Збир три броја који су узастопни чланови геометријског низа је 13, а збир њихових квадрата је 91. Наћи те бројеве.

Решење. $q = 3, b_1 = 1$ или $q = \frac{1}{3}, b_1 = 9$. △

1.3.78. Наћи количник геометријског низа (b_n) ако је $b_2 = 6, b_8 = 384$.

Решење. $q = 2$ или $q = -2$. △

1.3.79. Ако је S_n збир првих n чланова геометријског низа, доказати да је $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

Решење. Искористити формулу за суму n првих чланова геометријског низа. △

1.3.80. Израчунати збир $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$

Решење. $S = 2$. △

1.3.81. Израчунати збир $x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\ |x| < 1$.

Решење. $S = \dfrac{x}{1-x}$. △

1.3.82. Израчунати збир $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,\ |x| < 1$.

Решење. $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1+x}$. △

1.3.83. Израчунати збир $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots,\ |x| < \dfrac{1}{2}$.

Решење. $S = \dfrac{1}{1-2x}$. △

1.3.84. Израчунати збир $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решење. $S = \dfrac{1}{1 - \sin x}$. △

1.3.85. Доказати да је:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right).$$

Решење. Збирови на левој и десној страни су једнаки и износе $S = 3$. △

1.3.86. За коју вредност x збир геометријског реда

$$\frac{1}{7^x+1}+\frac{1}{(7^x+1)^2}+\frac{1}{(7^x+1)^3}+\ldots$$

износи 7?

Решење. $x=-1$. △

1.3.87. Решити једначину $3+10+17+\ldots+x=345$.

Решење. $x=66$. △

1.3.88. У круг полупречника r је уписан једнакостраничан троугао, а онда у тај троугао уписан је круг. Затим је поново у добијени круг уписан једнакостраничан троугао, па у троугао круг, и тако до бесконачности. Израчунати границу којој теже обими и површине свих троуглова.

Решење. $O=6r\sqrt{3}$, $P=r^2\sqrt{3}$. △

1.3.89. Бројеви $5x-y$, $2x+3y$, $x+2y$ су узастопни чланови аритметичког низа, а бројеви $(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ су узастопни чланови геометријског низа. Наћи x и y.

Решење. $(x,y)=(0,0)$ или $(x,y)=(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$ или $(x,y)=(-\frac{3}{4},-\frac{3}{10})$. △

1.3.90. Одредити четири броја, тако да прва три одређују геометријски низ, а последња три аритметички низ и при томе је збир првог и последњег 14, а збир остала два је 12.

Решење. $2,4,8,12$ или $\dfrac{25}{2},\dfrac{15}{2},\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{2}$. △

1.3.91. Наћи збир n разломака $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{4}+\ldots$, ако бројиоци разломака чине аритметичку, а имениоци геометријску прогресију.

Решење. $S_n=7-\dfrac{4n-1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n-3}}$ $(n\geq 3)$. △

1.3.92. Нека су a_1,a_2,a_3,a_4 узастопни чланови растућег аритметичког низа, а b_1,b_2,b_3,b_4 узастопни чланови геометријског низа.
Ако је $a_1=b_1=1, a_2=b_2$ и $b_3-a_3=1$, наћи b_4-a_4.

Решење. $q=2$,$a_4=7$ и $b_4=8$. △

1.3.93. Ако бројеви $a_n, n\in\mathbb{N}$ образују аритметички низ, доказати да бројеви $b_n=2^{a_n}, n\in\mathbb{N}$ образују геометријски низ.

Решење. Искористити чињеницу да је позитиван низ (b_n) геометријски *akko* $b_n=\sqrt{b_{n+1}b_{n-1}}$. △

1.3.94. У геометријском низу први, трећи и пети члан, редом су једнаки првом, четвртом и шестнаестом члану неког аритметичког низа. Наћи четврти члан аритметичког низа ако је његов први члан 5.

Решење. Четврти члан аритметичког низа је $a_4 = a_1 + 3d = 5 + 3 \cdot 5 = 20$ или $a_4 = 5 + 3 \cdot 0 = 5$. △

1.3.95. У аритметичком низу са различитим члановима први, пети и једанаести члан образују геометријски низ. Ако је први члан 24, колики је десети члан аритметичког низа?

Решење. $a_{10} = 51$. △

Глава 2

Ирационалне једначине и неједначине

2.1 Теоријски увод

Под ирационалним једначинама подразумевају се једначине код којих се непозната налази под знаком корена. Такве једначине могу бити сложене, па се могу решити само неке једноставнијег типа. Основна идеја при решавању ирационалних једначина јесте да се елеминише корен (пре свега, степеновањем), односно да се добије еквивалентна једначина у којој се не појављује непозната под кореном.
Степеновањем једначине не добијамо увек еквивалентну једначину, већ можемо добити једначину која поред решења полазне једначине може имати још решења. Једноставан пример за ово је једначина $\sqrt{x} = -1$ која нема реалних решења, а ако је квадрирамо добићемо једначину $x = 1$ која има једно реално решење. Или једначина $x + 1 = \sqrt{x+7}$, која се квадрирањем своди на једначину $(x+1)^2 = x + 7$ чија су решења $x = 2$ и $x = -3$. Међутим, провером можемо видети да $x = 2$ јесте решење полазне једначине, а $x = -3$ није решење.
Област дефинисаности једначине (скуп допустивих решења) је скуп реалних бројева за који су дефинисане поткорене функције у ирационалној једначини.
Посматрајмо ирационалне једначине облика $\sqrt{a(x)} = b(x)$. Видимо да изрази $a(x)$ и $b(x)$ морају бити ненегативни.
Квадрирањем добијамо следећу еквиваленцију

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x) = b^2(x) \;\wedge\; a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) \geq 0.$$

Неједнакост $a(x) \geq 0$ није потребно писати јер је садржана у неједнакости $a(x) = b^2(x)$. Према томе, важи следећа једноставнија еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x) = b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{2.1}$$

Ако је ирационална једначина облика $\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)}$, онда важи

$$\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)} \;\Leftrightarrow\; a(x) = b(x) \;\wedge\; a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{2.2}$$

Можемо закључити, ирационална једначина облика $\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је једначини $a(x) = [b(x)]^n$, а за паран број $n \in \mathbb{N}$ систему $a(x) = [b(x)]^n$, $b(x) \geq 0$.

Код ирационалних неједначина је мало сложеније решавање. Квадрирање неједнакости није увек дозвољено зато што ако множимо са негативним бројем мења се знак неједнакости, а ако множимо са позитивним бројем знак једнакости остаје. Једноставан пример за то је тачна неједнакост $-2 < -1$, коју када квадрирамо добијамо нетачну неједнакост $4 < 1$. Посматрајмо следеће облике неједнакости:
1° $\sqrt{a(x)} \leq b(x)$
Очигледно је да мора бити $b(x) \geq 0$ и $a(x) \geq 0$, па важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \leq b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) \leq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{2.3}$$

2° $\sqrt{a(x)} < b(x)$
Десни израз мора бити позитиван, одакле добијамо

$$\sqrt{a(x)} < b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) < b^2(x) \;\wedge\; b(x) > 0. \tag{2.4}$$

3° $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$
Овде немамо услов да $b(x)$ мора да буде ненегативно, па неједнакост може бити задовољена и ако је $b(x)$ негативно.
Ако је $b(x) \geq 0$, потребно је да важи $a(x) \geq 0$ и $a(x) \geq b^2(x)$, а ако је $b(x) < 0$ довољно је да $a(x) \geq 0$ и неједнакост је задовољена.
Према томе, важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \geq b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) \geq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{2.5}$$

4° $\sqrt{a(x)} > b(x)$
Као и у претходном облику, овде важи

$$\sqrt{a(x)} > b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) > b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{2.6}$$

Сада ћемо посматрати неједначине у којима се јавља n-ти корен.
Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) < [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$0 \leq f(x) < [g(x)]^n,\; g(x) > 0.$$

Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) > [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$\big(f(x) > [g(x)]^n \;\wedge\; g(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(f(x) \geq 0 \;\wedge\; g(x) < 0\big).$$

2.2 Решени задаци

2.2.1. Решити једначину $x-1=\sqrt{7-x}$.

Решење. Једначина је облика $\sqrt{a(x)}=b(x)$, па на основу (2.1) еквивалентна је следећем систему

$$(x-1)^2=7-x \ \wedge \ x-1\geq 0.$$

Решење прве једначине је $x_1=3, x_2=-2$, а услов $x\in[1,7]$ задовољава само решења $x_1=3$. Добили смо да је решење ирационалне једначине $x=3$. △

2.2.2. Решити једначину $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$.

Решење. Област дефинисаности је скуп реалних бројева x за које је $2x+8\geq 0$ и $x+5\geq 0$, дакле област дефинисаности је $D=[-4,+\infty)$. Пошто је лева страна једначине збир два ненегативна корена, дакле ненегативна, а десна страна позитивна константа, квадрирањем ћемо добити еквивалентан систем

$$2x+8+2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+x+5=49 \ \wedge \ x\in D,$$

односно

$$2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}=36-3x \ \wedge \ x\in[-4,+\infty).$$

Овај систем је, слично као (2.1), еквивалентан систему

$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2 \ \wedge \ 36-3x\geq 0 \ \wedge \ x\in[-4,+\infty),$$

па и систему

$$x^2-288x+1136=0 \ \wedge \ x\leq 12 \ \wedge \ x\in[-4,+\infty).$$

Добијена квадратна једначина има решења $x_1=4$ и $x_2=284$, али због услова $x\leq 12$, једино решење овог система је $x_1=4$. △

2.2.3. Решити једначину $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=5$.

Решење. Област дефинисаности је $D=\{x\in\mathbb{R}|7x+1\geq 0\wedge 3x-18\geq 0\}$, дакле $D=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq 6\}$.
Овде је лева страна једначине за неке вредности $x\in D$ негативна, па је подесније једначину трансформисати у облик

$$\sqrt{7x+1}=\sqrt{3x-18}+5,\ x\in D,$$

а затим квадрирати. После сређивања, добија се еквивалентан систем

$$2x-3=5\sqrt{3x-18},\ x\in D,$$

који је даље еквивалентан систему

$$(2x-3)^2=25(3x-18)\ \wedge x\geq\frac{3}{2}\ \wedge\ x\in D,$$

односно

$$4x^2 - 87x + 459 = 0 \wedge x \geq 6.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = 9, x_2 = \frac{51}{4}$ и оба задовољавају услов $x \geq 6$, па су и решења ирацоналне једначине. △

2.2.4. Решити једначину $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$.

Решење. Област дефинисаности једначине је

$$x^2 - x \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - x - x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0,$$

а одавде

$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \quad \wedge \quad x \in [-2, 1] \quad \wedge \quad x \geq 0,$$

што даје $x = 1$. Према томе, допустив скуп решења једначине је $D = \{1\}$. Провером можемо утврдити да је то решење једначине.

△

2.2.5. Решити једначину $(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 0$.

Решење. Област дефинисаности једначине је решење система

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 7x + 6 \geq 0,$$

а одатле $D = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$. Решење једначине је

$$\big(x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 6 = 0\big) \quad \wedge \quad x \in D,$$

односно

$$x \in \{-1, 1, 3, 6\} \quad \wedge \quad x \in D.$$

Одавде $x \in \{-1, 1, 6\}$.

△

2.2.6. Решити једначину $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{12(x - 1)}$

Решење. Област дефинисаности ове једначине је $D = \mathbb{R}$. Степеновањем са три добијамо еквивалентну једначину

$$x + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x - 3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}) + 2x - 3 = 12x - 12.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{12(x - 1)} = 3x - 3,$$

одакле степеновањем са три добијамо

$$12x(2x - 3)(x - 1) = 27x^3 - 81x^2 + 81x - 27.$$

Последња једначина је еквивалентна једначини $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$. Решења дате једначине су $x = 1$, $x = 3$. Међутим неопходна је провера!!!

Ако заменимо оба решења у почетну једначину видећемо да је задовољена и тиме смо доказали да су решења тражене једначине $x = 1$ и $x = 3$. Провера је неопходна, јер смо у току рада заменили $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$ са $\sqrt[3]{12(x-1)}$, а то не мора да важи. $\triangle$

2.2.7. Решити неједначину $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}} = 1$

Решење. Област дефинисаности ове једначине је $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Степеновањем са три добијамо еквивалентну једначину

$$x + 3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}) + x = 1.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо

$$3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}} = 1 - 2x,$$

одакле степеновањем са три добијамо

$$27(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3.$$

Последња једначина је еквивалентна једначини $8x^3 - 12x^2 + 6x + 26 = 0$. Једино реално решење последње једначине је $x = -1$. Образложили смо у претходном задатку да је неопходна провера. Заменом у почетну једначину уверавамо се да $x = -1$ није решење. Према томе, ова једначина нема реалних решења.

$\triangle$

2.2.8. Решити једначину $\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4$.

Решење. Област дефинисаности D је интервал $-\frac{35}{2} \le x \le \frac{47}{2}$. Уведимо смену $\sqrt[4]{47-2x} = u$, $\sqrt[4]{35+2x} = v$. Добијамо систем једначина $u^4 + v^4 = 82$, $u + v = 4$. Ако означимо $uv = t$, трансформацијом леве стране прве једначине имамо $u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = (16-2t)^2 - 2t^2 = 2t^2 - 64t + 256$, тако да добијамо квадратну једначину $t^2 - 32t + 87 = 0$, а одавде $t_1 = 29$, $t_2 = 3$. Преостаје још да се реше системи

$$\begin{array}{c} u+v=4 \\ uv=3 \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{c} u+v=4 \\ uv=29 \end{array}.$$

Решимо први систем. Ако из прве једначине изразимо u преко v и убацимо у другу једначину добићемо $(4-v)v = 3$, односно $v_1 = 3, v_2 = 1$, а $u_1 = 1$, $u_2 = 3$. Добили смо уређене парове $(u_1, v_1) = (1, 3)$ и $(u_2, v_2) = (3, 1)$. Одавде је $x_1 = 23 \in D, x_2 = -17 \in D$.
На сличан начин решавамо и други систем и добијамо једначину $v^2 - 4v + 29 = 0$ која нема реална решења. Значи, решења тражене једначине су $x_1 = 23$ и $x_2 = -17$. $\triangle$

2.2.9. Решити једначину $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

Решење. Ако уведемо смену $t=3x^2+5x+1$ долазимо до једначине $\sqrt{t+7}-\sqrt{t}=1$, чија је област дефинисаности $D_t=[0,+\infty)$. Пребацимо $\sqrt{t}$ на десну страну и добијамо $\sqrt{t+7}=\sqrt{t}+1$, где су обе стране ненегативне. Ако је квадрирамо имамо $3=\sqrt{t}$, а одавде $t=9\in D_t$. Према томе, важи $9=3x^2+5x+1$, односно $x_1=1, x_2=-\frac{8}{3}$. △

2.2.10. Решити једначину $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}=2$.

Решење. С обзиром да је $x+3+2\sqrt{x+2}=x+2+2\sqrt{x+2}+1=(\sqrt{x+2}+1)^2$ и $x+3-2\sqrt{x+2}=x+2-2\sqrt{x+2}+1=(\sqrt{x+2}-1)^2$, дату једначину можемо написати у облику

$$\sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-1)^2}=2,$$

односно

$$|\sqrt{x+2}+1|+|\sqrt{x+2}-1|=2.$$

Сменом $t=\sqrt{x+2}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t=[0,+\infty)$, добија се једначина

$$|t+1|+|t-1|=2.$$

Имајући у виду дефиницију апсолутне вредности, можемо разликовати следеће случајеве:

1) $0\le t<1$. У овом случају је $|t+1|=t+1$, $|t-1|=1-t$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1-t+1=2$, односно $2=2$. Дакле, скуп решења једначине у овом случају је $[0,1)$.

2) $t\ge 1$. У овом случају је $|t+1|=t+1$, $|t-1|=t-1$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1+t-1=2$, односно $2t=2$. Решење последње једначине је $t=1$.

Добили смо да је $[0,1]$ скуп решења једначине $|t+1|+|t-1|=2$ на $D_t=[0,+\infty)$.

Према томе, скуп решења почетне једначине је скуп решења неједначине $0\le\sqrt{x+2}\le 1$. Одавде добијемо решење $x\in[-2,-1]$. △

2.2.11. Решити једначину $x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1=3x$.

Решење. Скуп допустивих решења је $D_x=[0,+\infty)$. Ако уведемо смену $t=\sqrt{x}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t=[0,+\infty)$ добићемо следећу једначину по t

$$t^3+t+1=3t^2.$$

Решимо ову једначину. Једначина је трећег степена, па то можемо урадити на следећи начин: приметимо да је једно решење $t_1=1$, онда поделимо t^3-3t^2+t+1 са $t-1$ и добијамо (t^2-2t-1). Према томе, добили смо

$(t-1)(t^2-2t-1)=0$, а одавде $t_1=1$, $t_2=1+\sqrt{2}, t_3=1-\sqrt{2}$. С обзиром да решење t_3 не задовољава услов $t\geq 0$, онда су решења једначине $t_1=1$, $t_2=1+\sqrt{2}$. Вратимо ова решења у смену и добијамо $1=\sqrt{x}$, $1+\sqrt{2}=\sqrt{x}$, одакле је $x_1=1$, $x_2=3+2\sqrt{2}$. △

2.2.12. Решити једначину $\sqrt{x-3}=x+a$, где је a реалан параметар.

Решење. Приликом решавања ове једначине, користићемо графичко представљање одговарајућих функција. Наиме, скицираћемо графике функција $y=\sqrt{x-3}$ и $y=x+a$.
График прве функције добија се транслацијом графика функције $y=\sqrt{x}$ у десно за 3. График друге функције је права паралелна правој $y=x$, а њен тачан положај зависи од вредности параметра a, сл 1....

Са слике видимо да су могућа четири случаја:
1) када права и крива немају заједничких тачака, па једначина нема решења;
2) када права додирује криву, па једначина има једно решење;
3) када права сече криву у двема тачкама и постоје два решења једначине и
4) када права сече криву само у једној тачки, па је решење једначине јединствено.
Квадрирањем дате једначине, добија се једначина

$$x^2+(2a-1)x+(a^2+3)=0,$$

чија су решења $x_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{-4a-11}}{2}$. Напред наведеним случајевима одговара следеће:
1) ако је $a>-\frac{11}{4}$, решења $x_{1,2}$ нису реална, па дата једначина нема решења;
2) ако је $a=-\frac{11}{4}$, решења се поклапају; ово је случај када права додирује криву, а дата једначина има јединствено решење $x_1=\frac{13}{4}$.
3) ако је $-3\leq a\leq-\frac{11}{4}$, оба решења x_1 и x_2 су и решења полазне једначине; притом је у граничном случају $a=-3$ једно од тих решења једнако 3 (обе стране једначине су једнаке нули);
4) ако је $a<-3$, тада је само решење $x_1=\frac{1-2a+\sqrt{-4a-11}}{2}$ уједно и решење полазне једначине. △

2.2.13. Решити неједначину $\sqrt{x^2+4x+4}\leq x+6$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)}\leq b(x)$ и према (2.3) еквивалентна је систему

$$0\leq a(x)\leq b^2(x)\ \wedge\ b(x)\geq 0.$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \leq (x+6)^2 \ \wedge\ x + 6 \geq 0,$$

односно

$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \leq x^2 + 12x + 36 \ \wedge\ x \geq -6.$$

Систем можемо раздвојити и добићемо

$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \ \wedge\ x^2 + 4x + 4 \leq x^2 + 12x + 36 \ \wedge\ x \geq -6,$$

а одатле

$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \ \wedge\ x \geq -4 \ \wedge\ x \geq -6.$$

Решење квадратне неједначине $0 \leq x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ је за свако $x \in \mathbb{R}$. Добили смо систем

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge\ x \geq -4 \ \wedge\ x \geq -6,$$

који је еквивалентан са

$$x \geq -4 \ \wedge\ x \geq -6.$$

Коначно, решење је $x \in [-4, +\infty)$. △

2.2.14. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (2.4) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) < b^2(x) \ \wedge\ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$0 \leq x^2 - 3x - 10 < (8-x)^2 \ \wedge\ 8 - x \geq 0,$$

односно

$$0 \leq x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \ \wedge\ x \leq 8.$$

Систем можемо раздвојити и добићемо

$$0 \leq x^2 - 3x - 10 \ \wedge\ x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \ \wedge\ x \leq 8,$$

а одатле

$$0 \leq x^2 - 3x - 10 \ \wedge\ x < \frac{74}{13} \ \wedge\ x \leq 8.$$

Решење квадратне једначине $0 \leq x^2 - 3x - 10$ је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$. Добили смо систем

$$\big(x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty) \ \wedge\ x < \frac{74}{13}\big) \ \wedge\ \big(x \leq 8\big),$$

који је еквивалентан са

$$\big(x \in (-\infty, -2] \cup [5, \frac{74}{13})\big) \ \wedge\ \big(x \leq 8\big).$$

Коначно решење је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, \frac{74}{13})$. △

2.2.15. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$ и према (2.5) еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$\big(3x^2-2x-1 \geq (2x-2)^2 \ \wedge \ 2x-2 \geq 0\big) \ \vee \ \big(3x^2-2x-1 \geq 0 \ \wedge \ 2x-2 < 0\big),$$

односно

$$\big(-x^2+6x-5 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 1\big) \ \vee \ \big(3x^2-2x-1 \geq 0 \ \wedge \ x < 1\big).$$

Решавањем квадратних неједначина добијамо

$$\big(x \in [1,5] \ \wedge \ x \geq 1\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1,+\infty) \ \wedge \ x < 1\big),$$

затим

$$x \in [1,5] \ \vee \ x \in \big(-\infty, -\frac{1}{3}\big].$$

Решење ирационалне неједначине је $x \in \big(-\infty, -\frac{1}{3}\big] \cup [1,5]$. △

2.2.16. Решити неједначину $\sqrt{x^2-x-12} > 7+x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} > b(x)$ и према (2.6) еквивалентна је систему

$$\big(a(x) > b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$\big(x^2-x-12 > (7+x)^2 \ \wedge \ 7+x \geq 0\big) \ \vee \ \big(x^2-x-12 \geq 0 \ \wedge \ 7+x < 0\big),$$

односно

$$\big(15x+61 < 0 \ \wedge \ x \geq -7\big) \ \vee \ \big(x^2-x-12 \geq 0 \ \wedge \ x < -7\big).$$

Решење квадратне неједначине $x^2-x-12 \geq 0$ је $x \in (-\infty,-3] \cup [4,+\infty)$, па добијамо

$$\big(x < -\frac{61}{15} \ \wedge \ x \geq -7\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty,-3] \cup [4,+\infty) \ \wedge \ x < -7\big),$$

а одавде

$$x \in \big[-7, -\frac{61}{15}\big) \ \vee \ x \in (-\infty, -7).$$

Решење ирационалне неједначине је $x \in (-\infty, -\frac{61}{15})$. △

2.2.17. Решити неједначину $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \frac{1}{2x-1}$.

Решење. Скуп допустивих вредности се налази из следећих услова

$$x+1>0 \ \wedge \ 2x-1\neq 0,$$

па је $D=(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.
Неједначина је типа $\sqrt{a(x)}>b(x)$ и према (2.6) еквивалентна је систему

$$\big(a(x)>b^2(x) \ \wedge \ b(x)\geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x)\geq 0 \ \wedge \ b(x)<0\big).$$

Према томе, једначина је еквивалентна систему

$$\left(\frac{1}{x+1}>\frac{1}{(2x-1)^2} \ \wedge \ \frac{1}{2x-1}\geq 0\right) \ \vee \ \left(\frac{1}{x+1}\geq 0 \ \wedge \ \frac{1}{2x-1}<0\right),$$

односно

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ 2x-1>0\right) \ \vee \ \big(x+1>0 \ \wedge \ 2x-1<0\big),$$

а одавде

$$\left(\frac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ x>\frac{1}{2}\right) \ \vee \ \big(x>-1 \ \wedge \ x<\frac{1}{2}\big).$$

Како је $\left(\dfrac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ x>\dfrac{1}{2}\right) \ \Leftrightarrow \ x>\dfrac{5}{4}$, добијамо

$$x>\frac{5}{4} \ \vee \ \big(x>-1 \ \wedge \ x<\frac{1}{2}\big).$$

Коначно, решење неједначине је $x\in(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{4},+\infty)$. △

2.2.18. Решити неједначину $x-2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+2<0$.

Решење. Скуп допустивих решења је цео скуп $\mathbb{R}$. Сменом $t=\sqrt[3]{x}$ неједначина се своди на $t^3-2t^2-t+2<0$, где $t\in\mathbb{R}$. Леви израз се може факторисати $t^3-2t^2-t+2=(t+1)(t-1)(t-2)$, па смо добили неједначину $(t+1)(t-1)(t-2)<0$, а одавде решење $t\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$. Решење почетне неједначине се налази из

$$\sqrt[3]{x}<-1 \ \vee \ 1<\sqrt[3]{x}<2,$$

чије је решење $x\in(-\infty,-1)\cup(1,8)$. △

2.2.19. Решити неједначину $\sqrt{3x-1}-\sqrt{7-x}\leq 2$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$3x-1\geq 0 \ \wedge \ 7-x\geq 0,$$

а то је $D=[\frac{1}{3},7]$.
Лева страна неједначине може бити и негативна, зато $\sqrt{7-x}$ пребацујемо на десну страну и добијамо

$$\sqrt{3x-1}\leq 2+\sqrt{7-x},$$

где су обе стране позитивне. Сада је неједначина еквивалентна са

$$3x-1\leq (2+\sqrt{7-x})^2 \ \wedge \ x\in D,$$

односно

$$3x-1\leq 4+4\sqrt{7-x}+7-x \ \wedge \ x\in D,$$

а одавде

$$\sqrt{7-x}\geq x-3 \ \wedge \ x\in[\frac{1}{3},7]. \tag{2.7}$$

Решимо прво неједначину $\sqrt{7-x}\geq x-3$.
Неједначина је облика $\sqrt{a(x)}\geq b(x)$ и према (2.5) еквивалентна је систему

$$\big(a(x)\geq b^2(x) \ \wedge \ b(x)\geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x)\geq 0 \ \wedge \ b(x)<0\big).$$

Према томе, добијамо систем

$$\big(7-x\geq (x-3)^2 \ \wedge \ x-3\geq 0\big) \ \vee \ \big(7-x\geq 0 \ \wedge \ x-3<0\big),$$

који је еквивалентан систему

$$\big(x^2-5x+2\leq 0 \ \wedge \ x\geq 3\big) \ \vee \ \big(x\leq 7 \ \wedge \ x<3\big),$$

а овај

$$\big(x\in[(5-\sqrt{17})/2,(5+\sqrt{17})/2] \ \wedge \ x\geq 3\big) \ \vee \ \big(x<3\big),$$

чије је решење $x\in(-\infty,(5+\sqrt{17})/2]$.
Тиме смо добили решење неједначине $\sqrt{7-x}\geq x-3$.
То решење убацимо у систем 2.7 и добијамо

$$x\in\big(-\infty,(5+\sqrt{17})/2\big] \ \wedge \ x\in\big[1/3,7\big].$$

Решење почетне ирационалне неједначине је $x\in\big[1/3,(5+\sqrt{17})/2\big]$.

△

2.2.20. Решити неједначину $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 \ \wedge \ \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

Први услов је еквивалентан са $x \in [-1,0) \cup [1,+\infty)$, а други са $x \in (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$. Следи, $D = [-1,0) \cup [1,+\infty)$. На скупу D десна страна неједнакости је ненегативна, па израз $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ пребацујемо на десну страну и добијамо

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x}},$$

где су и лева и десна страна ненегативне за сваку вредност $x \in D$.
Квадрирањем добијамо еквивалентну неједначину

$$x-\frac{1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2} + 2\frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x},$$

одакле је

$$2\frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} < x-1-\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Претпоставимо да је $x \neq 1$. Тада је $\frac{x-1}{x}$ позитивно на D, па се знак неједнакости неће променити ако је поделимо са овим изразом и добијамо

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} < \frac{x^2-x+1}{2x}, \ \ x \in D/\{1\}.$$

Неједнакост је облика $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (2.4) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) < b^2(x) \ \wedge \ b(x) > 0,$$

што је у нашем случају

$$0 \leq 1-\frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \wedge \ \frac{x^2-x+1}{2x} > 0 \ \wedge \ x \in D/\{1\}.$$

Ово је еквивалентно са следећим

$$1-\frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \wedge \ x \in (1,+\infty),$$

а одатле и са

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1 > 0 \ \wedge \ x \in (1,+\infty).$$

С обзиром да је $x^4-2x^3-x^2+2x+1 = (x^2-x-1)^2$, имамо систем

$$(x^2-x-1)^2 > 0 \ \wedge \ x \in (1,+\infty),$$

чије је решење $x \in \big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$.
Остало је да још проверимо да ли $x=1$ задовољава неједнакост. Заменом ове вредности у почетну неједнакост закључујемо да не припада скупу решења, па је коначно решење $\big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$. $\triangle$

2.2.21. Решити неједначину $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$

Решење. Неједначина $a(x)b(x) \geq 0$ еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \leq 0 \ \wedge \ b(x) \leq 0\big).$$

Према томе, неједначина је еквивалентна систему

$$\big(x-1 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \geq 0\big) \ \vee \ \big(x-1 \leq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \leq 0\big),$$

из чега следи

$$\big(x \geq 1 \ \wedge \ x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)\big) \ \vee \ \big(x \leq 1 \ \wedge \ x \in \{-1,2\}\big),$$

а одавде

$$x \in [2,+\infty) \ \vee \ x=-1.$$

Решење неједначине је $x \in \{-1\} \cup [2,+\infty)$. △

2.2.22. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+2)(x^2-8x+16)} \geq 0.$

Решење. Неједначина је еквивалентна следећем систему неједначина

$$x^2-2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad (x+2)(x^2-8x+16) > 0,$$

а одавде

$$x^2-2x-3 \geq 0 \wedge \left[\big(x+2>0 \wedge (x-4)^2>0\big) \vee \big(x+2<0 \wedge (x-4)^2<0\big)\right],$$

што даје

$$x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) \ \ \wedge \ \ x \in (-2,4) \cup (4,+\infty).$$

Решење неједначине је $x \in (-2,-1] \cup [3,4) \cup (4,+\infty)$. △

2.3 Задаци за вежбу

2.3.23. Решити једначину $\sqrt{x^4-4x-16} = 2-x$.

Решење. $x=-\sqrt{5}$. △

2.3.24. Решити једначину $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$.

Решење. $x_1=4, x_2=11$. △

2.3.25. Решити једначину $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}$.

Решење. $y=-2$. △

2.3.26. Решити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решење. $5 \leq x \leq 10$. △

2.3.27. Решити једначину $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

Решење. $x_1 = 8, x_{2,3} = 8 \pm \frac{12}{7}\sqrt{21}$. △

2.3.28. Решити једначину $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x+3}$.

Решење. $x = -1$. △

2.3.29. Решити једначину $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$.

Решење. $x = 81$. △

2.3.30. Решити једначину $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

Решење. $x_1 = 0, x_2 = \frac{63}{65}a$. △

2.3.31. Решити једначину $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Решење. $x_1 = 16, x_2 = 81$. △

2.3.32. Решити једначину $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$.

Решење. $x = 8$. △

2.3.33. Решити једначину $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$.

Решење. $x = 2^{10}$. △

2.3.34. Решити једначину $\sqrt{x^2-2|x|+1} = 1$.

Решење. $x \in \{0, 2, -2\}$. △

2.3.35. Решити неједначину $\sqrt{x+78} < x+6$.

Решење. $x > 3$. △

2.3.36. Решити неједначину $\sqrt{-x^2+x+6} > 1-x$.

Решење. $-1 < x \geq 3$. △

2.3.37. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$.

Решење. $x \in \big(-\infty, -\frac{1}{3}\big] \cup [1, 5]$. △

2.3.38. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x+2} \leq 2x-1$.

Решење. $x \in \big[(1+\sqrt{13})/6, 1\big] \cup [2, +\infty)$. △

2.3.39. Решити неједначину $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решење. $x \in [0, (3-\sqrt{5})/6)$. △

2.3.40. Решити неједначину $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}>\sqrt{4x-3}$.

Решење. $x>3$. △

2.3.41. Решити неједначину $\frac{1}{x}(1-\sqrt{1-9x^2})<1$.

Решење. $x\in\big[-1/3,0\big)\cup\big(0,1/5\big)$. △

2.3.42. Решити неједначину $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

Решење. $x\in\big((\sqrt{13}-5)/2,1\big]$. △

2.3.43. Решити неједначину $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}\geq 0,5$.

Решење. $x\in\big(-1,1-\sqrt{2}\,\big]\cup\big(1,\sqrt{2}\,\big]$. △

2.3.44. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1}\leq 6\sqrt{x}$.

Решење. $x\in[0,1)\cup\big(0,\frac{45}{8}\big)$. △

2.3.45. Решити неједначину $\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-x}>1$.

Решење. $x\in(0,1)\cup(9,+\infty)$. △

Глава 3

Комплексни бројеви

3.1 Теоријски увод

Једноставна једначина $x^2+1=0$ нема решења у скупу реалних бројева. Да би отклонили овај недостатак реалних бројева решаваћемо једначину на скупу комплексних бројева у коме се реални бројеви налазе као подскуп. Комплексни бројеви су изрази облика $a+ib$, где су a и b реални бројеви, а i симбол.
За комплексан број $z=a+ib$, реалан број a је његов реални део, ознака $a=\mathrm{Re}(z)$, а реалан број b је његов имагинаран део, ознака $b=\mathrm{Im}(z)$.
Симбол i зовемо имагинарна јединица која има својство $i^2=-1$. За комплексан број $z=a+ib$ је њему конјугован број $\overline{z}=a-ib$.
Модул комплексног броја $z=a+ib$ је (ненегативан) број $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
Под n-тим кореном броја z подразумевамо сваки комплексан број чији је n-ти степен једнак z.
С обзиром да је $i^2=-1$, важи да је $i^3=i^2\cdot i=-i$, затим, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, итд. Математичком индукцијом се може доказати да важи

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Нека је у равни σ задат Декартов правоугли координатни систем Oxy, чиме је свакој тачки додељен уређен пар реалних бројева. Следеће пресликавање

$$T:\mathbb{C}\to\sigma,\ \mathbb{C}\ni z=x+iy\to T(x,y)\in\sigma$$

је бијекција и њоме сваком комплексном броју додељујемо једну тачку равни σ и обратно, свака тачка равни σ је слика тачно једног комплексног броја, (сл 2...).
Осу Ox називамо реалном осом, а Oy имагинарном осом.

Раван σ зовемо комплексна раван и за сваки комплексан број $z = a + ib$ у тој равни важе следеће особине:
1° Конјугован број $\overline{z} = a - ib$ се добија симетријом тачке z у односу на реалну осу (сл 3...).

2° Комплексан број $-z$ се добија симетријом тачке z у односу на тачку 0 (сл 4...).

3° Модул $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ је растојање између тачака z и 0 (сл 5...).

4° Вектор положаја тачке $z_1 + z_2$ једнак је збиру вектора положаја тачака z_1 и z_2 (сл 6...).

5° Растојање између тачака које одговарају комплексним бројевима z_1 и z_2 једнако је модулу разлике та два броја, $|z_1 - z_2|$ (сл 7...).

6° Скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за који важи $|z - z_0| = R$, где је z_0 дати комплексан број, јесте кружна линија са центром у z_0 и полупречником R (сл 8...).

7° Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у тригонометријском облику

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја, ознака $\arg z$ (сл 9...).

Производ два комплексна броја $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ је

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi)\big),$$

где $l \in \{-1, 0, 1\}$ бирамо такво да $\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi \in (-\pi, \pi]$.

Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у поларном облику

$$z = re^{i\varphi},$$

где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја, при чему је $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Према томе, важи $e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Нека је дата тачка T у комплексној равни која одговара комплексном броју $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $(\varphi \in (-\pi, \pi])$. Тачку T' која одговара комплексном броју za, где је $a = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, можемо добити ротацијом око 0 тачке T за оријентисани угао α (сл 10...).

(Муаврова формула) Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, онда за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{3.1}$$

Нека је дат комплексни број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Његови различити n-ти корени су облика

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{3.2}$$

Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Тачке у комплексној равни које одговарају n-тим коренима комплексног броја z припадају кружној линији полупречика $\sqrt[n]{r}$ са центром у координатном почетку и представљају темена правилног n-тоугла, чије једно теме одговара комплексном броју $\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n})$(сл 11...).

Решења квадратне једначине $x^2 + 9 = 0$ су $x_{1,2} = \pm 3i$. Често се пише $x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. Међутим, овде је некоректно $\sqrt{-9}$ јер унутар корена је негативан број. Али, да би једноставније решили задатак и са краћим записом, намерно ћемо правити ту грешку.

За сваки комплексан број $z = a + ib$ важи:
а) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2a$;
б) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 2ib$;
в) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
г) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
д) $|z^2| = |z|^2$;
ђ) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
е) $|\overline{z}| = |z|$;
ж) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

3.2 Решени задаци

3.2.1. Израчунати $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 - z_2$ ако је $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Решење. Из дефиниције сабирања, одузимања и множења комплексних бројева налазимо

$$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 1 - 3i = 4 - i,$$
$$z_1 - z_2 = 3 + 4i - (1 - 3i) = 2 + 7i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(1 - 3i) = 15 - 5i.$$

△

3.2.2. Нека је $z = 3 - 4i$. Означити у комплексној равни тачке које одговарају комплексним бројевима:
а) z б) $-\overline{z}$ в) $z - 2$ г) $z + 3i$ д) iz.

Решење. а) сл 15. б) сл 16. в) сл 17. г) сл 18. д) сл 19.

△

3.2.3. Одредити у комплексној равни скуп тачака које задовољавају релације:
а) $|z + i| = |z - 1|$; б) $1 < |z - i| < 2$.

Решење. а) Комплексни бројеви који задовољавају једначину $|z - (-i)| = R$ налазе се на кружници полупречника R са центром у $z_0 = -i$, а комплексни бројеви који задовољавају једначину $|z - 1| = R$ налазе се на кружници полупречника R са центром у $z_1 = 1$. Према томе, комплексни бројеви за које важи $|z + i| = |z - 1|$ су они који су у комплексној равни подједнако удаљени од тачака $z_0 = -i$ и $z_1 = 1$, односно налазе се на симетрали дужи која спаја тачке z_0 и z_1 (сл 20.).
б) Решење неједначине $1 < |z - i|$ чине сви комплексни бројеви ван круга полупречника 1 са центром у $z_0 = i$, а решење неједначине $|z - i| < 2$ чине сви комплексни бројеви унутар круга полупречника 2 са центром $z_0 = i$. Коначно, решење почетне неједначине чине комплексни бројеви унутар кружног прстена сл....

△

3.2.4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја $z = \dfrac{7+2i}{4-3i}$.

Решење. Пошто је

$$\frac{7+2i}{4-3i} = \frac{7+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(7+2i)(4+3i)}{4^2-(3i)^2} = \frac{22+29i}{25} = \frac{22}{25} + i\frac{29}{25},$$

то је $\mathrm{Re}(z) = \frac{22}{25}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{29}{25}$. △

3.2.5. Колико има целих бројева n за које је $(n+i)^4$ цео број?

Решење. Важи следеће $(n+i)^4 = (n^2+2in+i^2)^2 = (n^2+2in-1)(n^2+2in-1) = n^4+4in^3-6n^2-4in+1 = n^4-6n^2+1-4n(n^2-1)i$. Да би $(n+i)^4$ био цео број мора бити пре свега реалан, а то важи ако је $4n(n^2-1) = 0$. Последња једнакост је задовољена *акко* $n \in \{0,-1,1\}$. За такве вредности n израз $(n+i)^4$ је цео број. △

3.2.6. Решити једначину $ix^2 - 4x + i = 0$.

Решење. Корени једначине $ax^2+bx+c = 0$ $(a,b,c$ комплексни бројеви) добијају се помоћу познате формуле $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ако применимо ово на нашу једначину добијамо

$$x_{1,2} = \tfrac{4\pm\sqrt{16-4i^2}}{2i} = \tfrac{4\pm\sqrt{20}}{2i} = \tfrac{4\pm2\sqrt{5}}{2i} = (-2\pm\sqrt{5})i.$$

△

3.2.7. Нека је $S = i^n + i^{-n}$, где је n цео број. Које све вредности S може имати?

Решење. Знамо да је $i^{4k-3} = i$, $i^{4k-2} = -1$, $i^{4k-1} = -i$, $i^{4k} = 1$ и $i^{-(4k-3)} = -i$, $i^{-(4k-2)} = -1$, $i^{-(4k-1)} = i$, $i^{-4k} = 1$. Према томе, за $n = 4k-3$, $n = 4k-2$, $n = 4k-1$, $n = 4k$ добијемо за S редом следеће вредности $0, -2, 0$ и 2. △

3.2.8. Наћи све комплексне бројеве који су конјуговани свом квадрату.

Решење. Потребно је наћи све комплексне бројеве за које важи $z^2 = \overline{z}$. Запишимо број као $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Заменом у једначину добијамо $(x+iy)^2 = x - iy$, а одатле $x^2 + i2xy - y^2 = x - iy$. Ако изједначимо реалне и имагинарне делове добићемо систем $x^2 - y^2 = x$, $2xy = -y$.
Посматрајмо другу једначину. Ако је $y \neq 0$, онда је $x = -\frac{1}{2}$, па из прве једначине следи да је $\dfrac{1}{4} - y^2 = -\dfrac{1}{2}$, а одатле је $y_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ако је $y = 0$, онда је $x^2 = x$, односно $x = 0$ или $x = 1$.
Тражени комплексни бројеви су $z_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 0$ и $z_4 = 1$. △

3.2.9. Решити једначину $z|z| + 4z + 5\overline{z} + 2i = 0$ у скупу комплексних бројева.

Решење. Представимо комплексан број као $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тада је $(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} + 4(x+iy) + 5(x-iy) + 2i = 0$, односно $x\sqrt{x^2+y^2} + 9x + i(y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2) = 0$. Ако изједначимо реални и имагинарни део са 0, добијамо систем

$$\begin{aligned} x\sqrt{x^2+y^2} + 9x &= 0, \\ y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Овај систем је еквивалентан са следећим системом

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x^2+y^2} + 9) &= 0, \\ y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Из прве једначине следи да је $x = 0$ и ако то заменимо у другу једначину добијамо $y\sqrt{y^2} - y + 2 = 0$, односно $y|y| - y + 2 = 0$. Ако је $y \geq 0$, онда једначина $y^2 - y + 2 = 0$ нема реалних решења, а ако је $y < 0$, онда једначина $-y^2 - y + 2 = 0$ има решења $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$. Решење $y_2 = 1$ не узимамо у обзир јер y мора бити негативно, стога је $y = -2$. Добили смо да је $x = 0$ и $y = -2$. Решење једначине је $-2i$. $\triangle$

3.2.10. Упростити израз $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6$.

Решење. Први начин. Применом једнакости $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ добијамо $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)^3 + \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right)^3 = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^3 + \left(\frac{-2i}{2i}\right)^3 = (-1)^3 + (-1)^3 = -1 - 1 = -2$.

Други начин. Рационалисањем израза у заградама добијамо
$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$, $\quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$,
па је $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = i^6 + (-i)^6 = -1 - 1 = -2$. $\triangle$

3.2.11. Израчунати $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014}$.

Решење. Први начин. Рационалисањем израза $\frac{1+i}{1-i}$ добијамо $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$. Према томе имамо $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014} = i^{2014} = i^{2012} \cdot i^2 = (i^4)^{503} \cdot i^2 = -1$.

Други начин. На основу једнакости $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$ имамо

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014} = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)^{1007} = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{1007} = (-1)^{1007} = -1.$$

$\triangle$

3.2.12. Решити једначину $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = 1$.

Решење. За $x \neq -i$ једначина је еквивалентна једначини $(1+ix)^4 = (1-ix)^4$, тј. $8ix + 8i^3x^3 = 0$, односно $8ix(x^2-1) = 0$. Решења последње једначине су $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$. △

3.2.13. Записати комплексан број $z = -\sqrt{3} - i$ у тригонометријском облику.

Решење. Први начин: Из записа можемо видети да је $\mathrm{Re}(z) = -\sqrt{3}$ и $\mathrm{Im}(z) = -1$. Израчунајмо прво модул $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Затим, у комплексном броју издвојимо модул и добијамо $z = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})$. С обзиром да је тригонометријски облик комплексног броја $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, потребно је наћи аргумент $\varphi \in (-\pi, \pi]$ такав да је $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$. На основу тригонометријског круга можемо закључити да је $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ (сл 12...).

Стога је тригонометријски запис посматраног комплексног броја
$z = 2(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$.
Други начин: Модул је $|z| = 2$, а аргумент означимо са $\varphi = \arg z$. Налазимо $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, а одавде $\varphi = \frac{\pi}{6}$ или $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$. Због $\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, закључујемо да је $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$. Тригонометријски облик комплексног броја је $z = 2(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$. △

3.2.14. Записати комплексан број $z = -1 + i$ у тригонометријском облику.

Решење. Користећи формулу $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $(z = a + ib)$, добијамо да је модул једнак $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Комплексан број можемо записати као $z = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, одакле следи да је $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Аргумент комплексног броја је $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}$, па је $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (сл 13....).

△

3.2.15. Комплексан број $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha\in(-\pi,\pi)$ записати у тригонометријском облику.

Решење. Због $(1+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2+2\cos\alpha=2(1+\cos\alpha)=2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ имамо да је $|z|=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$, јер је $\cos\frac{\alpha}{2}>0$. Затим, $\cos\varphi=\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}$. Стога је $\varphi=\frac{\alpha}{2}$, па је $z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. △

3.2.16. Комплексан број $z\neq 0$ записан је у тригонометријском облику, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Записати у тригонометријском облику број $\frac{1}{z}$.

Решење. Први начин. Нека је $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тада је $\frac{1}{z}=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^{-1}=(re^{i\varphi})^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\varphi}=\frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$.
Други начин. Нека је $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тада је $\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{r(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r^2}=\frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\big)$. △

3.2.17. Број $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ написати у тригонометријском облику.

Решење. Модул броја z је $|z|=\sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=2$, па се може записати $z=2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. Потребно је наћи аргумент φ за које је $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Како је $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, онда је за $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}=\frac{2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}-1)}=1$, $\varphi\neq\frac{\pi}{4}$. Према томе, $2\varphi=\frac{\pi}{4}$. Добили смо тригонометријски облик $z=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. △

3.2.18. Ако је $z_1=(-1-i\sqrt{3})/2$ и $z_2=(-1+i\sqrt{3})/2$, израчунати $z_1^3+z_2^3$.

Решење. Тражени збир је једнак
$z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)=(z_1+z_2)((z_1+z_2)^2-3z_1z_2)$.
Како је $z_1+z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-1$ и $z_1z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-(i\sqrt{3})^2}{4}=1$, добијамо $z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)((z_1+z_2)^2-3z_1z_2)=(-1)(1-3)=2$.
Задатак се може решити и ако уочимо да је $z_1=-e^{i\pi/3}$, а $z_2=-e^{-\pi/3}$. Одатле следи да је $z_1^3=-e^{i\pi}=1$, и $z_2^3=-e^{i\pi}=1$, односно $z_1^3+z_2^3=2$. △

3.2.19. Средити израз $\dfrac{6\cos\frac{\pi}{6}+6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}}$.

Решење. Први начин. Бројилац датог израза је једнак $6\cos\dfrac{\pi}{6}+6i\sin\dfrac{\pi}{6}=6(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})=6e^{i\frac{\pi}{6}}$, а именилац $2\cos\dfrac{2\pi}{3}+2i\sin\dfrac{2\pi}{3}=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Одавде је $\dfrac{6\cos\frac{\pi}{6}+6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{6e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=3e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})}=3e^{i\pi\frac{1-4}{6}}=3e^{-\frac{\pi}{2}i}=-3i$.
Други начин. Рационалисањем израза добијамо
$\dfrac{6\cos\frac{\pi}{6}+6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{6\frac{\sqrt{3}}{2}+6i\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})+2i\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i-\frac{3}{4}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=-3i$. △

3.2.20. Израчунати $(\sqrt{3}-i)^{36}$.

Решење. Први начин. Представимо комплексан број $z=\sqrt{3}-i$ у тригонометријском облику. С обзиром да је $|z|=2$ и $\arg z=-\frac{\pi}{6}$, имамо $z=2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$. Применом Муаврове формуле добијамо

$$z^{36}=2^{36}\left(\cos(-36\cdot\frac{\pi}{6})+i\sin(-36\cdot\frac{\pi}{6})\right)=2^{36}\left(\cos(-6\pi)-i\sin(-6\pi)\right)=2^{36}.$$

Други начин. На основу једнакости $(\sqrt{3}-i)^3=-8i$ имамо

$$(\sqrt{3}-i)^{36}=\left((\sqrt{3}-i)^3)\right)^{12}=(-8i)^{12}=2^{36}.$$

△

3.2.21. Израчунати z^{12}, где је z комплексан број који задовољава једначину $z^2+z+1=0$.

Решење. Решења једначине $z^2+z+1=0$ су $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Запишимо решења у тригонометријском облику $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ и $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Одавде следи да је $z_1^{12} = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^{12} = \cos(8\pi) + i\sin(8\pi) = 1$ и $z_2^{12} = \left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)^{12} = \cos(16\pi) + i\sin(16\pi) = 1$. Решење је $z = 1$. $\triangle$

3.2.22. Наћи вредност комплексне функције $f(z) = \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^{20}$ у тачки $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Решење. Први начин. Запишимо комплексне бројеве $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ и $z_2 = 1-i$ у тригонометријском облику. За број z_1 је $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$ и $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, па је $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, а за z_2 је $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ и $\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{4}$, па је $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$. Коначно, $f(z) = \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^{20} =$
$\left(\dfrac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}\right)^{20} = \dfrac{2^{20}(\cos 20\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 20\cdot\frac{\pi}{3})}{2^{10}(\cos(-20\cdot\frac{\pi}{4}) + i\sin(-20\cdot\frac{\pi}{4}))} =$
$2^{10}\cdot\dfrac{\cos 2\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 2\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)} = 2^{10}\cdot\dfrac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+0} = -2^{10}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.
Други начин. На основу чињенице да је $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$ и $(1-i)^2 = -2i$ имамо $f(z) = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^{20}}{(1-i)^{20}} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^{18}(1+i\sqrt{3})^2}{((1-i)^2)^{10}} =$
$\dfrac{\left((1+i\sqrt{3})^3\right)^6(1+i\sqrt{3})^2}{\left((1-i)^2\right)^{10}} = \dfrac{(-8)^6(-2+2i\sqrt{3})}{(-2i)^{10}} = \dfrac{8^6(-1+i\sqrt{3})}{-2^9} = 2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

$\triangle$

3.2.23. Израчунати збирове $C_n = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots\ldots + \cos n\varphi$ и $S_n = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

Решење. Посматрајмо збир $C_n + iS_n = 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \ldots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$, где је $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Како је

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, & z \neq 1; \\ n+1, & z = 1, \end{cases}$$

имамо за $\varphi \neq 2k\pi$
$C_n + iS_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1}}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = \frac{1-\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2})} = \frac{2\sin\frac{n+1}{2}\varphi\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi - i\cos\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2})}\cdot$
$\frac{\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + i\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right) =$
$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{n}{2}\varphi + i\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n}{2}\varphi$.
Изједначавањем реалних, односно имагинарних делова налазимо

$C_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\dfrac{n}{2}\varphi$ и $S_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{n}{2}\varphi$.
Ако је $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, онда је $C_n + iS_n = n+1$, па је $C_n = n+1$ и $S_n = 0$.

△

3.2.24. Наћи све четврте корене броја $z = -1 + i$.

Решење. Запишимо комплексан број z у тригонометријском облику. Модул је $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, па је $z = \sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$. Одавде видимо да је $\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, па је $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Стога је, на основу формуле (3.2),
$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\}$. Према томе,

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16} + \pi\right)\right) = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right),$$

где смо применили $\cos\left(\dfrac{11\pi}{16}\right) = \cos\left(\dfrac{13\pi}{16} + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{13\pi}{16}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{16} + \pi\right)$, $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{16}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{16} + 3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, као и $\sin\left(\dfrac{11\pi}{16}\right) = \sin\left(\dfrac{13\pi}{16} + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{16}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{16} + \pi\right)$, $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{16}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{16} + 3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Како је $|z_k| = \sqrt{2}$ за све $k \in \{0,1,2,3\}$, а аргументи се добијају додавањем аргументу $\arg z_0 = \dfrac{3\pi}{16}$ редом $\dfrac{\pi}{2}$, $-2\cdot\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$, четврти корени броја $-1+i$ представљају у комплексној равни темена квадрата, која се налазе на кружној линији полупречника $\sqrt[8]{2}$ са центром у координатном почетку, сл 14...

△

3.2.25.ДОДАТИ СЛИКУ Нека су z_1 и z_2 два наспрамна темена једног квадрата у комплексној равни, и z_3 и z_4 остала два наспрамна темена. Доказати $z_3 z_4 = \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{2}$.

Решење. Изразимо z_3 и z_4 преко z_1 и z_2. Означимо пресек дијагонала квадрата са $z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$, видети слику... Ако посматрамо комплексне бројеве $z_2 - z_0$ и $z_4 - z_0$ видимо да се комплексан број z_4 добија ротацијом комплексног броја z_2 око z_0 за угао $\frac{\pi}{2}$ у супротном смеру од смера казаљке на сату. Према томе $z_4 - z_0 = (z_2 - z_0)e^{i\frac{\pi}{2}} = (z_2 - z_0)(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = (z_2 - z_0)i$. Одавде $z_4 = z_0 + (z_2 - z_0)i = \dfrac{z_1+z_2}{2} + (z_2 - \dfrac{z_1+z_2}{2})i = \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_2-z_1}{2}i$. Ако посматрамо комплексне бројеве $z_1 - z_0$ и $z_3 - z_0$ видимо да се комплексан број z_3 добија ротацијом комплексног броја z_1 око z_0 за угао $\frac{\pi}{2}$ у супротном смеру од смера казаљке на сату. Према томе $z_3 - z_0 = (z_1 - z_0)e^{i\frac{\pi}{2}} = (z_1 - z_0)(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = (z_1 - z_0)i$. Одавде $z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)i = \dfrac{z_1+z_2}{2} + (z_1 - \dfrac{z_1+z_2}{2})i = \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2}i$.
Добили смо

$$z_3z_4 = \left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_2-z_1}{2}i\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}i\right) =$$

$$= \frac{(z_1+z_2)^2}{4} - \frac{(z_2-z_1)^2}{4}i^2 = \frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{4} + \frac{z_2^2-2z_1z_2+z_1^2}{4} = \frac{z_1^2+z_2^2}{2}.$$

△

3.2.26. Израчунати

$$\left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\cdots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right] \quad (n \geq 2).$$

Решење. Због $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n} = \left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}$, имамо

$$\left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right] =$$

$$= \left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\frac{i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\cdots\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}\right] =$$

$$= \frac{1+\frac{1+i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\left[1-\frac{i}{2}\right]\left[1+\frac{i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}\right] =$$

$$= \frac{1+\frac{1+i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\left[1-\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n}\right] = \frac{3+i}{2-i}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right) = (1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Искористили смо чињеницу да је $i^{2^n} = 1$ за $n \geq 2$. △

3.3 Задаци за вежбу

3.3.27. Израчунати $|z|$ (модул комплексног броја z), ако је $z = \frac{(2-i)(1+i)}{3-i}$.

Решење. $|z| = 1$. △

3.3.28. Израчунати $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{2000}$.

Решење. Збир је једнак 0. △

3.3.29. Комплексан број $|z|$ има својство да је $\mathrm{Re}(z)$ четири пута већи од $\mathrm{Im}(z)$. Колико је пута $\mathrm{Re}(z^2)$ већи од $\mathrm{Im}(z^2)$?

Решење. 1,875 пута. △

3.3.30. Израчунати $(1 + i\sqrt{3})^9 + (\sqrt{3} - i)^9$.

Решење. $2^9(-1 + i)$. △

3.3.31. Ако је комплексан број $z = x + iy\,(x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ такав да је $|z| + |z + 1| + i = 0$, израчунати $2x - y$.

Решење. $2x - y = -1$. △

3.3.32. Израчунати $\left(\dfrac{3}{1+i} + \dfrac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Решење. 2^{24}. △

3.3.33. Ако комплексан број z задовољава једнакост $z + 2\overline{z} = 12 + 3i$, наћи $|z|$.

Решење. $|z| = 5$. △

3.3.34. Наћи све шесте корене броја $i - \sqrt{3}$.

Решење. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6}\right)\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. △

3.3.35. Решити једначину $z^5 = (1 - z)^5$.

Решење. $\dfrac{1}{2}\left(1 - i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{k\pi}{5}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. △

3.3.36. Решити по z једначину $z + 2\overline{z} = 6 - i$.

Решење. $z = 2 + i$. △

3.3.37. Дат је компексан број $z_1 = 2 - 2i$. Одредити комплексан број $z = x + iy$ који задовољава $\mathrm{Re}\,(z \cdot z_1) = 18$ и $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z_1}\right) = \dfrac{1}{13}$.

Решење. $z = 3 + 4i$. △

3.3.38. Ако је $z + \dfrac{1}{z} = 1$, израчунати

а) z^3;

б) $z^{1000} + \dfrac{1}{z^{1000}}$.

Решење. а) -1; б) -1. △

3.3.39. Шта у равни представља скуп парова (x, y) таквих да је $z = x+iy$ и
а) $\mathrm{Re}\,(\mathrm{z}) + \mathrm{Im}\,(\mathrm{z}) < 1$;
б) $|z| = 2$;
в) $|z-1| = 1$;
г) $z \cdot \overline{z} + (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 0$;
д $|z-2| + |z+2| = 4$;
ђ) $|z+2| + |z-2| = 10$;
е) $|z+5| - |z-5| = 8$.

Решење. а) Полураван "испод"праве $y = 1-x$; б) Круг са центром у $(0,0)$ полупречника 2; в) Круг са центром у $(1,0)$ полупречника 1; г) Круг са центром у $(-1,-1)$ полупречника $\sqrt{2}$; д) $z = 0$; ђ) Елипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$; е) Хипербола $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ △

3.3.40. Решити систем једначина:
а) $\left|\dfrac{z-12i}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}, \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$
б) $|z+1| = |z+4| = |z-i|$.

Решење. а) $z_1 = 6+8i$, $z_2 = 6+17i$; б) $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$. △