Глава 1

Задаци са претходних пријемних испита

1.0.1. Збир свих троцифрених бројева дељивих са 11 је:
А) 43 450; Б) 43 560; В) 44 440; Г) 44 000; Д) 44 550; Е) не знам.

Решење. Најмањи троцифрени број дељив са 11 је 110, а највећи троцифрени број дељив са 11 је 990. Укупно троцифрених бројева дељивих са 11 има $\frac{990-110}{11} + 1 = 80 + 1 = 81$. Тражени збир је збир првих 81 чланова аритметичког низа код кога је први члан једнак $a_1 = 110$ и разлика $d = 11$. Према томе $S_{89} = \frac{81}{2}(2 \cdot 110 + (81 - 1) \cdot 11) = 44\,550$.
Тачан одговор је под Д). $\triangle$

1.0.2. Збир свих троцифрених бројева дељивих са 13 је:
А) 37 024; Б) 37 128; В) 37 674; Г) 38 220; Д) 38 675; Е) не знам.

Решење. Најмањи троцифрени број дељив са 13 је 104, а највећи троцифрени број дељив са 13 је 988. Укупно троцифрених бројева дељивих са 13 има $\frac{988-104}{13} + 1 = 68 + 1 = 69$. Тражени збир је збир првих 69 чланова аритметичког низа код кога је први члан једнак $a_1 = 104$ и разлика $d = 13$. Према томе $S_{69} = \frac{69}{2}(2 \cdot 104 + (69 - 1) \cdot 13) = 37\,674$.
Тачан одговор је под В). $\triangle$

1.0.3. Бројеви a, b, c су узастопни чланови растућег аритметичког низа, а бројеви $a, b, c{+}1$ су узастопни чланови геометријског низа. Ако је $a{+}b{+}c = 18$, онда је $a^2 + b^2 + c^2$ једнако:
А) 109; Б) 116; В) 126; Г) 133; Д) 140; Е) не знам.

Решење. Бројеви a, b, c су узастопни чланови растућег аритметичког низа, па важи $2b = a + c$, а бројеви a, b, $c + 1$ су узастопни чланови геометријског низа, па важи $b^2 = a(c+1)$. Према томе, имамо систем

$$\begin{aligned} a - 2b + c &= 0, \\ b^2 - a(c+1) &= 0, \\ a + b + c &= 18. \end{aligned}$$

Ако одузмемо прву једначину од треће добићемо $3b = 18$, односно $b = 6$. Добили смо систем

$$\begin{aligned} a + c &= 12, \\ a(c+1) &= 36, \end{aligned}$$

који заменом $c = 12 - a$ у другу једначину добијамо $a(12 - a + 1) - 36 = 0$, односно $a^2 - 13a + 36 = 0$, одакле је $a = 9$ или $a = 4$. С обзиром да су a, b, c чланови растућег аритметичког низа, онда је $a = 4$ и $c = 8$. Тражени збир је $a^2 + b^2 + c^2 = 16 + 36 + 64 = 116$.
Тачан одговор је под Б). △

1.0.4. Бројеви $a_1, a_2, ..., a_{20}$ образују ариметички низ. Ако је збир свих чланова са непарним индексима једнак 320, а збир свих чланова са парним индексима једнак 350, онда је a_{11} једнако:
А) 32; Б) 34; В) 35; Г) 36; Д) 38; Е) не знам.

Решење. Збир свих чланова са парним индексима једнак је $S_{\text{пар}} = a_2 + a_4 + ... + a_{20} = 10a_1 + d(1+3+5+...+19)$. Знамо да је $1+3+5+...+19$ сума 10 чланова аритметичког низа код кога је први члан једнак 1 а разлика 2, те је једнака $1 + 3 + 5 + ... + 19 = \frac{10}{2}[2 + 2 \cdot 9] = 100$. Према томе $S_{\text{пар}} = 10a_1 + 100d = 350$. Слично и за збир свих чланова са непарним индексима $S_{\text{неп}} = a_1 + a_2 + ... + a_{19} = 10a_1 + d(2 + 4 + ... + 18) = 10a_1 + d \cdot \frac{9}{2} \cdot [4 + 2 \cdot 8] = 10a_1 + 90d = 320$. Из једначина $10a_1 + 100d = 350$ и $10a_1 + 90d = 320$ добијамо $a_1 = 5$ и $d = 3$, односно $a_{11} = 35$.
Тачан одговор је под В). △

1.0.5. Збир другог и једанаестог члана аритметичког низа је 28. Збир трећег, петог, осмог и десетог члана тог низа је:

А) 14; Б) 28; В) 56; Г) 84; Д) не може се једнозначно одредити; Е) не знам.

Решење. Из услова задатка имамо да је $a_2 + a_{11} = a_1 + d + a_1 + 10d = 2a_1 + d(1 + 10) = 2a_1 + 11d = 28$. Тражени збир је $a_3 + a_5 + a_8 + a_{10} = a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 4a_1 + d(2 + 4 + 7 + 9) = 4a_1 + 22d = 2(2a_1 + 11d) = 2 \cdot 28 = 56$.
Тачан одговор је под В). △

1.0.6. Скуп свих природних бројева разбијен је на групе на следећи начин: $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, ...$ Збир свих бројева 99. групе је:
А) 511 932; Б) 490 901; В) 501 509; Г) 471 981; Д) 485 199; Е) не знам.

Решење. Означимо са B_i број чланова i-те групе. Тражена група се састоји од 99 бројева, а почетни број те групе је за 1 већи од збира броја чланова претходних група, $B_1 + B_2 + ... + B_{98} = 1 + 2 + 3 + ... + 98 = \dfrac{98 \cdot 99}{2} = 4851$.
Збир свих бројева 99. групе је једнак

$$\underbrace{4852 + 4853 + ...+}_{99 \text{ сабирака}} = \frac{99}{2}[2 \cdot 4852 + 99 - 1] = 485\,199.$$

Тачан одговор је под Д). △

1.0.7. Збир првих пет чланова аритметичке прогресије је 180, а збир првих осам чланова је 204. Колико првих чланова треба сабрати да се добије збир 185?
А) То је немогуће учинити; Б) 9; В) 10; Г) 11; Д) 12; Е) не знам.

Решење. По условима задатка важи $S_5 = 180$ и $S_8 = 204$, односно $\frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 180$ и $\frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 204$. Сређивањем добијамо систем $a_1 + 2d = 36$, $4a_1 + 14d = 102$. Решење овог система је $a_1 = 50$ и $d = -7$.
Потребно је наћи n такво да је $S_n = 185$, односно $\frac{n}{2}(2 \cdot 50 - 7(n-1)) = 185$. Одавде је $7n^2 - 107n + 370 = 0$, па је $n_1 = \frac{37}{7} \notin \mathbb{N}$, $n_2 = 10$. Значи, потребно је сабрати првих десет чланова да се добије збир 185.
Тачан је одговор под В). △

1.0.8. Вредност израза $(1+i)^{2012} + (1-i)^{2012}$ је:
А) 2^{1007}; Б) -2^{1007}; В) 2^{2012}; Г) -2^{1007}; Д) 2^{2012}; Д) не знам.

Решење. Први начин. Комплексне бројеве $1+i$ и $1-i$ запишимо у тригонометријском облику. Модули су једнаки $\sqrt{2}$, па је

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Одавде је

$$(1+i)^{2012} + (1-i)^{2012} =$$

$$\left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{2012} + \left(\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))\right)^{2012} =$$

$$= 2^{1006}(\cos 2012 \cdot \frac{\pi}{4} + i\sin 2012 \cdot \frac{\pi}{4}) + 2^{1006}(\cos(-2012 \cdot \frac{\pi}{4}) + i\sin(-2012 \cdot \frac{\pi}{4})) =$$

$$= 2^{1006}(\cos\pi + i\sin\pi) + 2^{1006}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{1007}.$$

Други начин. На основу једнакости $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$ имамо

$$(1+i)^{2012} + (1-i)^{2012} = \left((1+i)^2\right)^{1006} + \left((1-i)^2\right)^{1006} = (2i)^{1006} + (-2i)^{1006} =$$

$$= 2^{1006}i^{2006} + 2^{1006}i^{1006} = 2^{1006}(-1) + 2^{1006}(-1) = -2^{1007}.$$

Тачан одговор је под Б). △

1.0.9. Ако је $z+\frac{1}{z}=1$, онда је $z^{2013}+\dfrac{1}{z^{2013}}$ једнако:

А) -2; Б) $1-i\sqrt{3}$; В) 2; Г) 0; Д) $1+i\sqrt{3}$; Д) не знам.

Решење. Комплексан број z задовољава једначину $z^2-z+1=0$, а самим тим и $(z+1)(z^2-z+1)=0$, односно $z^3+1=0$. Одавде је $z^3=-1$, па је $z^{2013}=(z^3)^{671}=(-1)^{671}=-1$. Убацивањем у тражени израз добијамо $z^{2013}+\dfrac{1}{z^{2013}}=-1-1=-2$.
Тачан одговор је под А). △

1.0.10. Вредност израза $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$ је:

А) 0; Б) -1; В $i\sqrt{3}$; Г) $-i\sqrt{3}$; Д) 1; Д) не знам.

Решење. Први начин. Комплексне бројеве $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ запишимо у тригонометријском облику. Модули си једнаки 1, па је $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ и $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$. Одавде је

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}=\\
&=\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{2011}+\Big(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\Big)^{2011}=\\
&=\Big(\cos(2011\cdot\frac{\pi}{3})+i\sin(2011\cdot\frac{\pi}{3})\Big)+\Big(\cos(-2011\cdot\frac{\pi}{3})+i\sin(-2011\cdot\frac{\pi}{3})\Big)=\\
&=\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)+\Big(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\Big)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=1.
\end{aligned}$$

Други начин. На основу једнакости $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=-1$ и $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=-1$ имамо

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}=\\
&=\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\\
&=(-1)^{670}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+(-1)^{670}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=1.
\end{aligned}$$

Тачан одговор је под Д). △

1.0.11. Ако је i имагинарна јединица, а x и y реални бројеви за које важи $(2+3i)x+(3+2i)y=1$, онда је $x-y$ једнако:

А) $\frac{1}{5}$; Б) 1; В) $-\frac{1}{5}$; Г) -1; Д) 0; Е) не знам.

Решење. Сређивањем једначине добијамо $(2x+3y)+(3x+2y)i=1$. Ако изједначимо реалне и имагинарне делове леве и десне стране, имајући у виду да су x и y реални бројеви, добијамо систем $2x+3y=1$, $3x+2y=0$. Решење овог система је $x=-\frac{2}{5}$ и $y=\frac{3}{5}$.
Тачан одговор је под G). △

1.0.12. Збир реалног и имагинарног дела комплексног броја $\dfrac{-6-2i}{(1-i)^3}$ је једнак:
А) -2; Б) -1; В) 0; Г) 1; Д) 2; Е) не знам.

Решење. Из $(1-i)^3=(1-2i+i^2)(1-i)=-2i(1-i)=-2i-2$, следи да је $\dfrac{-6-2i}{(1-i)^3}=\dfrac{-6-2i}{-2i-2}=\dfrac{3+i}{i+1}\cdot\dfrac{i-1}{i-1}=\dfrac{-4+2i}{-2}=2-i$. Збир реалног и имагинарног дела је 1.
Тачан одговор је под Г). △

1.0.13. Ако су x и y реални бројеви такви да је $(2+i)(x+iy)=5-5i$ тада је збир $x+y$ једнак:
А) 2; Б) 3; В) 1; Г) -2; Д) -3; Е) не знам.

Решење. Сређивањем једначине добијамо $(2x-y)+(x+2y)i=5-5i$. Ако изједначимо реалне и имагинарне делове леве и десне стране, имајући у виду да су x и y реални бројеви, добијамо систем $2x-y=5$, $x+2y=-5$. Решење овог система је $x=1$ и $y=-3$.
Тачан одговор је под Г). △

1.0.14. Вредност израза $\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right|$ за $z=2i$ је:
А) 2; Б) 5; В) $5\sqrt{5}$; Г) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; Д) 1; Е) не знам.

Решење. Из $\dfrac{1-z}{1+z}=\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{1-2i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{1-4i+4i^2}{1+4}=\dfrac{-3-4i}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$, следи да је $\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$.
Тачан одговор је под Д). △

1.0.15. Збир $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ је једнак:
А) 0; Б) $2i$; В) $-2i$; Г) 2; Д) i; Е) не знам.

Решење. Први начин. Запишимо $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ у тригонометријском облику:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}).$$

Сада је
$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2008}+\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)^{2008}=\left(\cos 2008\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 2008\cdot\frac{\pi}{4}\right)+(\cos(-2008\cdot\frac{\pi}{4})+i\sin(-2008\cdot\frac{\pi}{4}))=(\cos 502\pi+i\sin 502\pi)+(\cos(-502\pi)+i\sin(-502\pi))=1+0+1+0=2.$
Други начин. На основу једнакости $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$ и $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$ имамо

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=i^{1004}+(-i)^{1004}=1+1=2.$$

Тачан одговор је под Г). △

1.0.16. Број $(1+i\sqrt{3})^n$ је реалан ако и само ако је (k је цео број):

А) $n=2k$; Б) $n=3k$; В) $n=3k+1$; Г) $n=3k+2$; Д) $n=6k$; Е) не знам.

Решење. Нека је $z=1+i\sqrt{3}$. Тада је $|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, па се може записати $z=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2\big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\big)$. Одавде је $(1+i\sqrt{3})^n=\big[2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\big]^n=2^n\big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\big)^n=2^n\big(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\big)$. Број је реалан *akko* $\sin\frac{n\pi}{3}=0$, односно $\frac{n\pi}{3}=k\pi$. Добили смо да је број реалан *akko* $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$.

Тачан одговор је под Б). △

1.0.17. Реалан број a за које важи $\frac{1+2ai}{1-ai}=\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$ једнак је:

А) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; Д) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; Е) не знам.

Решење. Рационалишимо леву страну

$$\frac{1+2ai}{1-ai}=\frac{1+2ai}{1-ai}\cdot\frac{1+ai}{1+ai}=\frac{1-2a^2+i3a}{1+a^2}=\frac{1+2a^2}{1+a^2}+i\frac{3a}{1+a^2}.$$

Добили смо $\frac{1-2a^2}{1+a^2}+i\frac{3a}{1+a^2}=\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i.$
Ако изједначимо реалне и имагинарне делове добићемо систем

$$\frac{1-2a^2}{1+a^2}=\frac{1}{4}\quad\wedge\quad\frac{3a}{1+a^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Систем је еквивалентан следећим системима

$$\left(\begin{array}{c}1+a^2=4-8a^2\\12a=(1+a^2)3\sqrt{3}\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}9a^2=3\\12a=(1+a^2)3\sqrt{3}\end{array}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}a^2=\frac{1}{3}\\12a=(1+a^2)3\sqrt{3}\end{array}\right).$$

Ако $a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ убацимо у другу једначину добијамо $12a = (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})3\sqrt{3}$, а одавде $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Тачан одговор је под В). $\triangle$

1.0.18. Колико различитих реалних решења има једначина $x^2+\sqrt{(x-1)^2} = 1$?
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) више од 3; Е) не знам.

Решење. Почетна једначина је еквивалентна једначини $x^2 + |x-1| = 1$, односно

$$\big(x \geq 1 \ \wedge \ x^2 + x - 1 = 1\big) \ \vee \ \big(x < 1 \ \wedge \ x^2 - x + 1 = 1\big).$$

У првој загради претходног израза добијамо решења једначине $x_1 = -2, x_2 = 1$, од којих само x_2 задовољава услов $x \geq 1$.
У другој загради добијамо решења једначине $x_3 = 0, x_4 = 1$, од којих x_3 задовољава услов $x < 1$.
Према томе, решења једначине су $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$.
Тачан одговор је под В). $\triangle$

1.0.19. Једначина $\sqrt{(1-x)} = -x$:
А) нема решења; Б) има тачно једно решење и оно је негативно; В) има тачно једно решење и оно је позитивно; Г) има тачо два решења; Д) има више од два решења; Е) не знам.

Решење. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)} = b(x)$ и према (**??**) еквивалентна је систему

$$a(x) = b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$1 - x = (-x)^2 \ \wedge \ -x \geq 0,$$

односно

$$x^2 + x - 1 = 0 \ \wedge \ x \leq 0.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Решење x_2 не задовољава услов $x \leq 0$, па ирационална једначина има само једно решење $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Тачан одговор је под Б). $\triangle$

1.0.20. Решење једначине $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$ припада интервалу:
А) $(-\infty, -2]$; Б) $(-2, -1]$; В) $(-1, 0]$; Г) $(0, 1]$; Д) $(1, +\infty)$; Е) не знам.

Решење. Нађимо област дефинисаности једначине. Потребно је да су задовољени следећи услови

$$1-x \geq 0,\ 1-\sqrt{1-x} \neq 0,\ 1+\sqrt{1-x} \neq 0,\ 1-x>0.$$

Област дефинисаности једначине је $D=(-\infty,0)\cup(0,1)$. Помножимо једначину са $(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}$ и добићемо

$$(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}+(1-\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}=4\sqrt{3}(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x}).$$

Сређивањем долазимо до следеће једначине

$$\sqrt{1-x}+1-x+\sqrt{1-x}-1+x=4\sqrt{3}(1-1+x),$$

а одавде $\sqrt{1-x}=2\sqrt{3}x$. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)}=b(x)$, па је еквивалентна систему

$$1-x=(2\sqrt{3}x)^2,\ 2\sqrt{3}x\geq 0,$$

односно

$$12x^2+x-1=0,\ x\geq 0.$$

Решења квадратне једначине су $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{4}$.
Решење x_1 не задовољава услов $x\geq 0$, па је само $x_2=\frac{1}{4}$ решење ирационалне једначине.
Тачан одговор је под Г).

$\triangle$

1.0.21. Збир свих решења једначине $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ је:
А) 0; Б) -3; В) 3; Г) 5; Д) 8; Е) не знам.

Решење. Област дефинисаности једначине је скуп свих реалних бројева, јер је израз x^2+16 позитиван за свако $x\in\mathbb{R}$. Помножимо једначину са $\sqrt{x^2+16}$ и добићемо $x\sqrt{x^2+16}+x^2+16=40$, а одатле $x\sqrt{x^2+16}=24-x^2$. Ако претпоставимо да је $x\neq 0$, тада је $\sqrt{x^2+16}=\frac{24-x^2}{x}$. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)}=b(x)$ и еквивалентна је систему $a(x)=b^2(x)\ \wedge\ b(x)\geq 0$. Према томе, имамо

$$x^2+16=\left(\frac{24-x^2}{x}\right)^2\ \wedge\ \frac{24-x^2}{x}\geq 0,$$

односно

$$x^4+16x^2=576-48x^2+x^4\ \wedge\ \frac{24-x^2}{x}\geq 0 \tag{1.1}$$

Услов $\dfrac{24-x^2}{x}\geq 0$ еквивалентан је систему

$$\big(24-x^2\geq 0\ \wedge\ x>0\big)\ \vee\ \big(24-x^2\leq 0\ \wedge\ x<0\big),$$

односно

$$\big(x\in[-2\sqrt{6},2\sqrt{6}]\ \wedge\ x>0\big)\ \vee\ \big(x\in(-\infty,-2\sqrt{6})\cup(2\sqrt{6},\infty)\ \wedge\ x<0\big),$$

а одавде

$$\big(x \in (0, 2\sqrt{6}]\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -2\sqrt{6})\big).$$

Убацимо ово решење у (1.1) и добијамо

$$x^2 = 9 \ \wedge \ x \in (-\infty, -2\sqrt{6}) \cup (0, 2\sqrt{6}],$$

а затим и решење $x_1 = 3$.
Остало је да још проверимо да ли је $x = 0$ решење. Заменом у почетној једначини закључујемо да није решење.
Према томе, добили смо само једно решење $x_1 = 3$.
Тачан одговор је под В). $\triangle$

1.0.22. Једначина $\sqrt{x+2} = x - 1$:
А) нема решења; Б) има једно решење и оно је позитивно; В) има једно решење и оно је негативно; Г) има једно позитивно и једно негативно решење; Д) има два решења и оба су позитивна; Е) не знам.

Решење. Једначина је еквивалентна систему

$$x + 2 = (x-1)^2 \ \wedge \ x - 1 \geq 0,$$

а одатле

$$-x^2 + 3x + 1 = 0 \ \wedge \ x \geq 1.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, а услов $x \geq 1$ задовољава само решење $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.
Тачан одговор је под В). $\triangle$

1.0.23. Скуп решења неједначине $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1$ је:
А) $(\frac{1}{3}, 2)$;Б) $(-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty)$;В) $(-\infty, \frac{3}{4})$;Г) $(\frac{3}{4}, +\infty)$;Д) $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$;Е) не знам.

Решење. Неједначина је типа $\sqrt{a(x)} < b(x)$, па је према (**??**) еквивалентна са

$$\Big(0 \leq \frac{3x-1}{2-x} < 1\Big) \ \wedge \ \big(1 > 0\big),$$

односно

$$0 \leq \frac{3x-1}{2-x} < 1.$$

Неједначина $0 \leq \frac{3x-1}{2-x}$ је еквивалентна систему

$$\big(3x - 1 \geq 0 \wedge 2 - x > 0\big) \ \vee \ \big(3x - 1 \leq 0 \ \wedge \ 2 - x < 0\big),$$

одакле добијамо

$$\Big(x \geq \frac{1}{3} \wedge x < 2\Big) \ \vee \ \Big(x \leq \frac{1}{3} \ \wedge \ x > 2\Big),$$

односно

$$x \in [\frac{1}{3}, 2).$$

Из следећих еквиваленција $\frac{3x-1}{2-x} < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x-1}{2-x} - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x-1-2+x}{2-x} < 0 \;\Leftrightarrow$ $\frac{4x-3}{2-x} < 0$ добијамо систем

$$\big(4x - 3 > 0 \,\wedge\, 2 - x < 0\big) \;\vee\; \big(4x - 3 < 0 \;\wedge\; 2 - x > 0\big),$$

који је еквивалентан са

$$\big(x > \frac{3}{4} \,\wedge\, x > 2\big) \;\vee\; \big(x < \frac{3}{4} \;\wedge\; x < 2\big).$$

Решимо овај систем. Добијамо

$$x \in (-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty).$$

Коначно, решење се добија као пресек скупа $[\frac{1}{3}, 2)$ и скупа $(-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty)$, па је једнако $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$.
Тачан одговор је под Д). $\triangle$