Глава 1

Ирационалне једначине и неједначине

1.1 Теоријски увод

Под ирационалним једначинама подразумевају се једначине код којих се непозната налази под знаком корена. Такве једначине могу бити сложене, па се могу решити само неке једноставнијег типа. Основна идеја при решевању ирационалних једначина јесте да се елеминише корен (пре свега, степеновањем), односно да се добије еквивалентна једначина у којој се не појављује непозната под кореном.
Степеновањем једначине не добијамо увек еквивалентну једначину, већ можемо добити једначину која поред решења полазне једначине може имати још решења. Једноставан пример за ово је једначина $\sqrt{x} = -1$ која нема решења, а ако је квадрирамо добићемо тривијалну једначину $x = 1$ која има једно решење. Или једначина $x + 1 = \sqrt{x+7}$, која се квадрирањем доводи до једначине $(x+1)^2 = x + 7$ чија су решења $x = 2$ и $x = -3$. Међутим, провером можемо видети да $x = 2$ јесте решење полазне једначине, а $x = -3$ није решење.
Област дефинисаности једначине (скуп допустивих решења) је скуп реалних бројеву за који су дефинисане поткорене функције у ирационалној једначини.
Посматрајмо ирационалне једначине облика $\sqrt{a(x)} = b(x)$. Одавде видимо да изрази $a(x)$ и $b(x)$ морају бити ненегативни. Квадрирањем добијемо следећу еквиваленцију

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \ \Leftrightarrow \ a(x) = b^2(x) \ \wedge \ a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Неједнакост $a(x) \geq 0$ није потребно писати јер је садржана у неједнакости $a(x) = b^2(x)$. Према томе, важи следећа једноставнија еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \ \Leftrightarrow \ a(x) = b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0. \tag{1.1}$$

Ако је ирационална једначина облика $\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)}$, онда важи

$$\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)} \;\Leftrightarrow\; a(x) = b(x) \;\wedge\; a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{1.2}$$

Можемо закључити, ирационална једначина облика $\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је једначини $a(x) = [b(x)]^n$, а за паран број $n \in \mathbb{N}$ систему $a(x) = [b(x)]^n, b(x) \geq 0$.

Код ирационалних неједначина је мало сложеније. Квадрирање неједнакости није увек дозвољено зато што ако множимо са негативним бројем мења се знак неједнакости, а ако множимо са позитивним бројем знак једнакости остаје. Једноставан пример за такво нешто је тачна неједнакост $-2 < -1$, коју ако квадрирамо добијемо нетачну неједнакост $4 < 1$.
Посматрајмо следеће облике неједнакости:
1° $\sqrt{a(x)} \leq b(x)$
Очигледно је да мора бити $b(x) \geq 0$ и $a(x) \geq 0$, па важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \leq b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) \leq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{1.3}$$

2° $\sqrt{a(x)} < b(x)$
Десни израз мора бити позитиван, одакле добијамо

$$\sqrt{a(x)} < b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) < b^2(x) \;\wedge\; b(x) > 0. \tag{1.4}$$

3° $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$
Овде немамо услов да $b(x)$ мора да буде ненегативно. Неједнакост може бити задовољена и ако је $b(x)$ негативно.
Ако је $b(x) \geq 0$, потребно је да важи $a(x) \geq 0$ и $a(x) \geq b^2(x)$, а ако је $b(x) < 0$ довољно је да $a(x) \geq 0$ и неједнакост је задовољена. Према томе, важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \geq b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) \geq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{1.5}$$

4° $\sqrt{a(x)} > b(x)$
Као и у претходном облику, овде важи

$$\sqrt{a(x)} > b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) > b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{1.6}$$

Сада ћемо посматрати неједначине у којима се јавља n-ти корен. Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) < [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$0 \leq f(x) < [g(x)]^n, \; g(x) > 0.$$

Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) > [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$\big(f(x) > [g(x)]^n \;\wedge\; g(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(f(x) \geq 0 \;\wedge\; g(x) < 0\big).$$

1.2 Решени задаци

1.2.1. Решити једначину $x-1=\sqrt{7-x}$.

Решење. Једначина је облика $\sqrt{a(x)}=b(x)$, па на основу (1.1) еквивалентна је следећем систему

$$(x-1)^2 = 7-x \ \wedge \ x-1 \geq 0.$$

Решење прве једначине је $x_1=3, x_2=-2$, а услов $x\in[0,7]$ задовољава само решења $x_1=3$. Добили смо да је решење ирационалне једначине $x=3$. △

1.2.2. Решити једначину $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$.

Решење. Област дефинисаности је скуп реалних бројева x за које је $2x+8\geq 0$ и $x+5\geq 0$, дакле област дефинисаности је $D=[-4,+\infty)$. Пошто је лева страна једначине збир два ненегативна корена, дакле ненегативна, а десна страна позитивна константа, квадрирањем ћемо добити еквивалентан систем

$$2x+8+2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+x+5=49 \ \wedge \ x\in D,$$

односно

$$2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}=36-3x \ \wedge \ x\in[-4,+\infty).$$

Овај систем је, слично као (1.1), еквивалентан систему

$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2 \ \wedge \ 36-3x\geq 0 \ \wedge \ x\in[-4,+\infty),$$

па и систему

$$x^2-288x+1136=0 \ \wedge \ x\leq 12 \ \wedge \ x\in[-4,+\infty).$$

Добијена квадратна једначина има решења $x_1=4$ и $x_2=284$, али због услова $x\leq 12$, једино решење овог система је $x_1=4$, па због тога и решење полазне једначине. △

1.2.3. Решити једначину $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=5$.

Решење. Област дефинисаности је $D=\{x\in\mathbb{R}|7x+1\geq 0\wedge 3x-18\geq 0\}$, дакле $D=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq 6\}$.
Овде је лева страна једначине за неке вредности $x\in D$ негативна, па је подесније једначину трансформисати у облик

$$\sqrt{7x+1}=\sqrt{3x-18}+5, \ x\in D,$$

а затим квадрирати. После срећивања, добија се еквивалентан систем

$$2x-3=5\sqrt{3x-18}, \ x\in D,$$

који је даље еквивалентан систему

$$(2x-3)^2=25(3x-18) \wedge x\geq \frac{3}{2} \ \wedge \ x\in D,$$

односно
$$4x^2 - 87x + 459 = 0 \land x \geq 6.$$
Решења квадратне једначине су $x_1 = 9, x_2 = \frac{51}{4}$ и оба задовољавају услов $x \geq 6$, па су и решења ирацоналне једначине. $\triangle$

1.2.4. Решити једначину $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1.$

Решење. Област дефинисаности једначине је
$$x^2 - x \geq 0 \ \land \ 2 - x - x^2 \geq 0 \ \land \ x \geq 0,$$
а одавде
$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \ \land \ x \in [-2, 1] \ \land \ x \geq 0,$$
што даје $x = 1$. Према томе, допустиво решење једначине је $D = \{1\}$. Провером можемо утврдити да то и јесте решење једначине.

$\triangle$

1.2.5. Решити једначину $(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 0.$

Решење. Област дефинисаности једначине је решење система
$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \ \land \ x^2 - 7x + 6 \geq 0,$$
а одатле $D = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$. Решење једначине је
$$\big(x^2 - 2x - 3 = 0 \ \lor \ x^2 - 7x + 6 = 0\big) \ \land \ x \in D,$$
односно
$$x \in \{-1, 1, 3, 6\} \ \land \ x \in D.$$
Одавде $x \in \{-1, 1, 6\}$.

$\triangle$

1.2.6. Решити једначину $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{12(x - 1)}$

Решење. Област дефинисаности ове једначине је $D = \mathbb{R}$. Степеновањем са три добијемо еквивалентну једначину
$$x + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x - 3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}) + 2x - 3 = 12x - 12.$$
У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо
$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x - 3}\sqrt[3]{12(x - 1)} = 3x - 3,$$
одакле степеновањем са три добијамо
$$12x(2x - 3)(x - 1) = 27x^3 - 81x^2 + 81x - 27.$$
Последња једначина је еквивалентна једначини $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$. Решења дате једначине су $x = 1$, $x = 3$. Међутим неопходна је провера!!!

Ако заменимо оба решења у почетну једначину видећемо да је задовољена једначина и тиме смо доказали да су решења тражене једначине $x = 1$ и $x = 3$. Неопходна је провера, јер смо у току рада заменили $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$ са $\sqrt[3]{12(x-1)}$, а то не мора да важи. △

1.2.7. Решити неједначину $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}} = 1$

Решење. Област дефинисаности ове једначине је $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Степеновањем са три добијемо еквивалентну једначину

$$x + 3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}\right) + x = 1.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо

$$3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}} = 1 - 2x,$$

одакле степеновањем са три добијамо

$$27(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3.$$

Последња једначина је еквивалентна једначини $8x^3 - 12x^2 + 6x + 26 = 0$. Једино реално решење последње једначине је $x = -1$. Образложили смо горе да је неопходна провера!!! Заменом у почетну једначину уверавамо се да $x = -1$ није решење. Према томе, ова једначина нема реалних решења. △

1.2.8. Решити једначину $\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4$.

Решење. Област дефинисаности D је интервал $-\frac{35}{2} \le x \le \frac{47}{2}$. Уведимо смену $\sqrt[4]{47-2x} = u$, $\sqrt[4]{35+2x} = v$. Добијамо систем једначина $u^4 + v^4 = 82$, $u + v = 4$. Ако означимо $uv = t$, трансформацијом леве стране прве једначине имамо $u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = (16-2t)^2 - 2t^2 = 2t^2 - 64t + 256$, тако да добијамо квадратну једначину $t^2 - 32t + 87 = 0$, а одавде $t_1 = 29, t_2 = 3$. Преостаје још да се реше системи

$$\begin{matrix} u+v=4 \\ uv=3 \end{matrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{matrix} u+v=4 \\ uv=29 \end{matrix}\,.$$

Решимо први систем. Ако из прве једначине изразимо u преко v и убацимо у другу једначину добићемо $(4-v)v = 3$, односно $v_1 = 3, v_2 = 1$, а $u_1 = 1, u_2 = 3$. Добили смо уређене парове $(u_1, v_1) = (1, 3)$ и $(u_2, v_2) = (3, 1)$. Одавде је $x_1 = 23 \in D, x_2 = -17 \in D$. На сличан начин решавамо и други систем и добијемо једначину $v^2 - 4v + 29 = 0$ која нема реална решења. Решења тражене једначине су $x_1 = 23$ и $x_2 = -17$. △

1.2.9. Решити једначину $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$

Решење. Ако уведемо смену $t = 3x^2+5x+1$ долазимо до једначине $\sqrt{t+7} - \sqrt{t} = 1$, чија је област дефинисаности $D_t = [0, +\infty)$. Пребацимо $\sqrt{t}$ на десну страну и добијемо $\sqrt{t+7} = \sqrt{t}+1$, где су обе стране ненегативне. Ако је квадрирамо имамо $3 = \sqrt{t}$, а одавде $t = 9 \in D_t$. Према томе, важи $9 = 3x^2+5x+1$, односно $x_1 = 1, x_2 = -\frac{8}{3}$. △

1.2.10. Решити једначину $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} = 2$.

Решење. С обзиром да је $x+3+2\sqrt{x+2} = x+2+2\sqrt{x+2}+1 = (\sqrt{x+2}+1)^2$ и $x+3-2\sqrt{x+2} = x+2-2\sqrt{x+2}+1 = (\sqrt{x+2}-1)^2$, дату једначину можемо написати у облику

$$\sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-1)^2} = 2,$$

односно

$$|\sqrt{x+2}+1| + |\sqrt{x+2}-1| = 2.$$

Сменом $t = \sqrt{x+2}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t = [0, +\infty)$, добија се једначина

$$|t+1| + |t-1| = 2.$$

Имајући у виду дефиницију апсолутне вредности, можемо разликовати следеће случајеве:

1) $0 \le t < 1$. У овом случају је $|t+1| = t+1$, $|t-1| = 1-t$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1-t+1 = 2$, односно $2 = 2$. Дакле, скуп решења једначине у овом случају је $[0, 1)$.

2) $t \ge 1$. У овом случају је $|t+1| = t+1$, $|t-1| = t-1$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1+t-1 = 2$, односно $2t = 2$. Решење последње једначине је $t = 1$.

Добили смо да је $[0, 1]$ скуп решења једначине $|t+1| + |t-1| = 2$ на $D_t = [0, +\infty)$.

Према томе, скуп решења почетне једначине је скуп решења неједначине $0 \le \sqrt{x+2} \le 1$. Одавде добијемо решење $x \in [-2, -1]$. △

1.2.11. Решити једначину $x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1 = 3x$.

Решење. Скуп допустивих решења је $D_x = [0, +\infty)$. Ако уведемо смену $t = \sqrt{x}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t = [0, +\infty)$ добићемо следећу једначину по t

$$t^3 + t + 1 = 3t^2.$$

Решимо ову једначину. Једначина је трећег степена, па је можемо урадити на следећи начин: приметимо да је једно решење $t_1 = 1$, онда поделимо $t^3 - 3t^2 + t + 1$ са $t-1$ и добијемо $(t^2 - 2t - 1)$. Према томе, добили смо $(t-1)(t^2-2t-1) = 0$, а одавде $t_1 = 1$, $t_2 = 1+\sqrt{2}, t_3 = 1-\sqrt{2}$. С обзиром да решење t_3 не задовољава услов $t \geq 0$, онда су решења једначине $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \sqrt{2}$. Вратимо ова решења у смену и добијемо $1 = \sqrt{x}$, $1 + \sqrt{2} = \sqrt{x}$, одакле је $x_1 = 1$, $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ $\triangle$

1.2.12. Решити једначину $\sqrt{x-3} = x + a$, где је a реалан параметар.

Решење. Приликом решавања ове једначине, користићемо графичко представљање одговарајућих функција. Наиме, скицираћемо графике функција $y = \sqrt{x-3}$ и $y = x + a$.
График прве функције добија се транслацијом графика функције $y = \sqrt{x}$. График друге функције је права паралелна правој $y = x$, а њен тачан положај зависи од вредности параметра a, сл 1....

Са слике видимо да су могућа четири случаја: 1) када права и крива немају заједничких тачака, па једначина нема решења; 2) када права додирује криву, па једначина има једно решење; 3) када права сече криву у двема тачкама и постоје два решења једначине и 4) када права сече криву само у једној тачки, па је решење једначине јединствено.
Квадрирањем дате једначине, добија се једначина

$$x^2 + (2a-1)x + (a^2 + 3) = 0,$$

чија су решења $x_{1,2} = \frac{1-2a \pm \sqrt{-4a-11}}{2}$. Напред наведеним случајевима одговарају следеће могућности:
1) ако је $a > -\frac{11}{4}$, решења $x_{1,2}$ нису реална, па дата једначина нема решења;
2) ако је $a = -\frac{11}{4}$, решења се поклапају; ово је случај када права додирује криву, а дата једначина има јединствено решење $x_1 = \frac{13}{4}$.
3) ако је $-3 \leq a \leq -\frac{11}{4}$, оба решења x_1 и x_2 су и решења полазне једначине; притом је у граничном случају $a = -3$ једно од тих решења једнако 3 (обе стране једначине су једнаке нули);
4) ако је $a < -3$, тада је само решење $x_1 = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-11}}{2}$ уједно и решење полазне једначине . $\triangle$

1.2.13. Решити неједначину $\sqrt{x^2 + 4x + 4} \leq x + 6$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} \leq b(x)$ и према (1.3) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) \leq b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \leq (x+6)^2 \ \wedge \ x + 6 \geq 0,$$

односно
$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \leq x^2 + 12x + 36 \ \wedge \ x \geq -6.$$
Систем у првој загради можемо раздвојити и добићемо
$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \ \wedge \ x^2 + 4x + 4 \leq x^2 + 12x + 36 \ \wedge \ x \geq -6,$$
а одатле
$$0 \leq x^2 + 4x + 4 \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6.$$
Решење квадратне неједначине $0 \leq x^2 + 4x + 4$ је $x \in \mathbb{R}$.
Добили смо систем
$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6,$$
који је еквивалентан са
$$x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6.$$
Коначно решење је $x \in [-4, +\infty)$. △

1.2.14. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (1.4) еквивалентна је систему
$$0 \leq a(x) < b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$
Према томе, наша једначина је еквивалентна систему
$$0 \leq x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2 \ \wedge \ 8 - x \geq 0,$$
односно
$$0 \leq x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \ \wedge \ x \leq 8.$$
Систем у првој загради можемо раздвојити и добићемо
$$0 \leq x^2 - 3x - 10 \ \wedge \ x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \ \wedge \ x \leq 8,$$
а одатле
$$0 \leq x^2 - 3x - 10 \ \wedge \ x < \frac{74}{13} \ \wedge \ x \leq 8.$$
Решење квадратне једначине $0 \leq x^2 - 3x - 10$ је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$.
Добили смо систем
$$\big(x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty) \ \wedge \ x < \frac{74}{13}\big) \ \wedge \ \big(x \leq 8\big),$$
који је еквивалентан са
$$\big(x \in (-\infty, -2] \cup [5, \frac{74}{13})\big) \ \wedge \ \big(x \leq 8\big).$$
Коначно решење је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, \frac{74}{13})$. △

1.2.15. Решити неједначину $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \geq 2x - 2$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$ и према (1.5) еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$\big(3x^2 - 2x - 1 \geq (2x-2)^2 \ \wedge \ 2x - 2 \geq 0\big) \ \vee \ \big(3x^2 - 2x - 1 \geq 0 \ \wedge \ 2x - 2 < 0\big),$$

односно

$$\big(- x^2 + 6x - 5 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 1\big) \ \vee \ \big(3x^2 - 2x - 1 \geq 0 \ \wedge \ x < 1\big).$$

Решавањем квадратних неједначина добијамо

$$\big(x \in [1,5] \ \wedge \ x \geq 1\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty) \ \wedge \ x < 1\big),$$

затим

$$x \in [1,5] \ \vee \ x \in (-\infty, -\frac{1}{3}].$$

Решење ирационалне неједначине је $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1,5]$. △

1.2.16. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7 + x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} > b(x)$ и према (1.6) еквивалентна је систему

$$\big(a(x) > b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$\big(x^2 - x - 12 > (7+x)^2 \ \wedge \ 7 + x \geq 0\big) \ \vee \ \big(x^2 - x - 12 \geq 0 \ \wedge \ 7 + x < 0\big),$$

односно

$$\big(15x + 61 < 0 \ \wedge \ x \geq -7\big) \ \vee \ \big(x^2 - x - 12 \geq 0 \ \wedge \ x < -7\big).$$

Решење квадратне неједначине $x^2 - x - 12 \geq 0$ је $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$, па смо добили

$$\big(x < -\frac{61}{15} \ \wedge \ x \geq -7\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \ \wedge \ x < -7\big),$$

а одавде

$$x \in [-7, -\frac{61}{15}) \ \vee \ x \in (-\infty, -7).$$

Решење ирационалне неједначине је $x \in (-\infty, -\frac{61}{15})$. △

1.2.17. Решити неједначину $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \frac{1}{2x-1}$.

Решење. Скуп допустивих вредности се налази из следећих услова

$$x+1>0 \ \wedge \ 2x-1\neq 0,$$

па је $D=(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.
Неједначина је типа $\sqrt{a(x)}>b(x)$ и према (1.6) еквивалентна је систему

$$\big(a(x)>b^2(x) \ \wedge \ b(x)\geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x)\geq 0 \ \wedge \ b(x)<0\big).$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$\left(\frac{1}{x+1}>\frac{1}{(2x-1)^2} \ \wedge \ \frac{1}{2x-1}\geq 0\right) \ \vee \ \left(\frac{1}{x+1}\geq 0 \ \wedge \ \frac{1}{2x-1}<0\right),$$

односно

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ 2x-1>0\right) \ \vee \ \big(x+1>0 \ \wedge \ 2x-1<0\big),$$

а одавде

$$\left(\frac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ x>\frac{1}{2}\right) \ \vee \ \big(x>-1 \ \wedge \ x<\frac{1}{2}\big).$$

Како је $\left(\dfrac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2}>0 \ \wedge \ x>\dfrac{1}{2}\right) \ \Leftrightarrow \ x>\dfrac{5}{4}$, имамо

$$x>\frac{5}{4} \ \vee \ \big(x>-1 \ \wedge \ x<\frac{1}{2}\big).$$

Коначно решење неједначине је $x\in(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{4},+\infty)$. △

1.2.18. Решити неједначину $x-2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+2<0$.

Решење. Скуп допустивих решења је цео скуп $\mathbb{R}$. Сменом $t=\sqrt[3]{x}$ неједначина се своди на $t^3-2t^2-t+2<0$, где $t\in\mathbb{R}$. Леви израз се може факторисати $t^3-2t^2-t+2=(t+1)(t-1)(t-2)$, па смо добили неједначину $(t+1)(t-1)(t-2)<0$, а одавде решење $t\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$. Решење почетне неједначине се налази из

$$\sqrt[3]{x}<-1 \ \vee \ 1<\sqrt[3]{x}<2,$$

чије је решење $x\in(-\infty,-1)\cup(1,8)$. △

1.2.19. Решити неједначину $\sqrt{3x-1}-\sqrt{7-x}\leq 2$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$3x-1\geq 0 \ \wedge \ 7-x\geq 0,$$

а то је $D = [\frac{1}{3}, 7]$.
Лева страна неједначине може бити и негативна, зато ћемо $\sqrt{7-x}$ пребацити на десну страну и добићемо

$$\sqrt{3x-1} \leq 2 + \sqrt{7-x},$$

где су обе стране позитивне. Сада је неједначина еквивалентна са

$$3x - 1 \leq (2 + \sqrt{7-x})^2 \ \wedge \ x \in D,$$

односно

$$3x - 1 \leq 4 + 4\sqrt{7-x} + 7 - x \ \wedge \ x \in D,$$

а одавде

$$\sqrt{7-x} \geq x - 3 \ \wedge \ x \in [\frac{1}{3}, 7]. \tag{1.7}$$

Решимо прво неједначину $\sqrt{7-x} \geq x - 3$.
Неједначина је облика $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$ и према (1.5)еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, имамо

$$\big(7 - x \geq (x-3)^2 \ \wedge \ x - 3 \geq 0\big) \ \vee \ \big(7 - x \geq 0 \ \wedge \ x - 3 < 0\big),$$

који је еквивалентан систему

$$\big(x^2 - 5x + 2 \leq 0 \ \wedge \ x \geq 3\big) \ \vee \ \big(x \leq 7 \ \wedge \ x < 3\big),$$

а овај

$$\big(x \in [(5 - \sqrt{17})/2, (5 + \sqrt{17})/2] \ \wedge \ x \geq 3\big) \ \vee \ \big(x < 3\big),$$

чије је решење $x \in (-\infty, (5 + \sqrt{17})/2]$. Добили смо решење неједначине $\sqrt{7-x} \geq x - 3$. Сада то решење убацимо у систем 1.7 и добијемо

$$x \in (-\infty, (5 + \sqrt{17})/2] \ \wedge \ x \in [1/3, 7].$$

Решење почетне ирационалне неједначине је $x \in [1/3, (5 + \sqrt{17})/2]$.

△

1.2.20. Решити неједначину $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \ \wedge \ \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

Први услов је еквивалентан са $x \in [-1,0) \cup [1,+\infty)$, а други са $x \in (-\infty, 0) \cup [1,+\infty]$. Следи, $D = [-1,0) \cup [1,+\infty]$. На скупу D десна страна неједнакости је ненегативна, па ћемо израз $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ пребацити на десну страну и добићемо

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x}},$$

где су и лева и десна страна ненегативне за сваку вредност $x \in D$. Квадрирањем добићемо еквивалентну неједначину

$$x-\frac{1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2} + 2\frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x},$$

одакле је

$$2\frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} < x - 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Претпоставимо да је $x \neq 1$. Тада је $\frac{x-1}{x}$ позитивно на D, па се знак неједнакости неће променити ако је поделимо са овим изразом и добијемо

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} < \frac{x^2-x+1}{2x}, \ \ x \in D/\{1\}.$$

Неједнакост је облика $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (1.4) еквивалентна је систему

$$0 \le a(x) < b^2(x) \ \wedge \ b(x) > 0,$$

што је у нашем случају

$$0 \le 1 - \frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \wedge \ \frac{x^2-x+1}{2x} > 0 \ \wedge \ x \in D/\{1\}.$$

Ово је еквивалентно са следећим

$$1 - \frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \wedge \ x \in (1,+\infty),$$

а одатле и са

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 > 0 \ \wedge \ x \in (1,+\infty).$$

С обзиром да је $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^2-x-1)^2$, имамо систем

$$(x^2-x-1)^2 > 0 \ \wedge \ x \in (1,+\infty),$$

чије је решење $x \in \big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$. Остало је да још проверимо да ли $x=1$ задовољава неједнакост. Заменом ове вредности у почетну неједнакост закључујемо да не припада скупу решења, па је коначно решење $\big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$. $\triangle$

1.2.21. Решити неједначину $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$

Решење. Неједначина $a(x)b(x) \geq 0$ еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \leq 0 \ \wedge \ b(x) \leq 0\big).$$

Према томе, наша неједначина је еквивалентна систему

$$\big(x-1 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \geq 0\big) \ \vee \ \big(x-1 \leq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \leq 0\big),$$

из чега следи

$$\big(x \geq 1 \ \wedge \ x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)\big) \ \vee \ \big(x \leq 1 \ \wedge \ x \in \{-1,2\}\big),$$

а одавде

$$x \in [2,+\infty) \ \vee \ x = -1.$$

Решење неједначине је $x \in \{-1\} \cup [2,+\infty)$. △

1.2.22. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+2)(x^2-8x+16)} \geq 0.$

Решење. Неједначина је еквивалентна следећем систему неједначина

$$x^2-2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad (x+2)(x^2-8x+16) > 0,$$

а одавде

$$x^2-2x-3 \geq 0 \wedge \left[\big(x+2 > 0 \wedge (x-4)^2 > 0\big) \vee \big(x+2 < 0 \wedge (x-4)^2 < 0\big)\right],$$

што даје

$$x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) \quad \wedge \quad x \in (-2,4) \cup (4,+\infty).$$

Решење неједначине је $x \in (-2,-1] \cup [3,4) \cup (4,+\infty)$. △

1.2.23. Колико различитих реалних решења има једначина $x^2+\sqrt{(x-1)^2} = 1$?
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) више од 3; Е) не знам.

Решење. Почетна једначина је еквивалентна једначини $x^2+|x-1| = 1$, односно

$$\big(x \geq 1 \ \wedge \ x^2+x-1 = 1\big) \ \vee \ \big(x < 1 \ \wedge \ x^2-x+1 = 1\big).$$

У првој загради претходног израза добијемо решења једначине $x_1 = -2, x_2 = 1$, од којих само x_2 задовољава услов $x \geq 1$. У другој загради добијемо решења једначине $x_3 = 0, x_4 = 1$, од којих x_3 задовољава услов $x < 1$. Према томе, решења једначине су $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$. Тачан одговор је под В). △

1.2.24. Једначина $\sqrt{(1-x)} = -x$:
А) нема решења; Б) има тачно једно решење и оно је негативно; В) има тачно једно решење и оно је позитивно; Г) има тачо два решења; Д) има више од два решења; Е) не знам.

Решење. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)} = b(x)$ и према (1.1) еквивалентна је систему

$$a(x) = b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша једначина је еквивалентна систему

$$1 - x = (-x)^2 \ \wedge \ -x \geq 0,$$

односно

$$x^2 + x - 1 = 0 \ \wedge \ x \leq 0.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Решење x_2 не задовољава услов $x \leq 0$, па ирационална једначина има само једно решење $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Тачан одговор је под Б). △

1.2.25. Решење једначине $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$ припада интервалу:
А) $(-\infty, -2]$; Б) $(-2, -1]$; В) $(-1, 0]$; Г) $(0, 1]$; Д) $(1, +\infty)$; Е) не знам.

Решење. Нађимо област дефинисаности једначине. Потребно је да су задовољени следећи услови

$$1 - x \geq 0, \ 1 - \sqrt{1-x} \neq 0, \ 1 + \sqrt{1-x} \neq 0, \ 1 - x > 0.$$

Област дефинисаности једначине је $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Помножимо једначину са $(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})\sqrt{1-x}$ и добићемо

$$(1 + \sqrt{1-x})\sqrt{1-x} + (1 - \sqrt{1-x})\sqrt{1-x} = 4\sqrt{3}(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x}).$$

Срећивањем долазимо до следеће једначине

$$\sqrt{1-x} + 1 - x + \sqrt{1-x} - 1 + x = 4\sqrt{3}(1 - 1 + x),$$

а одавде $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{3}x$. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)} = b(x)$, па је еквивалентна систему

$$1 - x = (2\sqrt{3}x)^2, \ 2\sqrt{3}x \geq 0,$$

односно

$$12x^2 + x - 1 = 0, \ x \geq 0.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$. Решење x_1 не задовољава услов $x \geq 0$, па је само $x_2 = \frac{1}{4}$ решење ирационалне једначине. Тачан одговор је под Г).

△

1.2.26. Збир свих решења једначине $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ је:
А) 0; Б) -3; В) 3; Г) 5; Д) 8; Е) не знам.

Решење. Област дефинисаности једначине је скуп свих реалних бројева, јер је израз x^2+16 позитиван за свако $x \in \mathbb{R}$. Помножимо једначину са $\sqrt{x^2+16}$ и добићемо $x\sqrt{x^2+16} + x^2 + 16 = 40$, а одатле $x\sqrt{x^2+16} = 24 - x^2$. Ако претпоставимо да је $x \neq 0$, тада је $\sqrt{x^2+16} = \frac{24-x^2}{x}$. Ово је једначина типа $\sqrt{a(x)} = b(x)$ и еквивалентна је систему $a(x) = b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0$. Према томе, имамо

$$x^2 + 16 = \left(\frac{24-x^2}{x}\right)^2 \ \wedge \ \frac{24-x^2}{x} \geq 0,$$

односно

$$x^4 + 16x^2 = 576 - 48x^2 + x^4 \ \wedge \ \frac{24-x^2}{x} \geq 0 \tag{1.8}$$

Услов $\dfrac{24-x^2}{x} \geq 0$ еквивалентан је систему

$$\big(24 - x^2 \geq 0 \ \wedge \ x > 0\big) \ \vee \ \big(24 - x^2 \leq 0 \ \wedge \ x < 0\big),$$

односно

$$\big(x \in [-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}] \ \wedge \ x > 0\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -2\sqrt{6}) \cup (2\sqrt{6}, \infty) \ \wedge \ x < 0\big),$$

а одавде

$$\big(x \in (0, 2\sqrt{6}]\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -2\sqrt{6})\big).$$

Убацимо ово решење у (1.8) и добијемо

$$x^2 = 9 \ \wedge \ x \in (-\infty, -2\sqrt{6}) \cup (0, 2\sqrt{6}],$$

а затим и решење $x_1 = 3$. Остало је да још проверимо да ли је $x = 0$ решење. Заменом у почетној једначини закључујемо да није решење. Према томе, добили смо само једно решење $x_1 = 3$. Тачан одговор је под В). △

1.2.27. Једначина $\sqrt{x+2} = x - 1$:
А) нема решења; Б) има једно решење и оно је позитивно; В) има једно решење и оно је негативно; Г) има једно позитивно и једно негативно решење; Д) има два решења и оба су позитивна; Е) не знам.

Решење. Једначина је еквивалентна систему

$$x + 2 = (x-1)^2 \ \wedge \ x - 1 \geq 0,$$

а одатле

$$-x^2 + 3x + 1 = 0 \ \wedge \ x \geq 1.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, а услов $x \geq 1$ задовољава само решење $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Тачан одговор је под В). △

1.2.28. Скуп решења неједначине $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1$ је:
А) $(\frac{1}{3}, 2)$; Б) $(-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty)$; В) $(-\infty, \frac{3}{4})$; Г) $(\frac{3}{4}, +\infty)$; Д) $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$; Е) не знам.

Решење. Неједначина је типа $\sqrt{a(x)} < b(x)$, па је према (1.4) еквивалентна са

$$\left(0 \leq \frac{3x-1}{2-x} < 1\right) \ \wedge \ \left(1 > 0\right),$$

односно

$$0 \leq \frac{3x-1}{2-x} < 1.$$

Неједначина $0 \leq \frac{3x-1}{2-x}$ је еквивалентна систему

$$\left(3x-1 \geq 0 \wedge 2-x > 0\right) \ \vee \ \left(3x-1 \leq 0 \ \wedge \ 2-x < 0\right),$$

одакле добијемо

$$\left(x \geq \frac{1}{3} \wedge x < 2\right) \ \vee \ \left(x \leq \frac{1}{3} \ \wedge \ x > 2\right),$$

односно

$$x \in [\frac{1}{3}, 2).$$

Из следећих еквиваленција $\frac{3x-1}{2-x} < 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{3x-1}{2-x} - 1 < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{3x-1-2+x}{2-x} < 0 \ \Leftrightarrow$ $\frac{4x-3}{2-x} < 0$ добијемо систем

$$\left(4x-3 > 0 \wedge 2-x < 0\right) \ \vee \ \left(4x-3 < 0 \ \wedge \ 2-x > 0\right),$$

који је еквивалентан са

$$\left(x > \frac{3}{4} \wedge x > 2\right) \ \vee \ \left(x < \frac{3}{4} \ \wedge \ x < 2\right).$$

Решимо овај систем и добићемо

$$x \in (-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty).$$

Коначно решење се добије као пресек скупа $[\frac{1}{3}, 2)$ и скупа $(-\infty, \frac{3}{4}) \cup (2, +\infty)$, па је једнак $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$. Тачан одговор је под Д). △

1.3 Задаци за вежбу

1.3.29. Решити једначину $\sqrt{x^4 - 4x - 16} = 2 - x$.

Решење. $x = -\sqrt{5}$ △

1.3.30. Решити једначину $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$.

Решење. $x_1 = 4, x_2 = 11$ △

1.3.31. Решити једначину $\sqrt{y^2+4y+8} + \sqrt{y^2+4y+4} = \sqrt{2(y^2+4y+6)}$.

Решење. $y = -2$ △

1.3.32. Решити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решење. $5 \leq x \leq 10$. △

1.3.33. Решити једначину $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

Решење. $x_1=8, x_{2,3}=8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$. △

1.3.34. Решити једначину $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$.

Решење. $x=-1$. △

1.3.35. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$.

Решење. $x=81$. △

1.3.36. Решити једначину $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

Решење. $x_1=0, x_2=\frac{63}{65}a$. △

1.3.37. Решити једначину $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Решење. $x_1=16, x_2=81$. △

1.3.38. Решити једначину $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

Решење. $x=8$. △

1.3.39. Решити једначину $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

Решење. $x=2^{10}$. △

1.3.40. Решити једначину $\sqrt{x^2-2|x|+1}=1$.

Решење. $x\in\{0,2,-2\}$. △

1.3.41. Решити неједначину $\sqrt{x+78}<x+6$.

Решење. $x>3$. △

1.3.42. Решити неједначину $\sqrt{-x^2+x+6}>1-x$.

Решење. $-1<x\geq 3$. △

1.3.43. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1}\geq 2x-2$.

Решење. $x\in(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1,5]$. △

1.3.44. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x+2}\leq 2x-1$.

Решење. $x\in[(1+\sqrt{13})/6,1]\cup[2,+\infty)$. △

1.3.45. Решити неједначину $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решење. $x \in [0, (3-\sqrt{5})/6)$. △

1.3.46. Решити неједначину $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} > \sqrt{4x-3}$.

Решење. $x > 3$. △

1.3.47. Решити неједначину $\frac{1}{x}(1-\sqrt{1-9x^2}) < 1$.

Решење. $x \in [-1/3, 0) \cup (0, 1/5)$ △

1.3.48. Решити неједначину $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$.

Решење. $x \in (\sqrt{13}-5)/2, 1]$ △

1.3.49. Решити неједначину $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq 0,5$.

Решење. $x \in \big(-1, 1-\sqrt{2}\,\big] \cup \big(1, \sqrt{2}\,\big]$. △

1.3.50. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1} \leq 6\sqrt{x}$.

Решење. $x \in [0, 1) \cup (0, \frac{45}{8})$. △

1.3.51. Решити неједначину $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1$.

Решење. $x \in (0, 1) \cup (9, +\infty)$. △